# Interpolación con incrementos variables.

En ocasiones deseamos realizar una interpolación a partir de un conjunto de datos experimentales, donde valores consecutivos de la variable independiente no son equidistantes, en estos casos debemos utilizar la interpolación de Lagrange.

## Interpolación de Lagrange.

Consideremos la recta que pasa por los puntos ($x_0$, $y_0$) y ($x_1$, $y_1$), del curso de geometría analítica sabemos que la ecuación de la recta que pasa por dos puntos es:

$$y = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) - y_0 \tag{1}$$

que puede escribirse como sigue:

$$y = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0) - y_0 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_0 - (1) y_0 \tag{2}$$

es decir:

$$y = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}(y_1 - y_0) - y_0 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 - \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_0 - \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} y_0$$

o bien:

$$y = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 - \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} + \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} \right) y_0 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 - \frac{x - x_1}{x_1 - x_0} y_0$$

Entonces:

$$y = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 + \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 \tag{3}$$

es otra forma de escribir la recta que pasa por ($x_0$, $y_0$) y ($x_1$, $y_1$).

Si ahora definimos los coeficientes de Lagrange como:

$$L_0 = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \qquad y \qquad L_1 = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \tag{4}$$

la ecuación de la recta se puede escribir como:

$$y = \sum_{i=0}^{1} L_i y_i$$

Observemos que:

$$L_i = \begin{cases} 0 & x \neq x_i \\ 1 & x = x_i \end{cases} \tag{5}$$

Conservando la forma de (4) y la propiedad (5) podemos construir el coeficiente *i*-esimo de Lagrange ($L_i$ ) para un polinomio de grado *n*, como un cociente donde el numerador sea un producto de diferencias entre *x* y las diferentes $x_j$, con *j* distinto de *i*, de lo contrario siempre se anularía. Por otro lado, el denominador debe ser igual al numerador en $x = x_i$, para que tome el valor de 1. Por lo tanto:

$$L_{n,i} = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \tag{6}$$

Así el polinomio que pasa por los puntos ($x_0$, $y_0$), ($x_1$, $y_1$),..., ($x_n$, $y_n$) se puede escribir como:

$$y = \sum_{i=0}^{n} L_{n,i} y_i \tag{7}$$

donde los coeficientes $L_i$ pueden escribirse como:

$$L_i = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} \tag{8}$$

entonces el polinomio toma la forma:

$$y = \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} y_i \tag{9}$$

y se le denomina **Polinomio interpolante de Lagrange**

## Ejemplo 1.

Usando interpolación de Lagrange, obtén el valor de *y* correspondiente a *x* = 3.6. Compara el resultado con la respuesta exacta si ésta es 3.278.

| | | | |
|---|---|---|---|
| ***x*** | 2.00 | 3.20 | 4.00 |
| ***y*** | 1.43 | 2.79 | 3.56 |

*Solución 1:*

Como se cuenta con tres puntos, el grado máximo del polinomio interpolante es 2. Primeramente realizamos una interpolación lineal, es decir, con un polinomio de grado 1. La expresión (9) se reduce a la (3), donde $y_0(x_0) = 2.79$ y $y_1(x_1) = 3.56$, y $x = 3.6$, entonces:

$$y = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 + \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 = \frac{3.6 - 3.2}{4 - 3.2} 3.56 + \frac{3.6 - 4}{3.2 - 4} 2.79$$

O bien:

$$y = (0.5)(3.56) + (0.5)(2.79) = 3.175$$

este resultado tiene un error igual a:

$$\varepsilon = \left| \frac{3.175 - 3.278}{3.278} \right| \times 100\% = 3.14\%$$

*Solución 2:*

Ahora usemos un polinomio interpolante de grado 2, esto es:

$$y = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 \qquad (10)$$

sustituyendo:

$$y = \frac{(3.6 - 3.2)(3.6 - 4)}{(2 - 3.2)(2 - 4)} 1.43 + \frac{(3.6 - 2)(3.6 - 4)}{(3.2 - 2)(3.2 - 4)} 2.79 + \frac{(3.6 - 2)(3.6 - 3.2)}{(4 - 2)(4 - 3.2)} 3.56$$

Evaluando:

$$y = 3.1887$$

este segundo resultado tiene un error igual a:

$$\varepsilon = \left| \frac{3.189 - 3.278}{3.278} \right| \times 100\% = 2.7\%$$

El error con un polinomio de segundo grado es menor al error con un polinomio de primer grado, esto hace suponer que con un número mayor de puntos puede minimizarse el error. Cosa que en general no es cierto.

## Ejemplo 2:

Construye el polinomio que aproxima a la función en la tabla del ejemplo anterior.

*Solución:*

Para hallar el polinomio buscado, es suficiente con interpolar para un valor *x*, por lo tanto sustituimos los valores correspondientes en la expresión (10):

$$y = \frac{(x-3.2)(x-4)}{(2-3.2)(2-4)}1.43 + \frac{(x-2)(x-4)}{(3.2-2)(3.2-4)}2.79 + \frac{(x-2)(x-3.2)}{(4-2)(4-3.2)}3.56$$

simplificando:

$$y = 0.60(x^2 - 7.2x + 12.8) - 2.91(x^2 - 6x + 8) + 2.23(x^2 - 5.2x + 6.4)$$

$$y = -0.08x^2 + 1.54x - 1.33 \qquad (11)$$

Este es el polinomio interpolante que aproxima a la función tabulada en el ejemplo 1.

## Error del polinomio interpolante de Lagrange

En los ejemplos 1 y 2 se calculó el error del valor estimado respecto del valor real, pero este valor en general no lo conoceremos. Para estimar el error de un valor interpolado, utilizaremos la expresión del error para el polinomio interpolante de Lagrange, dicho error esta dado por:

$$\varepsilon(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n) \tag{12}$$

O bien:

$$\varepsilon(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i) \tag{13}$$

donde $\xi$ es un valor en ($x_0$, $x_n$). Para la aplicación de esta expresión en el cálculo de errores, se requiere la forma analítica de *f(x)*, lo cual no es posible en conjuntos de datos.

La expresión completa del polinomio interpolante de Lagrange es:

$$y = \sum_{i=0}^{n}\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}y_i \pm \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

## Ejemplo 3.

Utilizando un polinomio interpolante de Lagrange de grado 2 y los valores tabulados en la siguiente tabla,

| ***x*** | ***f(x) =sen(x)*** |
|---|---|
| 0.3 | 0.2955 |
| 0.4 | 0.3894 |
| 0.5 | 0.4794 |

obtén *f(0.35)*, y calcula una cota para el error.

*Solución:*

Según la expresión (10) tenemos:

$$y = \frac{(0.35-0.4)(0.35-0.5)}{(0.3-0.4)(0.3-0.5)}0.2955 + \frac{(0.35-0.3)(0.35-0.5)}{(0.4-0.3)(0.4-0.5)}0.3894$$
$$+\frac{(0.35-0.3)(0.35-0.4)}{(0.5-0.3)(0.5-0.4)}0.4794$$

entonces:

$$y = 0.3429$$

Para establecer una cota para el error, utilizamos la expresión (4.61):

$$\varepsilon(x) = \frac{-\cos(\xi)}{3!}(x-0.3)(x-0.4)(x-0.5)$$

Como $|\cos(x)| \le 1$, tenemos:

$$\varepsilon(x) \le \left|\frac{-\cos(\xi)}{3!}(x-0.3)(x-0.4)(x-0.5)\right| \le \left|\frac{-1}{3!}(0.35-0.3)(0.35-0.4)(0.35-0.5)\right|$$

por lo tanto:

$$\varepsilon(x) \le \left|\frac{1}{3!}(0.05)(-0.05)(-0.15)\right| = 0.0000625$$

Entonces:

$$f(0.35) = 0.3429 \pm 0.0000625$$

O bien, redondeando a cuatro decimales:

$$f(0.35) = 0.3429 \pm 0.0001$$

Intervalo que contiene al valor real.

# Interpolación Inversa.

Los métodos de interpolación permiten resolver ecuaciones trascendentes o algebraicas. Para ello basta considerar la variable independiente de la función a resolver como la dependiente en el proceso de interpolación y viceversa. A este procedimiento se le conoce como **interpolación inversa** Para ejemplificar esta aplicación resolveremos el siguiente Ejemplo:

## **Ejemplo 4**:

Hallar el instante en que un avión alcanza una velocidad de 11.2 m/s, la velocidad es función de su masa, la cual es variable debido al consumo de combustible, la ecuación que describe su velocidad es:

$$v = \beta \ln\left(\frac{M}{M - \alpha t}\right) - gt\,. \tag{2.6}$$

donde $\beta$ es una constante igual a 680 m/s, $\alpha$ es la razón de consumo de combustible e igual a *M/60* kg/s, *M* la masa inicial del sistema avión - combustible y *g* es la aceleración de la gravedad considerada constante e igual a 9.81 m/s$^2$

*Solución:*

Podemos escribir la función que describe la velocidad del avión como sigue:

$$f(t) = 680 \ln\left(\frac{60}{60 - t}\right) - 9.8t - 11.2$$

Primero tabulamos la función:

| ***t(seg.)*** | ***f(t)*** |
|---|---|
| 0 | -11.2 |
| 1 | -9.5812 |
| 2 | -7.7670 |
| 3 | -5.7506 |
| 4 | -3.5248 |
| 5 | -1.0823 |
| 6 | 1.5852 |
| 7 | 4.4858 |
| 8 | 7.6286 |
| 9 | 11.0229 |
| 10 | 14.6786 |
| 11 | 18.6065 |
| 12 | 22.8176 |

Observamos un cambio de signo entre $t$ = 5 y $t$ = 6, consideramos los siguientes cuatro puntos para construir un polinomio interpolante de tercer grado.

| ***n*** | ***X*** | ***y*** |
|---|---|---|
| 0 | -3.5248 | 4 |
| 1 | -1.0823 | 5 |
| 2 | 1.5852 | 6 |
| 3 | 4.4858 | 7 |

Como los valores de x no son igualmente espaciados utilizaremos el polinomio interpolante de Lagrange:

$$y(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}\,y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_i-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}\,y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}\,y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}\,y_3$$

Sustituyendo y tomando $x = 0$, tenemos:

$$y(0) = \frac{(0+1.0823)(0-1.5852)(0-4.4858)}{(-3.5248+1.0823)(-3.5248-1.5852)(-3.5248-4.4858)}\,4 + \frac{(0+3.5248)(0-1.5852)(0-4.4858)}{(-1.0823+3.5248)(-1.0823-1.5852)(-1.0823-4.4858)}\,5 + \frac{(0+3.5248)(0+1.0823)(0-4.4858)}{(1.5852+3.5248)(1.5852+1.0823)(1.5852-4.4858)}\,6 + \frac{(0+3.5248)(0+1.0823)(0-1.5852)}{(4.4858+3.5248)(4.4858+1.0823)(4.4858-1.5852)}\,7$$

y evaluando tenemos:

$$y(0) = 5.4163$$

## Ventajas y desventajas.

El polinomio interpolante de Lagrange toca exactamente todos los puntos que lo general.

