



RESOLUCIÓN DE ECUACIONES LOGARÍTMICAS

Antecedentes

Una ecuación logarítmica involucra al logaritmo en uno o en los dos lados de la igualdad. Para resolver una ecuación de este tipo es necesario utilizar alguna propiedad de los logaritmos, y en algunas ocasiones, aplicar cambios de base con la finalidad de simplificar más la ecuación y así obtener su solución.

A continuación se muestran algunos ejemplos de ecuaciones logarítmicas:

a) $\log(x + 6) = \log(2x - 1)$

b) $\log(x + 6) = 1 + \log(x - 3)$

Ejemplos: Resolver las siguientes ecuaciones.

1) $\log_5 x = 2$

Recordando la definición de logaritmo se tiene que la solución de la ecuación es

$$x = 5^2 \quad \text{ya que} \quad \log_a x = b \quad \Leftrightarrow \quad x = a^b$$

$$\therefore x = 25$$

2) $\log_2 x - \frac{\log_2 x}{3} = 4$

Al reescribir la ecuación para utilizar de manera directa la propiedad del logaritmo de la raíz enésima de un número



$$\log_2 x - \frac{1}{3} \log_2 x = 4$$

$$\log_2 x - \log_2 x^{\frac{1}{3}} = 4$$

Ahora se aplica la propiedad del logaritmo de la división entre dos números, pero aplicada de manera inversa

$$\log_2 \left(\frac{x}{x^{\frac{1}{3}}} \right) = 4$$

Se simplifica el exponente de x y se aplica nuevamente la propiedad del logaritmo de la raíz enésima de un número

$$\log_2 \left(x^{\frac{2}{3}} \right) = 4 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{3} \log_2 x = 4$$

Se aplica la definición de logaritmo

$$\log_2 x = 6 \quad \therefore \quad x = 2^6 = 64$$

3) $\log_3(\log_3 x^3) = 3$

Se utiliza la definición de logaritmo

$$\log_3 x^3 = 3^3 \quad \Rightarrow \quad \log_3 x^3 = 27$$

Se aplica la propiedad del logaritmo de la potencia enésima de un número y se simplifica la ecuación

$$3 \log_3 x = 27 \quad \log_3 x = \frac{27}{3} = 9$$

Ahora se utiliza la definición de logaritmo y se obtiene el valor de x

$$x = 3^9 = 19683$$

4) $\log x^2 = -4$

$$-\frac{1}{4} \log x^2 = 1$$

$$-\frac{1}{4} (2) \log x = 1$$



$$-\frac{1}{2} \log x = 1$$

Utilizando la propiedad de la raíz enésima de un número y la propiedad del recíproco de un número en el logaritmo se tiene

$$\log x^{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$\log \left(\frac{1}{x^2} \right) = 1$$

Al utilizar la definición de logaritmo y al despejar la incógnita se tiene el valor de x

$$\frac{1}{x^2} = 10^1$$

$$\frac{1}{10} = x^2$$

$$\left(\frac{1}{10} \right)^2 = \left(x^2 \right)^2$$

$$x = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100}$$

5) $\log_9 x = \frac{3}{2}$

Al multiplicar la ecuación por $\frac{2}{3}$ y simplificarla se tiene

$$\frac{2}{3} \log_9 x = \left(\frac{3}{2} \right) \left(\frac{2}{3} \right)$$

$$\frac{2}{3} \log_9 x = 1$$

Utilizando la propiedad de la raíz enésima de un número en el logaritmo, se tiene

$$\log_9 x^{\frac{2}{3}} = 1$$



Al utilizar nuevamente el concepto de logaritmo y despejar la incógnita x se tiene

$$x^{\frac{2}{3}} = 9^1$$

$$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 9^{\frac{3}{2}}$$

$$x = (\sqrt{9})^3$$

$$x = 3^3 = 27$$

6) $\log_8 x = -\frac{1}{3}$

Se multiplica por -3 a la ecuación

$$-3\log_8 x = 1$$

Al aplicar la propiedad del recíproco de un número y la propiedad de la potencia enésima de un número en el logaritmo se tiene

$$\log_8 x^{-3} = 1$$

$$\log_8 \left(\frac{1}{x^3}\right) = 1$$

Se aplica nuevamente el concepto de logaritmo y se despeja x para obtener su valor

$$\frac{1}{x^3} = 8^1$$

$$\frac{1}{8} = x^3$$

$$(x^3)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$x = \frac{1}{2}$$





7) $\log_{64} x^9 = -3$

Se multiplica la ecuación por $-\frac{1}{3}$

$$-\frac{1}{3} \log_{64} x^9 = 1$$

Se aplica la propiedad de la raíz enésima de un número y la propiedad del recíproco de un número en el logaritmo

$$\log_{64} (x^9)^{-\frac{1}{3}} = 1$$

$$\log_{64} x^{-3} = 1$$

$$\log_{64} x^{-3} = 1$$

$$\log_{64} \left(\frac{1}{x^3} \right) = 1$$

Se utiliza la definición de logaritmo y se despeja x para obtener su valor

$$\frac{1}{x^3} = 64^1$$

$$\frac{1}{64} = x^3$$

$$\left(\frac{1}{64} \right)^{\frac{1}{3}} = (x^3)^{\frac{1}{3}}$$

$$x = \frac{1}{4}$$

8) $\log_4 x = \log_4(8-x)$

Recordando la definición de logaritmo $\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b$ y

despejando x se tiene

$$x = 8 - x$$

$$2x = 8$$

$$x = 4$$