

PARÁBOLA

Definición

Es el lugar geométrico de los puntos del plano tales que sus distancias a un punto fijo llamado **foco** y a una recta fija llamada **directriz** son iguales.

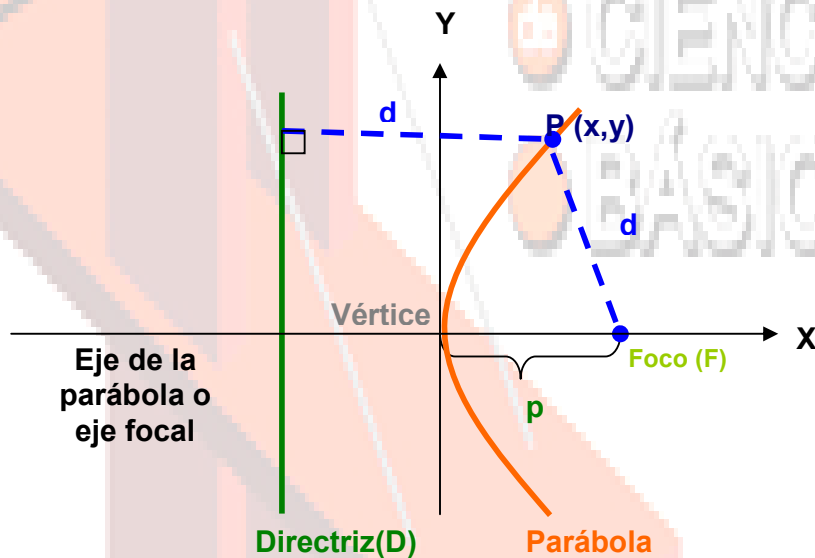


Figura 1. Parábola.

$$\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, D)$$

$$|\overline{PF}| = |\overline{PD}|$$

Características geométricas y ecuaciones

Vértice. Es el punto donde la parábola corta a su eje focal.

Foco. Es un punto que se encuentra situado sobre el eje focal y la distancia que se encuentra del vértice al foco, es la misma que del vértice a la Directriz.

Lado recto. La cuerda, perpendicular al eje focal, que contiene al foco y corta a dos puntos de la parábola.

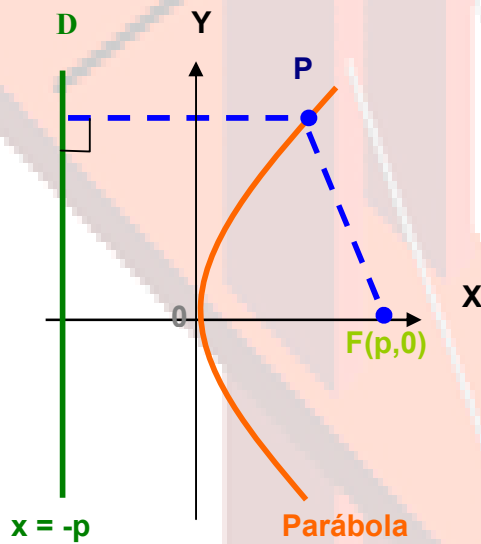


Directriz. Línea recta donde la $\text{dist}(P, F) = \text{dist}(P, D)$; $|\overline{PF}| = |\overline{PD}|$. Ver figura 1.

Eje focal. Recta que contiene el foco y es perpendicular a la directriz.

Parámetro p. Distancia del foco al vértice.

La ecuación de la parábola con **vértice en el origen** y **eje focal sobre el eje X** que abre hacia la derecha es:



Ecuación

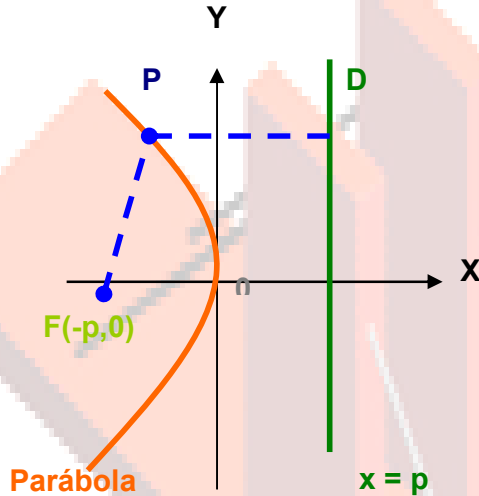
$$y^2 = 4px$$

Directriz

$$x = -p$$

Figura 2. Parábola con vértice en el origen y eje focal sobre el eje X que abre hacia la derecha.