No se puede estimar el error, a menos que se conozca la forma analítica de la función.

Un polinomio de mayor grado no garantiza un menor error.

**Conclusión:**

El polinomio interpolante de Lagrange es una herramienta muy poderosa, ya que además de la interpolación permite resolver ecuaciones trascendentes y hacer extrapolación en vecindades pequeñas a los extremos del intervalo que lo genera.

Se puede aplicar en varias dimensiones.

Es la base para los métodos de derivación e integración numéricas.

# DERIVACIÓN NUMÉRICA

Existe una infinidad de funciones que se obtienen experimentalmente, es decir en forma tabular, sin conocer sus expresiones analíticas, y en tales situaciones resulta con mucha frecuencia que los intervalos de las observaciones no son constantes y se requiere conocer sus derivadas, ya sea en algún punto del inérvalo de trabajo, o bien, en alguno de los puntos experimentales.

Una función se representa en forma aproximada por un polinomio de Lagrange, de la misma manera que se realizó en el tema de interpolación. Posteriormente el polinomio se deriva analíticamente y finalmente en la expresión resultante se sustituye el valor en el cual se quiere aproximar la derivada de la función.

Recordemos el polinomio interpolante de Lagrange

$$y = \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} y_i \pm \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Pero podemos trabajar primero con el polinomio y posteriormente el error.

$$y = \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} y_i$$

Como vimos en el tema de interpolación, al construir un polinomio de Lagrange, su grado depende de la cantidad de puntos tomados:

- dos puntos diferentes, **un polinomio lineal**;
- tres puntos diferentes, **un polinomio cuadrático**; etc.

Por consiguiente, si queremos aproximar una derivada de primer orden, necesitaremos un polinomio que sea de grado mínimo dos (es decir, se requerirán tres puntos diferentes); para la derivada de segundo orden, un polinomio que sea de grado mínimo tres (es decir, cuatro puntos diferentes), etc. Para el caso de la derivada de primer orden, sus resultados se obtienen como se muestra en los párrafos siguientes.

Para las derivadas de mayor orden con incrementos diferentes, se procede de forma similar.

El polinomio inerpolante de Lagrange está dado por:

$$y = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\,y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\,y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\,y_2$$

Derivando:

$$y'(x) \approx \frac{2x-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\,y_0 + \frac{2x-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\,y_1 + \frac{2x-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\,y_2$$

Ahora sustituimos el valor de $x_i \in (x_0, x_2)$ para encontrar $y'(x_i)$

El error de la derivada es la derivada del error de Lagrange. Así que tenemos que derivar la siguiente expresión:

$$\varepsilon(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$

Pero para grado dos está dada por:

$$\varepsilon(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)$$

Derivando:

$$\frac{d\varepsilon(x)}{dx} = \frac{f'''(\xi)}{3!}\left[(x-x_0)(x-x_1)+(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_1)(x-x_2)\right]$$

La derivada completa, incluyendo su error será:

$$y'(x) \approx \frac{2x-x_1-x_2}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}\,y_0 + \frac{2x-x_0-x_2}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}\,y_1 + \frac{2x-x_0-x_1}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}\,y_2 \pm \left|\frac{f'''(\xi)}{3!}\left[(x-x_0)(x-x_1)+(x-x_0)(x-x_2)+(x-x_1)(x-x_2)\right]\right|$$

Puede darse el caso de que los tres puntos sean equidistantes y necesitemos conocer la derivada en alguno de los conocidos de la función.

Iniciemos con el cálculo de $y'(x_0)$, con puntos equidistantes, es decir que podemos escribir a:

$$x_1 = x_0 + h$$
$$x_2 = x_0 + 2h$$

Sustituyendo

$$y'(x_0) \approx \frac{2x_0 - (x_0 + h) - (x_0 + 2h)}{(-h)(-2h)} y_0 + \frac{2x_0 - x_0 - (x_0 + 2h)}{(h)(-h)} y_1 + \frac{2x_0 - x_0 - (x_0 + h)}{(2h)(h_1)} y_2$$

Reduciendo:

$$y'(x_0) \approx \frac{-3h}{2h^2} y_0 + \frac{2h}{h^2} y_1 + \frac{-h}{2h^2} y_2$$

Simplificando:

$$y'(x_0) \approx \frac{1}{2h}\left(-3y_0 + 4y_1 - y_2\right)$$

Ahora el error:

$$\varepsilon(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Para un polinomio de grado 2, el error está dado por:

$$\varepsilon(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Derivando el error:

$$\frac{d\varepsilon(x)}{dx} = \frac{f'''(\xi)}{3!}\left[(x - x_0)(x - x_1) + (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_1)(x - x_2)\right]$$

Sustituyendo y simplificando, tenemos:

$$\left.\frac{\varepsilon(x)}{dx}\right|_{x=x_0} = \frac{f'''(\xi)}{3!}\left[(-h)(-2h)\right] = \frac{f'''(\xi)}{3}\left(h^2\right)$$

La derivada con su error en $x = x_0$ es:

$$y'(x_0) \approx \frac{1}{2h}\left(-3y_0 + 4y_1 - y_2\right) \pm \left|\frac{f'''(\xi)}{3} h^2\right|$$

Ahora **calculamos *y'(x₁)*,** con puntos equidistantes, es decir que podemos escribir a:

$$x_0 = x_1 - h$$
$$x_2 = x_1 + h$$

Sustituyendo y

$$y'(x_1) \approx \frac{2x_1 - x_1 - (x_1 + h)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{2x_1 - (x_1 - h) - (x_1 + h)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{2x_1 - (x_1 - h) - x_1}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

Reduciendo:

$$y'(x_1) \approx \frac{-h}{2h^2} y_0 + \frac{h}{2h^2} y_2$$

Simplificando:

$$y'(x_1) \approx \frac{1}{2h}(-y_0 + y_2)$$

Ahora el error:

$$\varepsilon(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{i=0}^{n} (x - x_i)$$

Para grado 2 es:

$$\varepsilon(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Derivando:

$$\frac{d\varepsilon(x)}{dx} = \frac{f'''(\xi)}{3!}\left[(x - x_0)(x - x_1) + (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_1)(x - x_2)\right]$$

Reduciendo:

$$\left.\frac{\varepsilon(x)}{dx}\right|_{x=x_1} = \frac{f'''(\xi)}{3!}\left[(h)(-h)\right] = -\frac{f'''(\xi)}{6}\left(h^2\right)$$

La derivada con su error en $x = x_1$ es:

$$y'(x_1) \approx \frac{1}{2h}\left(-y_0 + y_2\right) \pm \left| \frac{f'''(\xi)}{6} h^2 \right|$$

Ahora **calculamos $y'(x_2)$,** con puntos equidistantes, es decir que podemos escribir a:

$$x_0 = x_2 - 2h$$
$$x_1 = x_2 - h$$

Sustituyendo:

$$y'(x_2) \approx \frac{2x_2 - (x_2 - h) - x_2}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{2x_2 - (x_2 - 2h) - x_2}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{2x_2 - (x_2 - 2h) - (x_2 - h)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2$$

Reduciendo:

$$y'(x_2) \approx \frac{h}{2h^2} y_0 + \frac{2h}{-h^2} y_1 + \frac{3h}{2h^2} y_2$$

Simplificando:

$$y'(x_2) \approx \frac{1}{2h}\left(y_0 - 4y_1 + 3y_2\right)$$

Ahora el error para un polinomio de grado 2 es:

$$\varepsilon(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

Derivando

$$\frac{d\varepsilon(x)}{dx} = \frac{f'''(\xi)}{3!}\left[(x - x_0)(x - x_1) + (x - x_0)(x - x_2) + (x - x_1)(x - x_2)\right]$$

Evaluando en $x = x_2$:

$$\left.\frac{\varepsilon(x)}{dx}\right|_{x=x_2} = \frac{f'''(\xi)}{3!}\left[(2h)(h)\right] = \frac{f'''(\xi)}{3}\left(h^2\right)$$

La derivada con su error en $x = x_2$ es:

$$y'(x_2) \approx \frac{1}{2h}\left(y_0 - 4y_1 + 3y_2\right) \pm \left|\frac{f'''(\xi)}{3}h^2\right|$$

Nota que la derivada en $x_1$ tiene la mitad del erro que en $x_0$ y en $x_2$.

## EJEMPLO

Veamos la función $y(x) = 0.15x^2 e^{1.13x}$, aproximar el valor de su derivada en el punto $x_i = 1.25$, considerando los valores próximos a este como $x_0 = 1.10$, $x_1 = 1.20$ y $x_2 = 1.30$ Calcular el error absoluto, si consideramos que $y'(1.25) = 2.627331556\ldots$.

*Solución:*

Generalmente este método se emplea cuando se tiene la función en su forma tabular, nosotros la ejemplificaremos empleando la forma analítica de la función, pero los puntos no son equidistantes

$$y'(1.25) \approx y(1.10)\frac{2\times 1.25 - 1.20 - 1.30}{(1.10-1.20)(1.10-1.30)} + y(1.20)\frac{2\times 1.25 - 1.10 - 1.30}{(1.20-1.10)(1.20-1.30)} +$$
$$+ y(1.30)\frac{2\times 1.25 - 1.10 - 1.20}{(1.30-1.10)(1.30-1.20)} = 2.63211$$

Como conocemos el valor real el error será

$$\varepsilon = \left|2.62733 - 2.63211\right| = 0.00478 = 4.78\times 10^{-3}$$

## EJEMPLO

La siguiente tabla muestra la velocidad de un ciclista en diferentes tiempos, medidos mediante un radar láser:

| t | (hora) | 0.0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 | 3.5 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| velocidad | (km/h) | 0.00 | 23.48 | 18.25 | 15.23 | 19.25 | 25.00 | 28.00 | 33.00 |

Calcular la aceleración a t = 3.5.

*Solución:*

Como 3.5 es el último valor de la tabla, los datos son equidistantes, usaremos la expresión para la derivada en $x = x_2$, con $h = 0.5$.

| n | | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|
| t | (hora) | 2.5 | 3.0 | 3.5 |
| velocidad | (km/h) | 25.00 | 28.00 | 33.00 |

Es decir:

$$a'(x_2) \approx a'(3.5) \approx \frac{1}{2(0.5)}\left(25.00 - 4(28.00) + 3(33.00)\right) = 12 km/h^2$$

Como no tenemos la forma analítica de la función no podemos estimar el error.

# EJEMPLO

Un automóvil frena al llegar a un crucero. En la siguiente tabla se muestran, los valores de velocidad para diferentes tiempos. Calcula la aceleración para los instantes t = 6 seg. y t = 12 seg.

| ***n*** | ***n*** | ***t (seg.)*** | ***v (m/s)*** |
|---|---|---|---|
| | 0 | 3 | 4.96 |
| 0 | 1 | 6 | 3.19 |
| 1 | 2 | 9 | 2.45 |
| 2 | | 12 | 1.63 |

Para poder usar las expresiones de derivación para grado dos, debemos descomponer el ejercicio en dos partes, primero calculamos la aceleración para $t$ = 6, asignando valores para $x_n$ como se muestra en la tabla, sabemos que la expresión para la derivada en $x = x_1$ tiene menor error, entonces:

$$a'(x_1) \approx a'(6) \approx \frac{1}{2(3)}(-4.96 + 2.45) = -0.418 m/s^2$$

Ahora calculamos la aceleración para $t$ = 12:

12 es el último valor de la tabla, la única expresión posible de usar es la de $x = x_2$

$$a'(x_2) \approx y'(12) \approx \frac{1}{2(3)}(3.19 - 4(2.45) + 3(1.63)) = -0.287 m/s^2$$

# Integración Numérica por el método de trapecio

En ciencias e ingeniería se presentan con frecuencia integrales cuya solución analítica es difícil de encontrar o no existe. En estos casos podemos hacer uso de los métodos numéricos. Los métodos numéricos permiten realizar la integración de funciones expresadas en forma analítica o tabular.

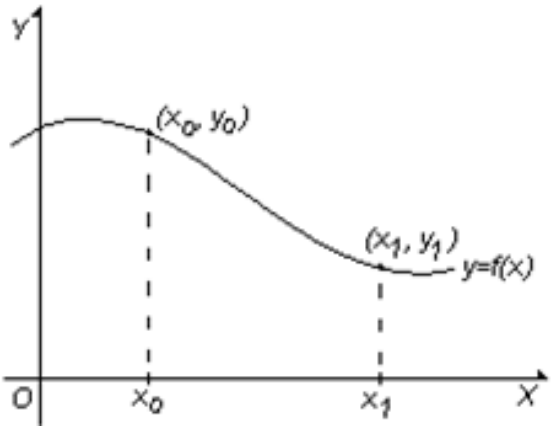
Ahora estudiaremos los métodos de integración, empezando por el método del **trapecio o trapezoide,** que se obtiene a partir de los polinomios de Lagrange.

# Método del Trapecio.

Consideremos la siguiente integral definida:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \, .$$

Representada en la siguiente figura:




Sabemos que:

$$f(x) = P_n(x) + \varepsilon(x) \, .$$

Donde $P_n(x)$ es el polinomio interpolente de Lagrange de grado $n$ y $\varepsilon(x)$ es el término de error

Construyamos ahora el polinomio interpolante de primer grado de Lagrange que pasa por los puntos $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$:

$$P(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1$$

por lo tanto:

$$f(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 + \varepsilon(x) \, .$$

Sabemos que:

$$\varepsilon(x) = \frac{f''(\varepsilon)}{2!}(x - x_0)(x - x_1); \qquad \varepsilon \in [x_0, x_1]$$

Entonces:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 + \varepsilon(x) \right) dx$$

Consideremos únicamente los términos correspondientes al polinomio interpolante de Lagrange:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \right) dx$$

o bien:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} y_0 \right) dx + \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} y_1 \right) dx$$

e igual a:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{y_0}{x_0 - x_1} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_1)dx + \frac{y_1}{x_1 - x_0} \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)dx$$

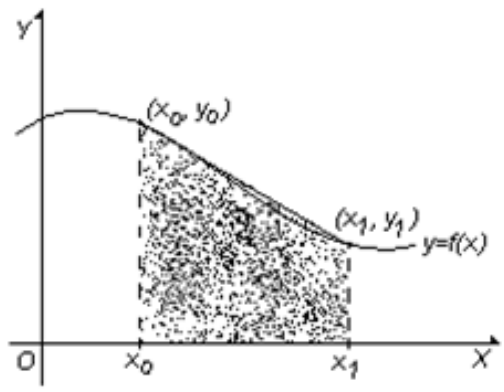
Integrando y evaluando el lado derecho de la ecuaciónanterior tenemos:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx -\frac{y_0(x_0 - x_1)}{2} + \frac{y_1(x_1 - x_0)}{2}$$

agrupando

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx (x_1 - x_0)\frac{y_0 + y_1}{2}$$

El lado derecho de la igualdad es igual al área del trapezoide que se muestra en sa siguiente figura:



Para determinar el error en esta integral debemos integrar el término de error del polinomio interpolante de Lagrange, es decir:

$$E = \int_{x_0}^{x_n} \varepsilon(x)dx$$

donde E es el error en la integral, de forma que:

$$E = \int_{x_0}^{x_1} \frac{f''(\xi)}{2!}(x - x_0)(x - x_1)dx$$

integrando por partes, esto es:

$$E = \frac{f''(\xi)}{2}\int_{x_0}^{x_1}(x - x_0)(x - x_1)dx = \frac{f''(\xi)}{2}\left(\left.\frac{(x - x_0)(x - x_1)}{2}\right|_{x_2}^{x_1} - \left.\frac{(x - x_1)^3}{6}\right|_{x_2}^{x_1}\right)$$

evaluando y haciendo $h = (x_1 - x_0)$, tenemos:

$$E = \left| -\frac{h^3 f''(\xi)}{12} \right|$$

Por lo tanto, el valor de la integral es:

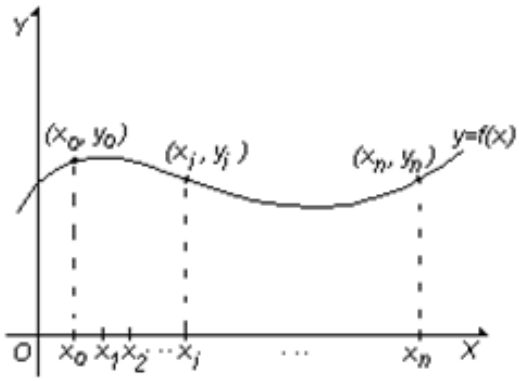
$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx = h\frac{y_1 + y_0}{2} \pm \left| \frac{h^3 f''(x)}{12} \right|$$

Esta es la expresión del método del trapecio para un solo intervalo. Veamos ahora que sucede cuando el intervalo de integración esta dividido en varios subintervalos.

Si ahora consideramos la integral:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \,.$$

Donde el intervalo $[x_o, x_n]$ se divide en varios subintervalos como se muestra en la figura siguiente:




$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx = \sum_{i=0}^{i=n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)dx$$

o bien,

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{i=n-1} (x_{i+1} - x_i)\frac{y_{i+1} + y_i}{2}$$

Y el error de la integral es la suma de los errores debidos a cada intervalo, es decir:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{i=n-1} (x_{i+1} - x_i)\frac{y_{i+1} + y_i}{2} \pm \left| \sum_{i=0}^{i=n-1} (x_{i+1} - x_i)^3 \frac{f''(\xi)}{12} \right|$$

Esta es la expresión más general del método del trapecio. Si no se cuenta con la forma analítica de *f(x)* y sólo se tiene una tabla de valores de ella.

## Ejemplo

Calcula la integral de la siguiente función tabular:

| **x** | **y** |
|---|---|
| 0 | 0.7 |
| 0.2 | 0.74 |
| 0.3 | 0.79 |
| 0.6 | 1.06 |
| 0.7 | 1.19 |
| 0.9 | 1.51 |
| 1 | 1.7 |

*Solución:*

Como los puntos no son equidistantes, usaremos la expresión:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{i=n-1} (x_{i+1} - x_i)\frac{y_{i+1} + y_i}{2}$$

Como no conocemos la forma analítica de la función no calcularemos el error.

Para $i = 0$, tenemos:

$$(x_1 - x_0)\frac{y_1 + y_0}{2} = (0.2 - 0)\frac{(0.74 + 0.7)}{2} = 0.144$$

Para $i = 1$, tenemos:

$$(x_2 - x_1)\frac{y_1 + y_0}{2} = (0.3 - 0.2)\frac{(0.79 + 0.74)}{2} = 0.0765$$

Construyamos la siguiente tabla:

| ***x*** | ***y*** | |
|---|---|---|
| 0 | 0.7 | |
| 0.2 | 0.74 | 0.1440 |
| 0.3 | 0.79 | 0.0765 |
| 0.6 | 1.06 | 0.2775 |
| 0.7 | 1.19 | 0.1125 |
| 0.9 | 1.51 | 0.2700 |
| 1 | 1.7 | 0.1605 |

Sumando la columna de la derecha, tenemos:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \left(0.1440 + 0.0765 + 0.2775 + .1125 + 0.2700 + 0.1605\right) = 1.041$$

Si además los puntos son equidistantes, podemos definir $h = x_{i+1} - x_i$, con lo que la expresión se convierte en:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{i=n-1} h\frac{y_{i+1} + y_i}{2}$$

o bien

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + \frac{y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

En este caso no es posible evaluar el error ya que desconocemos el valor de la segunda derivada.

## Ejemplo

Calcula la integral de la siguiente función tabular:

| ***x*** | ***y*** |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 4 |
| 2 | 9 |
| 3 | 16 |
| 4 | 25 |
| 5 | 36 |
| 6 | 49 |
| 7 | 64 |
| 8 | 81 |
| 9 | 100 |
| 10 | 121 |

*Solución:*

Como los puntos son equidistantes, Calculamos el valor de $h = 1$, usaremos la expresión:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + \frac{y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

Sustituyendo

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{1}{2}\left(1 + 121 + 2\left(1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + 121\right)\right) = 444.5$$

**Si conocemos la expresión analítica de *f(x),*** el método del trapecio puede ser aplicado como sigue:

$$\int_a^b f(x)dx =$$

Seleccionamos el valor de $h = (b-a)/n$, de manera que los puntos sean equidistantes.

Tabulamos la función en pasos de $h$, aplicamos el método como en el ejemplo anterior.

## Ejemplo

Calcula la integral de la siguiente:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx =$$

*Solución:*

Sea $h = (2 - 1)/10 = 0.1$, construimos la siguiente tabla:

| ***n*** | ***x*** | ***y = 1/x*** |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1.1 | 0.90909091 |
| 2 | 1.2 | 0.83333333 |
| 3 | 1.3 | 0.76923077 |
| 4 | 1.4 | 0.71428571 |
| 5 | 1.5 | 0.66666667 |
| 6 | 1.6 | 0.625 |
| 7 | 1.7 | 0.58823529 |
| 8 | 1.8 | 0.55555556 |
| 9 | 1.9 | 0.52631579 |
| 10 | 2 | 0.5 |

Aplicamos la expresión:

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + \frac{y_n}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} y_i\right) = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_i\right)$$

Podemos construir la tabla siguiente:

| ***n*** | ***x*** | ***y=1/x*** | Factor | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | × 1 | 1 |
| 1 | 1.1 | 0.9091 | × 2 | 1.8182 |
| 2 | 1.2 | 0.8333 | × 2 | 1.6666 |
| 3 | 1.3 | 0.7692 | × 2 | 1.5384 |
| 4 | 1.4 | 0.7143 | × 2 | 1.4286 |
| 5 | 1.5 | 0.6667 | × 2 | 1.3334 |
| 6 | 1.6 | 0.625 | × 2 | 1.25 |
| 7 | 1.7 | 0.5882 | × 2 | 1.1764 |
| 8 | 1.8 | 0.5556 | × 2 | 1.1112 |
| 9 | 1.9 | 0.5263 | × 2 | 1.0526 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 10 | 2 | 0.5 | × 1 | 0.5 |
| | | | Suma= | 13.8754 |

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{0.1}{2}\left(12.8754\right) = 0.6938$$

Ahora calculemos el error de la integral, para cada trapecio esta dado por:

$$E = \left|\frac{h^3 f''(\xi)}{12}\right|$$

Se construyeron 10 trapecios, por lo que el error de la integral será:

$$E = 10\left|\frac{h^3}{12} f''(\xi)\right| = 10\left|\frac{0.1^3}{12}\frac{2}{\xi^3}\right| = 10\left|\frac{0.1^3}{12}\frac{2}{1^3}\right| = 0.0017$$

Recordemos que $\xi \in (1, 2)$, y es tal que $f''(\xi)$ debe ser máxima, entonces $\xi = 1$.