La ecuación de la parábola con **vértice en el origen** y **eje focal sobre el eje X** que abre hacia la izquierda es:



Ecuación

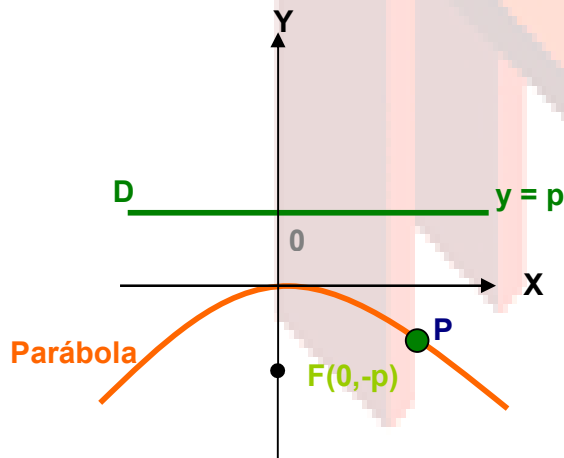
$$y^2 = -4px$$

Directriz

$$x = p$$

Figura 3. Parábola con vértice en el origen y eje focal sobre el eje X que abre hacia la izquierda.

La ecuación de la parábola con **vértice en el origen** y **eje focal sobre el eje Y** que abre hacia abajo es:



Ecuación

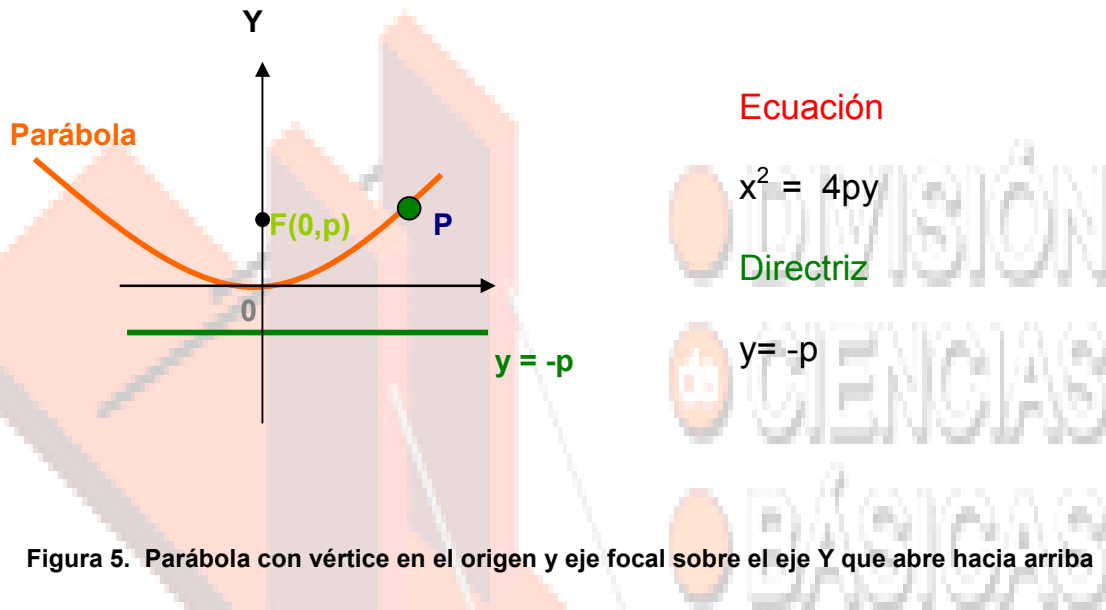
$$x^2 = -4py$$

Directriz

$$y = p$$

Figura 4. Parábola con vértice en el origen y eje focal sobre el eje Y que abre hacia abajo

La ecuación de la parábola con **vértice en el origen** y **eje focal sobre el eje Y** que abre hacia arriba es:



Ejemplo:

Obtener la ecuación, el foco y la directriz de la parábola con vértice en el origen y contiene al punto B(3,4), además su eje focal es paralelo al eje X.

Resolución: Sustituyendo las coordenadas del punto B en la ecuación

$$y^2 = 4px :$$

$$16 = 4p(3)$$

$$p = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

$$y^2 = \frac{16}{3}x$$

$$\text{Foco: } F\left(\frac{4}{3}, 0\right); \text{ Directriz: } x = -\frac{4}{3}$$



Ecuación de una parábola con eje focal paralelo o coincidente con el eje "X"

A continuación se muestra la representación gráfica de parábolas con eje paralelo al eje X y vértice en V(h,k)

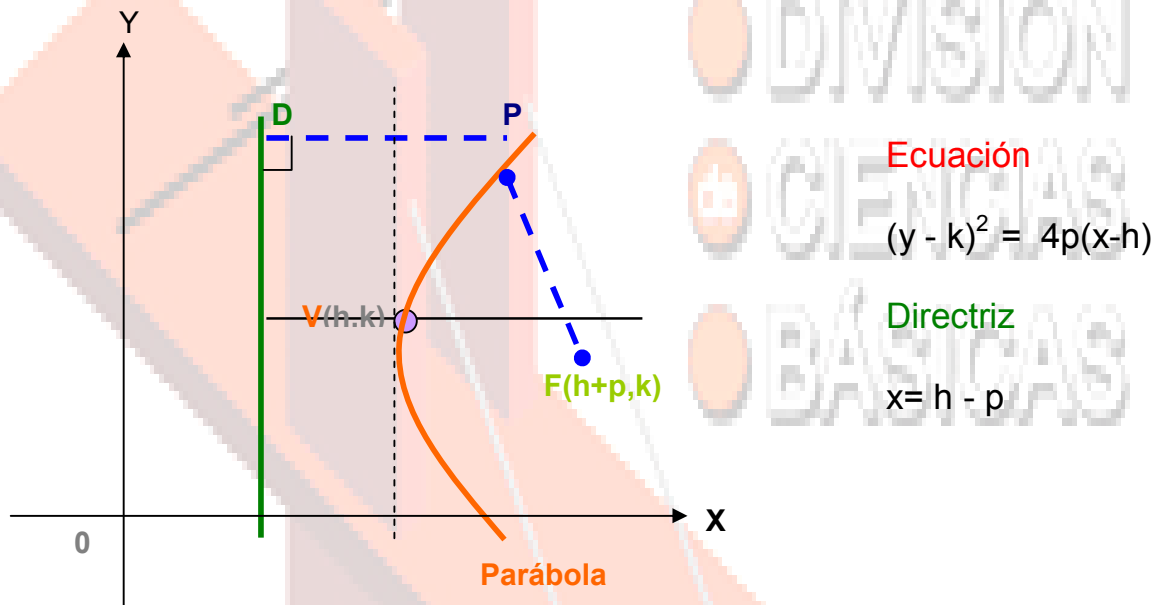


Figura 6. Parábola con vértice en (h, k) y eje focal paralelo al eje X.

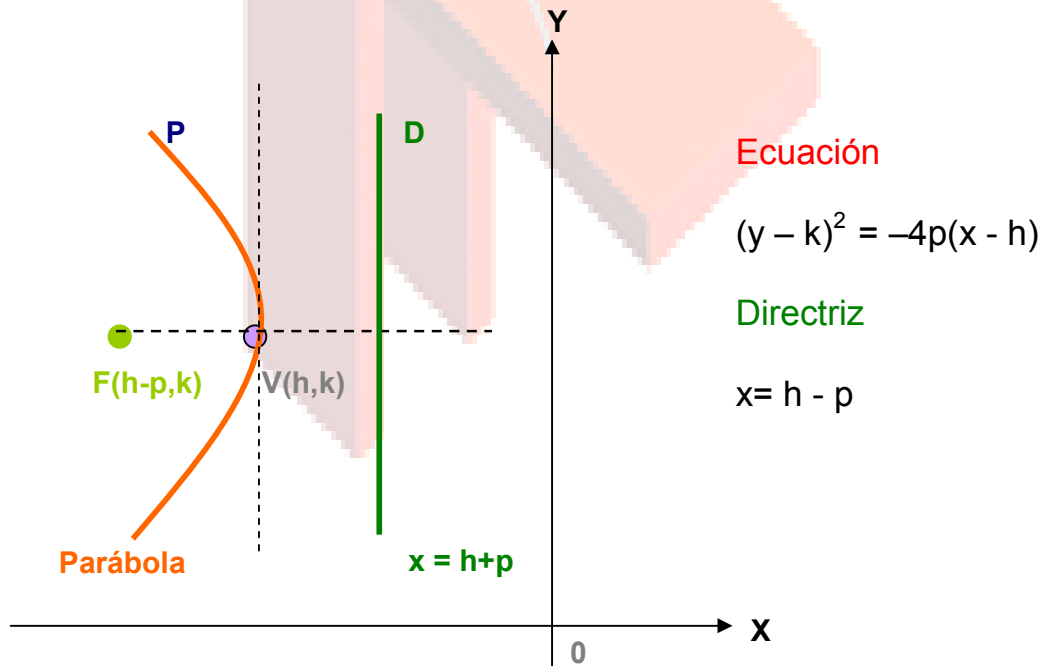
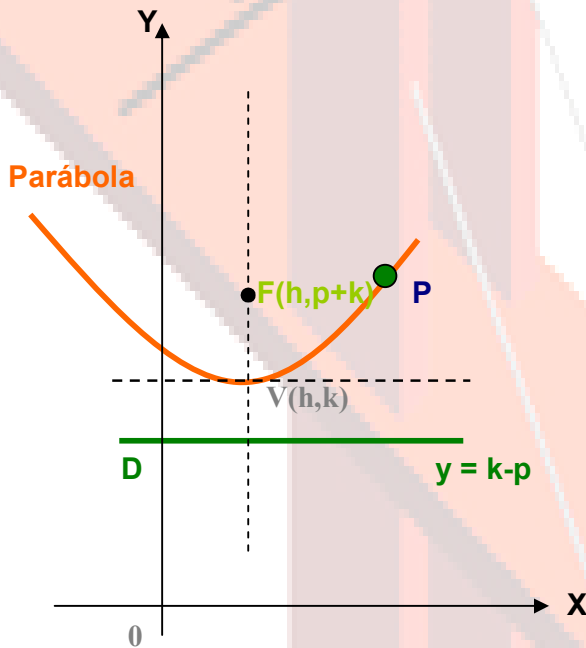