Por lo tanto:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = 0.6938 \pm 0.017$$

Del curso previo de cálculo integral sabemos que:

$$\int_1^2 \frac{1}{x}dx = Ln(2) = 0.6931$$

Valor que se encuentra en el intervalo hallado numéricamente.

El método de Trapecio puede aplicarse de manera iterativa, para ello consideremos solamente los extremos del intervalo de integración, y haciendo h = $x_1 - x_0$, el valor de la integral es:

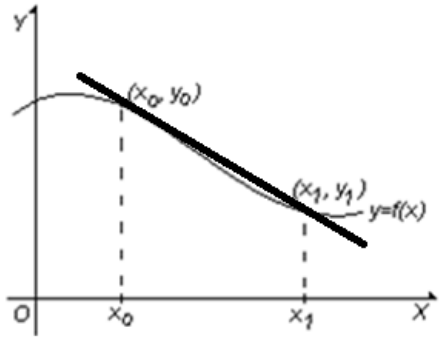
$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx h\frac{f(x_0+h)+f(x_0)}{2} = \frac{h}{2}\Big(f(x_0+h)+f(x_0)\Big)$$

Consideremos a este resultado como una primera aproximación del valor de la integral y le llamaremos $I_1$.

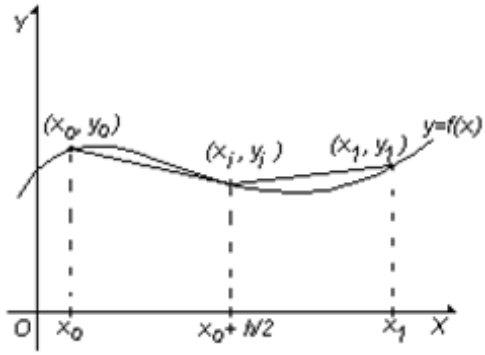
Así

$$I_1 = \frac{h}{2}\Big(f(x_0+h)+f(x_0)\Big)$$

que corresponde al área del trapecio, en la figura siguiente:




si ahora dividimos el intervalo de integraciónen dos subintervalos, ($x_0$, $x_0 + h/2$) y ($x_0 + h/2$, $x_1$); por lo que la integral será aproximadamente igual a la suma de las áreas de los dos trapecios mostrados en la siguiente figura.




Esto es:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{4}\left( f(x_0+h) + f(x_0+\frac{h}{2}) \right) + \frac{h}{4}\left( f(x_0+\frac{h}{2}) + f(x_0) \right)$$

O bien:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{4}\left( f(x_0+h) + 2f(x_0+\frac{h}{2}) + f(x_0) \right)$$

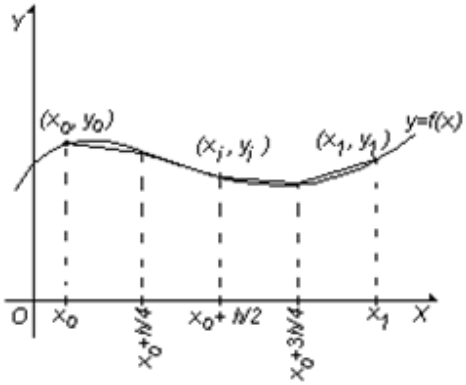
A este resultado lo denominamos $I_2$ y es una segunda aproximación al valor de la integral. Así

$$I_2 = \frac{h}{4}\left( f(x_0+h) + 2f(x_0+\frac{h}{2}) + f(x_0) \right) = \frac{1}{2}\left( \frac{h}{2}\left( f(x_0+h) + f(x_0) \right) + hf(x_0+\frac{h}{2}) \right)$$

O bien:

$$I_2 = \frac{1}{2}\left( I_1 + hf(x_0+\frac{h}{2}) \right)$$

Si ahora dividimos nuevamente los subintervalos, obtenemos la siguiente gráfica:




Así el valor de la integral esta dado por:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{h}{8}\left( f(x_0+h) + 2f(x_0+\frac{h}{4}) + 2f(x_0+\frac{h}{2}) + 2f(x_0+\frac{3h}{4}) + f(x_0) \right)$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx \frac{1}{2}\left[ \frac{h}{4}\left( f(x_0+h) + 2f(x_0+\frac{h}{2}) + f(x_0) + 2f(x_0+\frac{h}{4}) + 2f(x_0+\frac{3h}{4}) \right) \right]$$

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx I_3 = \frac{1}{2}\left[ I_2 + \frac{h}{2}\left( f(x_0+\frac{h}{4}) + f(x_0+\frac{3h}{4}) \right) \right]$$

Si subdividimos nuevamente el intervalo de integración, el valor de la integral será aproximado por:

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx \approx I_4 = \frac{1}{2}\left[ I_3 + \frac{h}{4}\left( f(x_0 + \frac{h}{8}) + f(x_0 + \frac{3h}{8}) + f(x_0 + \frac{5h}{8}) + f(x_0 + \frac{7h}{8}) \right)\right]$$

Ahora podemos establecer una fórmula de recurrencia:

$$I_{k+1} = \frac{1}{2}\left[ I_k + \frac{h}{2^{k-1}} \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} f(x_0 + \frac{(2i+1)h}{2^k}) \right]$$

Como en todos los métodos numéricos, podemos estimar el error al evaluar la integral usando la expresión:

$$|I_{k+1} - I_k| \leq \varepsilon$$

De esta manera podemos iterar hasta hallar el valor de la integral con un error determinado previamente.

## Ejemplo

Calcula la integral de la siguiente:

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx =$$

*Solución:*

Sea $h = (2 - 1)$

Calculando la primera iteración:

$$I_1 = \frac{h}{2}\left(f(x_0 + h) + f(x_0)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1}\right) = 0.7500$$

La segunda iteración es:

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(I_1 + hf(x_0 + \frac{h}{2})\right) = \frac{1}{2}\left(0.7500 + 1\left(\frac{2}{3}\right)\right) = 0.7083$$

El error es:

$$|0.7083 - 0.7500| = 0.4167$$

Ahora podemos tabular las iteraciones:

| ***n*** | ***I*** | ***e*** |
|---|---|---|
| 1 | 0.75 | |
| 2 | 0.7083 | 0.0417 |
| 3 | 0.697 | 0.0113 |
| 4 | 0.6941 | 0.0029 |
| 5 | 0.6934 | 0.0007 |
| 6 | 0.6932 | 0.0002 |
| 7 | 0.6932 | $< 10^{-4}$ |

$$\int_1^2 \frac{1}{x} dx = 0.6932 \pm 0.0001$$

## Conclusión:

El método de trapecio es un método muy versátil, es posible aplicarlo a conjunto de puntos, a funciones analíticas tanto en forma tabular como iterativo.

No importa el número de puntos en el intervalo de integración.

Es aplicable a puntos equidistantes y no equidistantes.

# Regla de Simpson 1/3.

El método de integración de Simpson, parte de aproximar a una función por el polinomio interpolante de Lagrange, de grado dos. Ahora deduciremos las expresiones para este método de integración, para ello escribimos el polinomio de interpolante de Lagrange que pasa por tres puntos de una función *f*(x), cuyas abscisas son equidistantes ($x_0$, $y_0$), ($x_1$, $y_1$), ($x_2$, $y_2$), como se muestra en la siguiente figura.

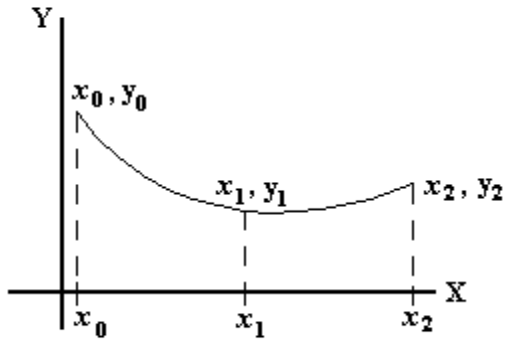



*Figura 1. Regla de Simpson aplicada a tres puntos.*

Sabemos que:

$$f(x) = P_2(x) + \varepsilon(x) \tag{1}$$

Donde $P_2(x)$ es el polinomio interpolante de Lagrange que pasa por los tres puntos, sabemos que el polinomio esta dado por:

$$P_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} y_0 + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} y_1 + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} y_2 \tag{2}$$

donde $y_i = f(x_i)$ y $\varepsilon(x)$ es el error entre la función y el polinomio interpolante:

$$\varepsilon(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \tag{3}$$

donde $\xi \in [x_0, x_2]$.