Figura 7. Parábola con vértice en (h, k) y eje focal paralelo al eje X.



Ecuación de una parábola con eje focal paralelo o coincidente con el eje "Y".

A continuación se muestra la representación gráfica de parábolas con eje paralelo al eje Y y vértice en $V(h,k)$



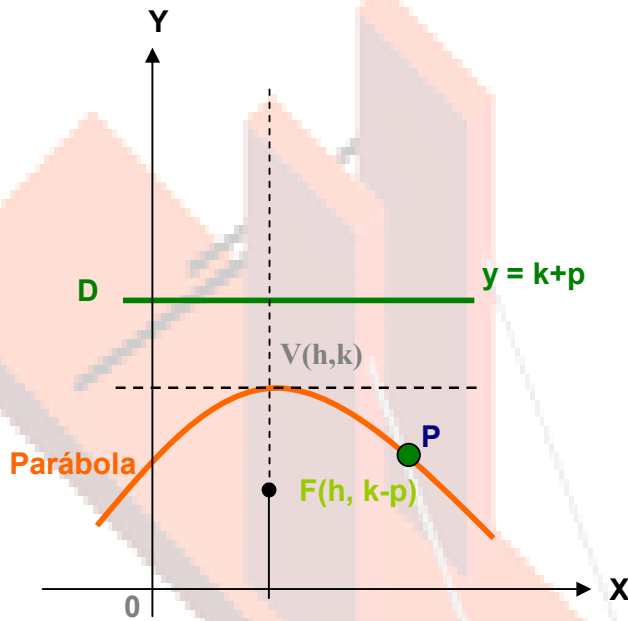
Ecuación

$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

Directriz

$$y = k - p$$

Figura 8. Parábola con vértice en (h, k) y eje focal paralelo al eje Y con $p > 0$.



Ecuación

$$(x - h)^2 = -4p(y - k)$$

Directriz

$$y = k - p$$

Figura 9. Parábola con vértice en (h, k) y eje focal paralelo al eje Y con $p < 0$.

Ejemplo:

Determinar las coordenadas del Vértice, Foco y calcular el lado recto de la parábola de ecuación $y^2 - y + 4x + 5 = 0$

Resolución:

Completando el trinomio al cuadrado perfecto

$$y^2 - y + \frac{1}{4} + 4x + 5 = 0$$

factorizando al trinomio al cuadrado perfecto $y^2 - y + \frac{1}{4}$ se obtiene

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = -4x - 5 + \frac{1}{4}$$

simplificando y factorizando el miembro derecho de la ecuación

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = -4x - \frac{19}{4}$$

$$\left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = -4\left(x + \frac{19}{16}\right)$$



El lado recto de una parábola es $|4p|$, para el ejemplo se tiene que $p = -1$ ya que

$$4p = -4, \text{ vértice } V\left(-\frac{19}{16}, \frac{1}{2}\right), \text{ Foco } F\left(-\frac{35}{16}, \frac{1}{2}\right)$$

Ejemplo:

Determinar la ecuación ordinaria, vértice y foco de la parábola de ecuación

$$3x^2 - y + 6x + 2 = 0$$

Resolución:

Agrupando y completando el trinomio al cuadrado perfecto

$$3(x^2 + 2x) = y - 2$$

$$3(x^2 + 2x + 1) = y - 2 + 3$$

simplificando y factorizando el miembro derecho de la ecuación

$$3(x + 1)^2 = y + 1$$

multiplicando por $\frac{1}{3}$ a la ecuación

$$(x + 1)^2 = \frac{y + 1}{3}$$

Si el lado recto es $|4p|$ y en este caso $4p = \frac{1}{3}$, se tiene que $p = \frac{1}{12}$

Por lo que la parábola tiene ecuación $(x + 1)^2 = \frac{y + 1}{3}$ y tiene su eje focal

paralelo al eje Y, con vértice en $V(-1, -1)$ y foco $F\left(-1, -\frac{11}{12}\right)$