Ahora calculemos la integral:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_2} (P_2(x) + \varepsilon(x))dx \tag{4}$$

La integral del lado derecho podemos resolverla como dos integrales independientes, por lo que empezaremos con:

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx \tag{5}$$

E igual a

$$\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 dx + \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} y_1 dx + \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} y_2 dx \tag{6}$$

Pero recordemos que los puntos son equidistantes, es decir $x_2 - x_1 = x_1 - x_0$ igualando esta diferencia a $h$, la primera integral en (6) se reduce a:

$$\int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} y_0 dx = \int_{x_0}^{x_2} \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(-h)(-2h)} y_0 dx = \frac{y_0}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)(x-x_2)dx \tag{7}$$

Resolviendo por partes:

$$\frac{y_0}{2h^2} \int_{x_0}^{x_2} (x-x_1)(x-x_2)dx \tag{8}$$

sea $\quad u = (x - x_1)$ y $dv = (x - x_2)\, dx$

entonces $du = dx$ y $v = \frac{(x-x_2)^2}{2}$

tenemos:

$$\frac{y_0}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx = \frac{y_0}{2h^2}\left[\left.\frac{(x-x_1)(x-x_2)^2}{2}\right|_{x_0}^{x_2} - \int_{x_0}^{x_2}\frac{(x-x_2)^2}{2}dx\right] \tag{9}$$

o bien:

$$\frac{y_0}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx = \frac{y_0}{2h^2}\left[\left.\frac{(x-x_1)(x-x_2)^2}{2}\right|_{x_0}^{x_2} - \left.\frac{(x-x_2)^3}{6}\right|_{x_0}^{x_2}\right] \tag{10}$$

evaluando en los límites de integración:

$$\frac{y_0}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx = \frac{y_0}{2h^2}\left[\left.\frac{(x-x_1)(x-x_2)^2}{2}\right|_{x_0}^{x_2} - \int_{x_0}^{x_2}\frac{(x-x_2)^2}{2}dx\right]$$

$$-\frac{y_0}{2h^2}\left[\left(\frac{(x_0-x_1)(x_0-x_2)^2}{2} - \frac{(x_0-x_2)^3}{6}\right)\right] \tag{11}$$

Como $x_2$ - $x_1$ = $x_1$ - $x_0$ = $h$, la integral se reduce a:

$$\frac{y_0}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx = \frac{y_0}{2h^2}\left[\left(0-\frac{(-h)(-2h)^2}{2}\right)-\left(0-\frac{(-2h)^3}{6}\right)\right] \tag{12}$$

Simplificando:

$$\frac{y_0}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx=\frac{y_0}{2h^2}\left[2h^3-\frac{8h^3}{6}\right]= \tag{13}$$

reduciendo:

$$\frac{y_0}{2h^2}\int_{x_0}^{x_2}(x-x_1)(x-x_2)dx=\frac{y_0 h}{3} \tag{14}$$

Ahora resolvemos de igual manera la segunda integral de la ecuación (6)

$$\int_{x_0}^{x_2}\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}y_1 dx=\frac{y_1}{-h^2}\left[\frac{-4h^3}{3}\right]=\frac{4hy_1}{3} \tag{15}$$

Y finalmente la tercera integral en (6) es:

$$\int_{x_0}^{x_2}\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}y_2 dx=\frac{y_2}{2h^2}\left(\frac{2h^3}{3}\right)=\frac{y_2}{3} \tag{16}$$

Sumando (14), (15) y (16) tenemos:

$$\int_{x_0}^{x_2}P_2(x)dx=\frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2\right) \tag{14}$$

por lo tanto

$$\int_{x_0}^{x_2}f(x)dx=\frac{h}{3}\left(y_0+4y_1+y_2\right)+E(x) \tag{15}$$

donde *E(x)* es el error al integrar numéricamente.

Si ahora consideramos cinco puntos de la misma función equidistantes ($x_0$, $y_0$), ($x_1$, $y_1$), ($x_2$, $y_2$), equidistantes ($x_3$, $y_3$), ($x_4$, $y_4$), cuyas ordenadas equidistan, como se muestra en la figura 2.

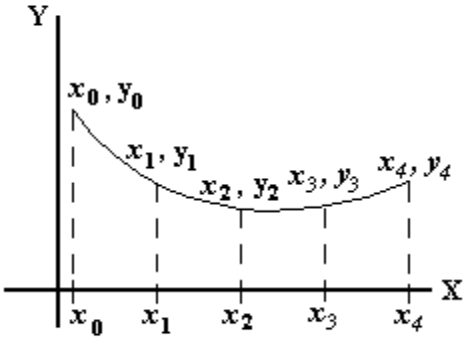



*Figura 2. Regla de Simpson aplicada a 5 puntos.*

Ahora calculamos la integral desde $x_0$ hasta $x_4$, para ello utilizamos la expresión (14) pero la aplicamos primero de $x_0$ a $x_2$ y después desde $x_2$ hasta $x_5$.

$$\int_{x_0}^{x_5} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2\right) + \frac{h}{3}\left(y_2 + 4y_3 + y_4\right) \tag{16}$$

el signo ≈ es usado por que aun no consideramos el valor del error. Como las cinco abscisas son equidistantes $h$ es la misma para cada término del lado derecho, podemos agrupar de la siguiente forma.

$$\int_{x_0}^{x_5} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4\right) = \frac{h}{3}\left(y_0 + 4(y_1 + y_3) + 2y_2 + y_4\right) \tag{17}$$

Ahora podemos aplicar repetidas veces la expresión (14) para obtener la integral de una función, siempre que el número de puntos sea impar, notemos que los extremos se suman una sola vez, mientras que las ordenadas con índice par se suman dos veces y las ordenadas

de índice impar se suman cuatro veces, así que para $2n + 1$ puntos el valor de la integral se obtiene como sigue:

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)dx \approx \frac{h}{3}\left( y_0 + 4\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i} + y_{2n} \right) \tag{18}$$

## Análisis de error para la regla de Simpson 1/3.

A primera vista podemos pensar que el error en la integral por el método de Simpson es simplemente la integral del error del polinomio de Lagrange.

$$E(x) = \int_{x_0}^{x_2} \varepsilon(x)dx \tag{19}$$

Pero esta integral se anula, dando una estimación incorrecta del error en la integral. Para estimar el error cometido al integrar numéricamente desarrollemos en serie de Taylor $f(x_0)$ al rededor de $x_1$:

$$f(x_0) = f(x_1) + f'(x_1)(x_0 - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x_0 - x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{3!}(x_0 - x_1)^3 + \frac{f^{iv}(x_1)}{4!}(x_0 - x_1)^4 + \ldots \tag{20}$$

También desarrollemos en serie de Taylor $f(x_2)$ al rededor de $x_1$:

$$f(x_2) = f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1) + \frac{f''(x_1)}{2!}(x_2 - x_1)^2 + \frac{f'''(x_1)}{3!}(x_2 - x_1)^3 + \frac{f^{iv}(x_1)}{4!}(x_2 - x_1)^4 + \ldots \tag{21}$$

o bien.

$$f(x_0) = y_0 = y_1 - y_1'h + \frac{y_1''}{2!}h^2 - \frac{y_1'''}{3!}h^3 + \frac{y_1^{iv}}{4!}h^4 + \ldots \tag{22}$$

y

$$f(x_2) = y_2 = y_1 + y_1'h + \frac{y_1''}{2!}h^2 + \frac{y_1'''}{3!}h^3 + \frac{y_1^{iv}}{4!}h^4 + \ldots \tag{23}$$

donde $y'_i = f'(x_i)$, $y''_i = f''(x_i)$, etc.

Sustituyendo (23) y (22) en (14) tenemos:

$$\int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = 2y_1h + \frac{y_1^{''}h^3}{3} + \frac{y_1^{'''}h^5}{36} \tag{24}$$

Por otro lado desarrollemos en serie de Taylor $f(x)$:

$$f(x) = y_1 + y'(x_1)(x - x_1) + \frac{y^{''}(x_1)}{2!}(x - x_1)^2 + \frac{y_1^{'''}}{3!}(x - x_1)^3 + \frac{y_1^{iv}}{4!}(x - x_1)^4 \tag{25}$$

Si ahora integramos sobre el intervalo $[x_0, x_2]$ tenemos:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx$$

$$\int_{x_0}^{x_2} \left( y_1 + y'x_1(x - x_1) + \frac{y^{''}x_1}{2!}(x - x_1)^2 + \frac{y_1^{'''}}{3!}(x - x_1)^3 + \frac{y_1^{iv}}{4!}(x - x_1)^4 \right) dx \tag{26}$$

Evaluando, agrupando y reduciendo:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx 2hy_1 + \frac{h^3y_1^{''}}{3} + \frac{h^5y_1^{iv}}{60} \tag{27}$$

Restando ahora (23) de (26):

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx - \int_{x_0}^{x_2} P_2(x)dx = E \quad \text{.....(28)}$$

o bien:

$$E = \left( 2hy_1 + \frac{h^3y_1^{''}}{3} + \frac{h^5y_1^{iv}}{60} \right) - \left( 2hy_1 + \frac{h^3y_1^{''}}{3} + \frac{h^5y_1^{iv}}{36} \right) \tag{29}$$

Simplificando:

$$E = -\frac{y_1^{iv}h^5}{90} \tag{30}$$

Si ahora aplicamos la regla de Simpson a $n + 1$ puntos, donde $n$ es un número par, tenemos $n$ intervalos, debemos aplicar $n/2$ veces la expresión 15, por lo que los errores de cada aplicación deben sumarse para obtener el error total, esto es:

$$E = -\frac{n}{2}\frac{y^{iv}(\xi)h^5}{90} \tag{31}$$

donde $\xi$ es un punto en el intervalo de integración, y $y^{iv}(\xi) = f^{iv}(\xi)$.

El error se anula si la función a integrar es un polinomio de grado menor o igual a 3.

Por otro lado, los valores de $h$ y $n$ están relacionados con el intervalo de integración. Sea $[a, b]$ el intervalo de integración, entonces podemos determinar $n$ y $h$ como sigue:

$$h = \frac{b - a}{n} \tag{32}$$

donde $n$ debe ser un número par.

Ahora despejamos $n$ de (32) y la sustituimos en (31) para el error la siguiente expresión:

$$E = -\frac{b-a}{2h}\frac{y^{iv}(\xi)h^5}{90} = -\frac{(b-a)y^{iv}(\xi)h^4}{180} \tag{33}$$

Ahora podemos escribir la ecuación (18) como sigue:

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)dx = \frac{h}{3}\left( y_0 + 4\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i} + y_{2n} \right) + E \tag{34}$$

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)dx = \frac{h}{3}\left( y_0 + 4\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i} + y_{2n} \right) - \frac{(x_{2n} - x_0)y^{iv}(\xi)h^4}{180} \tag{35}$$

Donde el intervalo de integración es $[x_0, x_{2n}]$.

Como las expresiones (22), (23), y (25) no son exactas, pues las series de Taylor son infinitas y en el desarrollo que hicimos sólo consideramos algunos términos, la expresión (35) no puede ser exacta. Pero la expresión (33) es una cota para el error cuando $\xi$ lo escogemos de tal manera que $f^{iv}(\xi)$ es máxima, entonces decimos que el valor de la integral esta dado por la siguiente ecuación:

$$\int_{x_0}^{x_{2n}} f(x)dx = \frac{h}{3}\left( y_0 + 4\sum_{i=1}^{n} y_{2i-1} + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_{2i} + y_{2n} \right) \pm \left| \frac{(x_{2n} - x_0) y^{iv}(\xi) h^4}{180} \right| \qquad (36)$$

Donde las barras indican valor absoluto.

## Ventajas y desventajas.

Se obtiene mejores resultados que con el método del trapecio.
Se aplica a funciones analíticas y tabulares.

La desventaja que presenta la regla de Simpson 1/3, es que el número total de subintervalos sobre los que se integra siempre debe ser par.

## Ejemplo.

Calcular la siguiente integral definida.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} =$$

***Solución:***

Tomemos $n$ = 10, que es un número par, entonces $h$ queda determinada por la expresión (32)

$$h = \frac{2-1}{10} = 0.1$$

Ahora tabulamos la función para construir la siguiente tabla

| $i$ | $x_i$ | $y_i$ |
|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1.1 | 0.90909091 |
| 2 | 1.2 | 0.83333333 |
| 3 | 1.3 | 0.76923077 |
| 4 | 1.4 | 0.71428571 |
| 5 | 1.5 | 0.66666667 |
| 6 | 1.6 | 0.625 |
| 7 | 1.7 | 0.58823529 |
| 8 | 1.8 | 0.55555556 |
| 9 | 1.9 | 0.52631579 |
| 10 | 2 | 0.5 |

Entonces

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{0.1}{3}\Big[1 + 4\big(0.90909091 + 0.76923077 + .06666667 + .58823529 + .52631579\big) +$$

$$2\big(0.8333333 + 0.71428571 + 0.625 + 0.555555556\big) + 0.5\Big] = 0.69315023$$

Ahora calculamos el error con la expresión (33), con $f^{iv}(x) = 24x^{-5}$, $b = 2$ y $a = 1$ y $\xi = 1$ ya que $f^{iv}(1)$ es máxima en el intervalo de integración.

$$E = \left| \frac{(2-1)24\xi^{-5}0.1^4}{180} \right| = 1.3333\text{x}10^{-5}$$

Entonces el valor de la integral es:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = 0.61315023 \pm 1.3333x10^{-5}$$

Es decir que el resultado numérico tiene un error relativo menor a 0.00002.

Sabemos que el resultado analítico de la integral es $Ln(2)$ = 0.61314718, valor que está contenido en el intervalo determinado por la regla de *Simpson 1/3*.

## Ejemplo.

En el laboratorio se midió la presión ejercida sobre un pistón al comprimir el volumen de gas contenido en su cilindro, y los valores medidos se encuentran en la siguiente tabla.

| Volumen ($cm^3$) | Presión (mmHg) |
|---|---|
| 3 | 81.6666667 |
| 2.5 | 98 |
| 2 | 122.5 |
| 1.5 | 163.333333 |
| 1 | 245 |

Hallar el trabajo realizado al comprimir el gas.

***Solución:***

Sabemos que el trabajo está dado por:

$$W = -\int_{vo}^{v} pdv$$

donde $v_0$ = 3, $v$ = 1, de la tabla se obtiene el valor de $h$ = 0.5, no conocemos la forma analítica de $p(v)$, la presión como función del volumen, pero tenemos la función en forma tabular, entonces:

$$-\int_{vo}^{v} pdv = -\frac{0.5}{3}\left[81.66667 + 4(98 + 163.333) + 2(122.5) + 245\right] = -269.5 mmHg cm^3$$

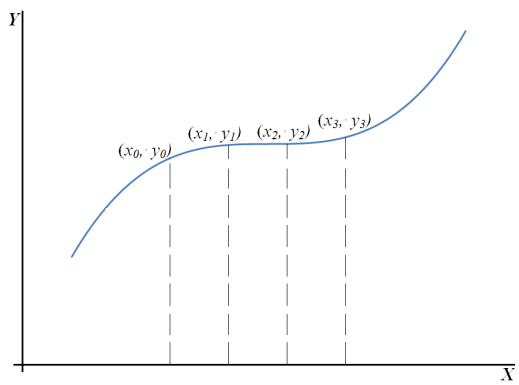
El signo negativo indica que se hace trabajo sobre el sistema. En este ejercicio no podemos estimar el error de la integral por no conocer la forma analítica de la presión como función del volumen.

## Conclusión.

El método de Simpson1/3 es muy eficiente, aplica a funciones analíticas y funciones tabulares, entrega resultados con mayor precisión que el método del trapecio, con la limitante de que el número total de puntos debe ser impar, desde $x_0$, hasta $x_{2n}$

# Regla de Simpson 3/8.

Al igual que el método del trapecio y la regla de Simpson 1/3, el método de integración de Simpson 3/8, parte de aproximar a una función por el polinomio interpolante de Lagrange, pero ahora de grado tres, es decir que se requieren cuatro puntos. Deduciremos las expresiones para este método de integración, para ello escribimos el polinomio de interpolante de Lagrange que pasa por cuatro puntos de una función *f*(x), cuyas abscisas son equidistantes $(x_0, y_0)$, $(x_1, y_1)$, $(x_2, y_2)$, $(x_3, y_3)$, como se muestra en la siguiente figura.




Sabemos que:

$$f(x) = P_3(x) + \varepsilon(x) \tag{1}$$

Donde $P_3(x)$ es el polinomio interpolante de Lagrange que pasa por cuatro puntos, sabemos que el polinomio esta dado por:

$$P_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)}y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)}y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)}y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)}y_3 \tag{2}$$

donde $y_i = f(x_i)$ y $\varepsilon(x)$ es el error entre la función y el polinomio interpolante:

$$\varepsilon(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) \tag{3}$$

donde $\xi \in [x_0, x_3]$.

Ahora calculemos la integral:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \int_{x_0}^{x_3} (P_3(x) + \varepsilon(x))dx \tag{4}$$

El lado derecho podemos repararlo en dos integrales independientes, como lo hicimos en el caso de Simpson 1/3, por lo que empezaremos con:

$$\int_{x_0}^{x_3} P_3(x)dx \tag{5}$$

E igual a

$$P_3(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} y_0 + \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} y_2 + \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3$$

$$\int_{x_0}^{x_3} P_3 dx = \int_{x_0}^{x_3} \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} y_0 dx + \int_{x_0}^{x_3} \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} y_1 dx + \int_{x_0}^{x_3} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} y_2 dx + \int_{x_0}^{x_3} \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_0)(x_3-x_1)(x_3-x_2)} y_3 dx \tag{6}$$

Pero recordemos que los puntos son equidistantes, es decir $x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = x_1 - x_0$ igualando esta diferencia a $h$, la primera integral en (6) se reduce a:

$$\int_{x_0}^{x_3} \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)} y_0 dx = \int_{x_0}^{x_3} \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)}{(-h)(-2h)(-3h)} y_0 dx = -\frac{y_0}{6h^3} \int_{x_0}^{x_3} (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)dx \qquad (7)$$

$$-\frac{y_0}{6h^3} \int_{x_0}^{x_3} (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)dx = \qquad (8)$$

sea $u = (x - x_1)$ y $dv = (x - x_2)\,(x - x_3)\,dx$

entonces $du = dx$ y $v = \int_{x_0}^{x_3} (x-x_2)(x-x_3)dx$ (8a)

Para resolver la integral 8a, tomemos $u_1 = (x - x_2)$ y $dv_1 = (x - x_3)\,dx$

entonces $du_1 = dx$ y $v_1 = \frac{(x-x_3)^2}{2}$

Entonces la integral 8a, es:

$$v = \int_{x_0}^{x_3} (x-x_2)(x-x_3)dx = \left[ \left. \frac{(x-x_2)(x-x_3)^2}{2} \right|_{x_0}^{x_3} - \int_{x_0}^{x_3} \frac{(x-x_3)^2}{2} dx \right]$$

O bien:

$$v = \int_{x_0}^{x_3} (x-x_2)(x-x_3)dx = \left[ \left. \frac{(x-x_2)(x-x_3)^2}{2} \right|_{x_0}^{x_3} - \left. \frac{(x-x_3)^3}{6} \right|_{x_0}^{x_3} \right]$$

Sustituyendo en 8, tenemos:

$$-\frac{y_0}{6h^3}\int_{x_0}^{x_3}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)dx=-\frac{y_0}{6h^3}\left[\begin{array}{l}\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)^2}{2}-\frac{(x-x_1)(x-x_3)^3}{6}-\\ \int_{x_0}^{x_3}\frac{(x-x_2)(x-x_3)^2}{2}dx+\int_{x_0}^{x_3}\frac{(x-x_3)^3}{6}dx\end{array}\right]= \qquad (9)$$

Aún nos faltan dos integrales por resolver para tener el resultado de la integral en (8), la segunda es directa, así que resolveremos la primera:

$$\int_{x_0}^{x_3}\frac{(x-x_2)(x-x_3)^2}{2}dx \qquad (8b)$$

Para resolver la integral 8b, tomemos $u_2 = (x - x_2)$ y $dv_2 = \frac{(x-x_3)^2}{2}$ $dv_2 = (x - x_3)\,dx$

entonces $du_2 = dx$ y $v_2 = \frac{(x-x_3)^3}{6}$

Entonces:

$$\int_{x_0}^{x_3}\frac{(x-x_2)(x-x_3)^2}{2}dx=\frac{(x-x_2)(x-x_3)^3}{6}-\int_{x_0}^{x_3}\frac{(x-x_3)^3}{6}dx$$

Sustituyendo estos resultados en (9), tenemos:

$$-\frac{y_0}{6h^3}\int_{x_0}^{x_3}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)dx=-\frac{y_0}{6h^3}\left[\begin{array}{l}\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)^2}{2}-\frac{(x-x_1)(x-x_3)^3}{6}-\\ \frac{(x-x_2)(x-x_3)^3}{6}+\frac{(x-x_3)^4}{24}+\frac{(x-x_3)^4}{24}\end{array}\right]=$$

$$-\frac{y_0}{6h^3}\int_{x_0}^{x_3}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)dx=-\frac{y_0}{6h^3}\left[\begin{array}{l}\frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)^2}{2}-\frac{(x-x_1)(x-x_3)^3}{6}-\\ \frac{(x-x_2)(x-x_3)^3}{6}+\frac{(x-x_3)^4}{12}\end{array}\right]_{x_0}^{x_3}=$$

Evaluando tenemos:

$$-\frac{y_0}{6h^3}\int_{x_0}^{x_3}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)dx=-\frac{y_0}{6h^3}\left[0-\left((-h)(-2h)\frac{(-3h)^2}{2}-(-h)\frac{(-3h)^3}{6}-(-2h)\frac{(-3h)^3}{6}+\frac{(3h)^4}{12}\right)\right]=$$

Reduciendo, tenemos el valor de la integral

(8): $$-\frac{y_0}{6h^3}\int_{x_0}^{x_3}(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)dx=-\frac{y_0}{6h^3}\left[-9h^4+\frac{27}{6}h^4-\frac{54}{6}h^4+\frac{81}{12}h^4\right]$$

$$=-\frac{y_0}{6h^3}\left[-\frac{27}{72}h^4\right]=-\frac{3hy_0}{8}$$

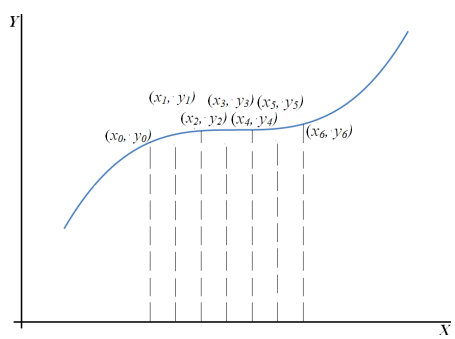
Procediendo de la misma manera para las tres integrales restantes en (6), tenemos:

$$\int_{x_0}^{x_3}P_3dx=\frac{3hy_0}{8}+\frac{9hy_1}{8}+\frac{9hy_2}{8}+\frac{3hy_3}{8}=\frac{3h}{8}\left[y_0+3y_1+3y_2+y_3\right] \qquad (10)$$

por lo tanto

$$\int_{x_0}^{x_2}f(x)dx\approx\frac{3h}{8}\left(y_0+3y_1+3y_2+y_3\right) \qquad (11)$$

Si ahora consideramos siete puntos de la misma función equidistantes ($x_0$, $y_0$), ($x_1$, $y_1$), ($x_2$, $y_2$), ($x_3$, $y_3$), equidistantes ($x_4$, $y_4$), ($x_5$, $y_5$), ($x_6$, $y_6$) cuyas ordenadas equidistan, como se muestra en la figura 2.



Ahora calculamos la integral desde $x_0$ hasta $x_6$, para ello utilizamos la expresión (10) pero la aplicamos primero de $x_0$ a $x_3$ y después desde $x_3$ hasta $x_6$.

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3\right) + \frac{3h}{8}\left(y_3 + 3y_4 + 3y_5 + y_6\right) \tag{12}$$

el signo ≈ es usado por que aun no consideramos el valor del error. Como las siete abscisas son equidistantes $h$ es la misma para cada término del lado derecho, podemos agrupar de la siguiente forma.

$$\int_{x_0}^{x_6} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left(y_0 + 3(y_1 + y_4) + 3(y_2 + y_5) + 2y_3 + y_6\right) \tag{13}$$

Ahora podemos aplicar repetidas veces la expresión (13) para obtener la integral de una función sobre el intervalo ($x_0$, $x_{3n}$), el número total de puntos siempre debe ser de la forma $3n$ +1, notemos que los extremos se suman una sola vez, mientras que las ordenadas con índice múltiplo de tres se suman dos veces y las ordenadas restantes se suman tres veces, así que para $3n$ +1 puntos el valor de la integral se obtiene como sigue:

$$\int_{x_0}^{x_{3n}} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left( y_0 + 3\sum_{i=1}^{n}\left(y_{3i-2} + y_{3i-1}\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_{3i} + y_{3n} \right) \tag{14}$$

# El error en el método de Simpson 3/8.

Como en los métodos de trapecio y Simpson 1/3, el error *E(x)* de la integral numérica, es la integral del error del polinomio interpolante de Lagrange, así

$$E(x)=\int_{x_0}^{x_3}\varepsilon(x)dx=\int_{x_0}^{x_3}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\approx-\frac{3}{80}h^5 f^{iv}(\xi) \qquad (15)$$

donde ξ es un punto en el intervalo de integración, donde $f^{iv}(\xi)$ es máxima. Este error se comete cada vez que se aplica el método. Si aplicamos el método *n* veces, el error será

$$E(x)=\left|\frac{3n}{80}h^5 f^{iv}(\xi)\right|$$

Pero *n* y *h* están relacionadas a través de:

$$h=\frac{x_{3n}-x_0}{3n}$$

Entonces:

$$n=\frac{x_{3n}-x_0}{3h}$$

Sustituyendo:

$$E(x)=\left|\frac{3}{80}nh^5 f^{iv}(\xi)\right|=\left|\frac{3}{80}\frac{(x_{3n}-x_0)}{3h}h^5 f^{iv}(\xi)\right|=\left|\frac{(x_{3n}-x_0)}{80}h^4 f^{iv}(\xi)\right|$$

Por lo que el valor de la integral es:

$$\int_{x_0}^{x_{3n}} f(x)dx\approx\frac{3h}{8}\left(y_0+3\sum_{i=1}^{n}\left(y_{3i-2}+y_{3i-1}\right)+2\sum_{i=1}^{n-1}y_{3i}+y_{3n}\right)\pm\left|\frac{(x_{3n}-x_0)}{80}h^4 f^{iv}(\xi)\right| \qquad (16)$$

## Ventajas y desventajas.

Se obtiene mejores resultados que con el método del trapecio y la Regla de Simpson 1/3.

Se aplica a funciones analíticas y tabulares.

Se puede combinar con otros métodos de integración.

Se puede aplicar a funciones de más de una variable.

La desventaja que presenta la regla de Simpson 3/8, es que el número total de subintervalos sobre los que se integra siempre debe ser múltiplo de tres.

## Ejemplo.

Calcular la siguiente integral definida.

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} =$$

***Solución:***

Como se requieren 3*n* subintervalos, el número de puntos debe ser de la forma 3*n* + 1, tomemos *n* = 3. Por lo tanto:

$$h = \frac{b-a}{3n} = \frac{2-1}{3(3)} = \frac{1}{9} = 0.11111$$

Lo que nos da 10 subintervalos, tabulamos la función:

| ***n*** | ***x*** | ***f(x)=1/x*** | ***factor*** | |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1.00000 | × 1 | 1.00000 |
| 1 | 1.11111 | 0.90000 | × 3 | 2.70000 |
| 2 | 1.22222 | 0.81818 | × 3 | 2.45454 |
| 3 | 1.33333 | 0.75000 | × 2 | 1.50000 |
| 4 | 1.44444 | 0.69230 | × 3 | 2.07690 |
| 5 | 1.55555 | 0.64285 | × 3 | 1.92855 |
| 6 | 1.66666 | 0.60000 | × 2 | 1.20000 |
| 7 | 1.77777 | 0.56250 | × 3 | 1.68750 |
| 8 | 1.88888 | 0.52941 | × 3 | 1.58823 |
| 9 | 2 | 0.50000 | × 1 | 0.50000 |
| | | | SUMA= | 16.63572 |

Multiplicamos las $y_i$ por el factor indicado en la expresión (15):

$$\int_{x_0}^{x_{3n}} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left( y_0 + 3\sum_{i=1}^{n}\left(y_{3i-2} + y_{3i-1}\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_{3i} + y_{3n} \right)$$

Realizamos la suma y sustituimos en la ecuación (15):

$$\int_{x_0}^{x_{3n}} f(x)dx \approx \frac{3\left(1/9\right)}{8}\left(16.63572\right) = \frac{1}{24}\left(16.63572\right) = 0.69315$$

El resultado es 0.69315.

Ahora el error, con respecto al valor *exacto* de ln(2), es:

$$|0.69315-0.693147| = 2.82 \times 10^{-6},$$

y el error de la integral es:

$$\left|\frac{3n}{80}h^5 f^{iv}(\xi)\right| = \left|\frac{3}{80}\frac{(b-a)}{3h}h^5 f^{iv}(\xi)\right| = \left|\frac{(2-1)}{80}\left(\frac{1}{9}\right)^4 \frac{24}{\xi^5}\right| = \left|\frac{1}{21870}\right| = 0.00005\,.$$

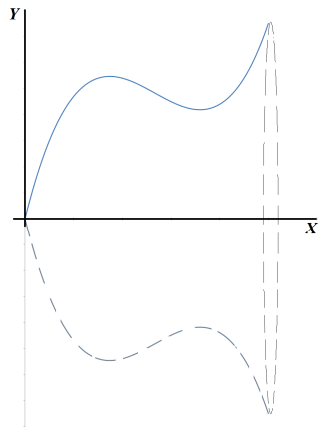
Entonces el valor de la integral, usando el método de Simpson 3/8 es:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = 0.69315 \pm 0.00005$$

El valor real se encuentra dentro del intervalo que proporciona el método.

## Ejemplo.

Tenemos un alambre con la forma que se muestra en la figura:




Al hacerlo girar en torno al eje de simetría, generará una superficie con simetría de revolución, cuál será el volumen contenido en esa superficie, si las posiciones de algunos puntos del alambre se muestran en la siguiente tabla:

| ***X (mm)*** | ***Y (mm)*** |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 60 |
| 2 | 94 |
| 3 | 108 |
| 4 | 108 |
| 5 | 100 |
| 7 | 84 |
| 8 | 88 |
| 9 | 108 |
| 10 | 150 |

***Solución:***

Sabemos del curso previo de cálculo que el volumen esta dado por:

$$V = \int \pi \left| f(x) \right|^2 dx$$

Como se requieren 3*n* subintervalos, el número de puntos debe ser de la forma 3*n* + 1, tomemos *n* = 3, es decir los primeros 10 puntos. Por lo que el volumen estará dado por:

$$V = \int_0^9 \pi \left| f(x) \right|^2 dx + \int_9^{10} \pi \left| f(x) \right|^2 dx$$

Usando la regla de Simpson 3/8 resolveremos la primera integral con $h$ = 1, y la segunda por trapecio, tabulamos la función $|f(x)|^2$:

| ***k*** | ***X (mm)*** | ***Y (mm)*** | ***$Y^2$*** | ***Factor*** | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | × 1 | 0 |
| 1 | 1 | 60 | 3600 | × 3 | 10800 |
| 2 | 2 | 94 | 8836 | × 3 | 26508 |
| 3 | 3 | 108 | 11664 | × 2 | 23328 |
| 4 | 4 | 108 | 11664 | × 3 | 34992 |
| 5 | 5 | 100 | 10000 | × 3 | 30000 |
| 6 | 6 | 90 | 8100 | × 2 | 16200 |
| 7 | 7 | 84 | 7056 | × 3 | 21168 |
| 8 | 8 | 88 | 7744 | × 3 | 23232 |
| $3n$ = 9 | 9 | 108 | 11664 | × 1 | 11664 |
| | | | | SUMA= | 197892 |
| 10 | 10 | 150 | 22500 | | |

Multiplicamos las $y_i$ por el factor indicado en la expresión (15):

$$\int_{x_0}^{x_{3n}} f(x)dx \approx \frac{3h}{8}\left( y_0 + 3\sum_{i=1}^{n}\left(y_{3i-2} + y_{3i-1}\right) + 2\sum_{i=1}^{n-1} y_{3i} + y_{3n} \right)$$

Realizamos la suma y sustituimos en la ecuación (15):

Por lo tanto el valor de la integral es:

$$\int_{x_0}^{x_{3n}} f(x)dx \approx \frac{3(1)}{8}\left(197892\right) = 74209.5\ mm^3$$

Pero falta la integral:

$$\int_{x_9}^{x_{10}} f(x)dx \approx \frac{h}{2}\left(y_9 + y_{10}\right) = \frac{1}{2}(11664 + 22500) = 17082\ mm^3$$

Entonces el volumen buscado es:

$$V = \int_0^{10} \pi \left| f(x) \right|^2 dx = 74209.5 + 17082 = 91291.5\, mm^3$$

## Conclusión:

El método de Simpson 3/8 brinda mejor precisión que los métodos vistos anteriormente, pero su aplicación está limitada por el número de puntos, que debe ser de la forma $3n + 1$.

Este método puede combinarse con los anteriores cuando no puede aplicarse de manera directa por no tener subintervalos en un múltiplo de 3.

Es un método fácil de programar.

# Cuadratura Gaussiana.

Los métodos de integración vistos hasta ahora parten de integrar polinomios interpolantes de Lagrange de diferentes grados, es decir:

$$\int_a^b y dx \approx \int_a^b \sum_{i=0}^{n} \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} y_i dx = \sum_{i=0}^{n} y_i \int_a^b \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} dx$$

O bien:

$$\int_a^b y dx \approx \sum_{i=0}^{n} y_i w_i = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) w_i$$

$$\int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i) w_i$$

Como aproximamos $f(x)$ por un polinomio, la integral de un polinomio también es un polinomio, y un polinomio puede escribirse como una combinación lineal de un conjunto de funciones ortogonales, es decir, si $\{\phi_0, \phi_1, \ldots \phi_n\}$ es un conjunto de funciones ortogonales:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i$$

Por ejemplo, un conjunto base $\{\phi_i\} = \{x^n\}$.

Un método de cuadratura consiste en aproximar la integral definida de una función. La **cuadratura de Gauss**, es una cuadratura que selecciona los puntos de evaluación de manera óptima y no en una forma igualmente espaciada, construida para dar el resultado de un polinomio de grado $2n$-1 o menos, elegibles para los puntos $x_i$ y los coeficientes $w_i$ para $i = 0,\ldots,n$.

Gauss toma como conjunto ortogonal a los polinomios de Legendre que son ortogonales en el intervalo [-1, 1], y están dados por:

$$L_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left(t^2 - 1\right)^n$$

O en forma recursiva:

$$L_{k+1}(t) = \frac{(2k+1) t L_k(t) - k L_{k-1}(t)}{k+1}$$

Con $L_0(t) = 1$ y $L_1(t) = t$.

Haciendo $k = 1$, para obtener $L_2(t)$ tenemos:

$$L_{k+1}(t) = L_2(t) = \frac{(2(1)+1) t L_1(t) - (1) L_0(t)}{(1)+1} = \frac{\left(3t^2 - 1\right)}{2}$$

Su propiedad de ortogonalidad es:

$$\int_{-1}^{1} L_m(t)L_n(t)dt = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$$

Por lo tanto, el dominio de tal cuadratura es de [−1, 1].

Tal cuadratura dará resultados precisos sólo si es aproximada por un polinomio dentro del rango [−1, 1]. Si la función puede ser escrita como donde  es un polinomio aproximado y es conocido.

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-1}^{1} W(t)g(t)dt \approx \sum_{i=0}^{n} g(t_i)w_i$$

Debido a ello hay que hacer un cambio de variable, encontrémosla ecuación de la recta que pasa por (1, *b*) y (-1, *a*):

$$x - a = \frac{b-a)}{1-(-1)}(t-(-1))$$

Reduciendo:

$$x = \frac{b-a}{2}(t+1)+a$$

Y su derivada es:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{b-a}{2}$$

Entonces:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{-1}^{1} f(t)dt = \int_{-1}^{1} f(x(t))\frac{dx}{dt}dt = \int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}(t+1)+a\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)dt$$

Por lo tanto:

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}(t+1)+a\right)dt$$

Y

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)\int_{-1}^{1} f\left(\frac{b-a}{2}(t+1)+a\right)dt = \left(\frac{b-a}{2}\right)\sum_{i=0}^{n} w_i f(x(t_i))$$

Donde las $t_i$ son las raíces del polinomio de Legendre, por ejemplo para el polinomio $L_2(t)$, tenemos:

$$t_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad t_2 = \frac{1}{-\sqrt{3}}$$

y los pesos $w_i$ están dados por la expresión:

$$w_i = \frac{2}{\left(1-t_i^2\right)\left[L_n^{'}(t_i)\right]^2}$$

Encontremos los pesos para las dos raíces del polinomio $L_2(t)$:

$$w_1 = \frac{2}{\left(1-t_1^2\right)\left[L_2^{'}(t_1)\right]^2} = \frac{2}{\left(1-\frac{1}{3}\right)\left[\frac{1}{2}\left(6\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]^2} = 1$$

Igual para la raíz $t_2$, tenemos $w_2 = 1$.

A continuación se muestra una tabla con las raíces y los pesos para los polinomio de Legendre de grado 0,…,7.

Tabla de pesos y raíces para los polinomios de Legendre $L_n(t)$ con $n$ =0,...,7.

| ***n*** | $L_n(t)$ | $t_i$ | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | No existe | No existe |
| 1 | t | 0 | No existe |
| 2 | $\frac{1}{2}\left(3t^2-1\right)$ | $\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $w_1 = w_2 = 1$ |
| 3 | $\frac{1}{2}\left(5t^3-3t\right)$ | 0,<br>± 0.774596669241 | 0.888888888889<br>0.555555555556 |
| 4 | $\frac{1}{8}\left(35t^4-30t^2+3\right)$ | ± 0.339981043584<br>± 0.861136311594 | 0.652145154863<br>0.347854845137 |
| 5 | $\frac{1}{8}\left(63t^5-70t^3+15t\right)$ | 0<br>± 0.538469310106<br>± 0.906179845939 | 0.568888888889<br>0.478628670499<br>0.236926885056 |
| 6 | $\frac{1}{16}\left(231t^6-315t^4+105t^2-5\right)$ | ± 0.238619186083<br>± 0.661209386466<br>± 0.932469514203 | 0.467913934573<br>0.360761573048<br>0.171324492379 |
| 7 | $\frac{1}{16}\left(429t^7-693t^5+355t^3-35t\right)$ | 0<br>± 0.405845151377<br>± 0.741531185599<br>± 0.949107912343 | 0.417959183673<br>0.381830050505<br>0.279705391489<br>0.129484966169 |

Nota que no existe $w_0$, por lo que nuestra integral será calculada con:

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)\sum_{i=1}^{n} w_i f(x(t_i))$$

Donde el contador $i$ empieza en 1.

## Ventajas y desventajas

La cuadratura Gaussiana brinda mayor precisión que los métodos de trapecio y Simpson, pero en ocasiones es necesario utilizar polinomio de mayor grado para alcanzarla.

No se puede aplicar a datos discretos.
Se requiere conocer las raíces y los pesos para los polinomios interpolantes de Lagrange.
Usar un polinomio de mayor grado, no garantiza mejor precisión.
No es posible estimar el error sin conocer el resultado exacto.

# Ejemplo.

Usando cuadratura Gaussiana evalúa la siguiente integral:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1}^{1.5} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx$$

***Solución:***

Usando la siguiente expresión con n = 2.

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)\sum_{i=1}^{n} w_i\, f(x(t_i))$$

Con

$$x(t) = \frac{b-a}{2}(t+1)+a$$

Tenemos:

$$\int_1^{1.5} f(x)dx = \left(\frac{1.5-1}{2}\right)\Big(w_1 f(x(t_1)) + w_2 f(x(t_2))\Big)$$

Como vimos $w_1 = w_2 = 1$ y $t_i = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, entonces:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1}^{1.5} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{b-a}{2}\left(e^{\frac{-\left(\frac{b-a}{2}(t_1+1)+a\right)^2}{2}} + e^{\frac{-\left(\frac{b-a}{2}(t_2+1)+a\right)^2}{2}}\right) =$$

Como los pesos son iguales a 1, sólo sustituyendo las raíces:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1}^{1.5} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{4}\left(e^{\frac{-\left(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)+1\right)^2}{2}} + e^{\frac{-\left(\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}+1\right)+1\right)^2}{2}}\right) =$$

Evaluando:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1}^{1.5} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{4}\left(e^{\frac{-(1.39433757)^2}{2}} + e^{\frac{-(1.10566243)^2}{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{0.3782921+0.54267498}{4}\right)$$

Reduciendo:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1}^{1.5} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx = = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(0.23024177\right) = 0.09185318$$

Comparando con el resultado exacto[1] a cuatro decimales.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{1}^{1.5} e^{\frac{-x^2}{2}}\,dx = 0.0919$$

El error absoluto es:

$$\varepsilon = |0.0919 - 0.09185318| = 0.00046823$$

[1] *Valor tomado de la tabla de distribución normal estándar.*

# Ejemplo.

Usando cuadratura Gaussiana evalúa la siguiente integral:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\pi} sen(x)dx$$

***Solución:***

Usando la siguiente expresión con n = 2.

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\frac{b-a}{2}\right)\sum_{i=1}^{n} w_i f(x(t_i))$$

Con

$$x(t) = \frac{b-a}{2}(t+1)+a$$

Tenemos:

$$\int_0^{\pi} sen(x)dx = \left(\frac{\pi-0}{2}\right)\left(w_1 f\left(x\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) + w_2 f\left(x\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right)\right)\right)$$

Construyamos la siguiente tabla:

| $t_i$ | $w_i$ | $x(t)$ | $f(x(t))$ | $wf(x(t))$ |
|---|---|---|---|---|
| 0.577350269 | 1 | 2.44489292 | 0.641690003 | 0.64169000 |
| -0.57735027 | 1 | 0.65510708 | 0.609244162 | 0.60924416 |
| | | | Suma= | 1.25093416 |
| | | | Integral= | 1.93894795 |

Para $n$ = 2, tenemos:

$$\int_0^{\pi} sen(x)dx = 1.93894795$$

Ahora tomemos $n$ = 4 y construyamos una tabla:

| $t_i$ | $w_i$ | $x(t)$ | $f(x(t))$ | $wf(x(t))$ |
|---|---|---|---|---|
| -0.86113 | 0.34785 | 0.2152485 | 0.2135902 | 0.07429735 |
| -0.33998 | 0.65214 | 1.023031 | 0.853690428 | 0.55672568 |
| 0.33998 | 0.65214 | 2.076969 | 0.874606525 | 0.57036590 |
| 0.86113 | 0.34785 | 2.8847515 | 0.254026597 | 0.08836315 |
| | | | Suma= | 1.28975208 |
| | | | Integral= | 1.99911572 |

Para $n$ = 4, tenemos:

$$\int_0^{\pi} sen(x)dx = 1.99911572$$

Ahora tomemos $n$ = 5 y construyamos una tabla:

| $t_i$ | $w_i$ | $x(t)$ | $f(x(t))$ | $wf(x(t))$ |
|---|---|---|---|---|
| -0.90617 | 0.23692 | 0.1454365 | 0.144924335 | 0.03433547 |
| -0.53846 | 0.47862 | 0.715387 | 0.655909589 | 0.31393145 |
| 0 | 0.56888 | 1.55 | 0.999783764 | 0.56875699 |
| 0.53846 | 0.47862 | 2.384613 | 0.68672905 | 0.32868226 |
| 0.90617 | 0.23692 | 2.9545635 | 0.185940682 | 0.04405307 |
| | | | Suma= | 1.28975923 |
| | | | Integral= | 1.99912681 |

Para $n$ = 5, tenemos:

$$\int_0^{\pi} sen(x)dx = 1.99912681$$

Sabemos que el resultado exacto es 2, por lo que para $n$ = 4 y 5, tiene un error menor.

## Conclusión.

La cuadratura Gaussiana brinda mejor precisión que los métodos vistos anteriormente, pero su aplicación está limitada a funciones analíticas.

No podemos estimar el error.

Es un método fácil de programar.