Método de Euler Modificado

Dr. Mario González Cardel

Como su nombre o indica este método es una modificación al método de Euler para mejorar su precisión y se conoce también como Método de Heun.

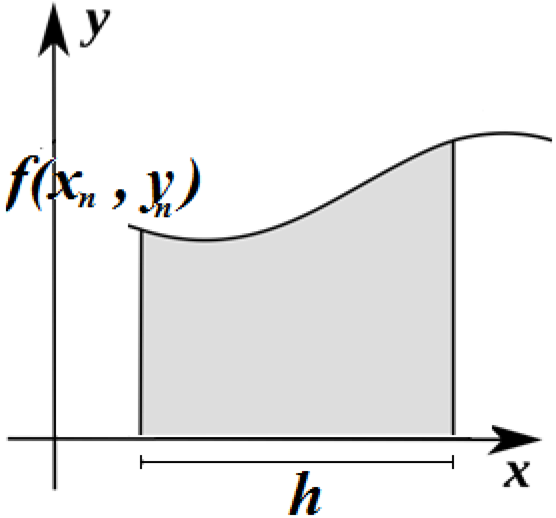
Cuando aplicamos el método de Euler,

$$x_{n+1} = x_n + h$$
$$y_{n+1} = f(x_n, y_n)h + y_n$$

el producto:

$$f(x_n, y_n)h$$

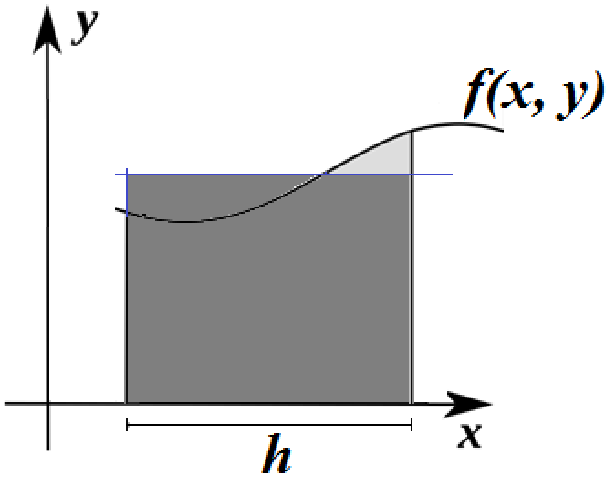
Representa una aproximación al área bajo la curva:



Aproximando la pendiente por su valor en el punto extremo izquierdo.

Se obtiene una mejor aproximación si tomamos el promedio de sus valores en los puntos extremos, entonces el área bajo la curva es aproximada por el área del rectángulo sombreado.

$$x_{n+1} = x_n + h$$
$$y_{n+1} = y_n + \left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}) \right] h$$



La expresión de recurrencia en la diapositiva anterior para calcular y_{n+1} depende de y_{n+1}, pero podemos aproximar la y_{n+1} por la de Euler, es decir que la expresión de recurrencia queda:

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$y_{n+1}^{H} = y_n + \frac{\left[f(x_n, y_n^{H}) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{E}) \right]}{2} h$$

El superíndice H significa aproximación de Heun, y el superíndice E significa una aproximación de Euler, es decir:

$$x_{n+1} = x_n + h$$

$$y_{n+1}^{E} = y_n + f(x_n, y_n^{H}) h$$

$$y_{n+1}^{H} = y_n + \left[f(x_n, y_n^{H}) + f(x_{n+1}, y_{n+1}^{E}) \right] \frac{h}{2}$$

Ésta es la ***fórmula de Euler modificado*** o ***fórmula de Heun***.

Ejemplo.

Resolver la siguiente ecuación diferencial, con condiciones iníciales, usando el método de Taylor.

con la condición inicial $y(0) = 1$

Solución:

Sabemos que:

$x_0 = 0$, es el centro de convergencia.

$y(0) = 1$

Evaluando en la ecuación diferencial, tenemos:

Solución:

Sabemos que:

x_0 = 0, es el centro de convergencia.

y(0) = 1

La iteración número 1 es:

$$x_1 = x_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$$

$$y_1^E = y_0 + f(x_0, y_0^H)h = 1 + \big(1 - 0 + 4(1)\big)(0.1) = 1.5$$

$$y_1^H = y_0 + \left[f(x_0, y_0^H) + f(x_1, y_1^E)\right]\frac{h}{2}$$

$$= 1 + \left[\big(1 - 0 + 4(1)\big) + \big(1 - 0.1 + 4(1.5)\big)\right]\frac{0.1}{2} = 1.5950$$

La iteración número 2 es:

$$x_2 = x_1 + h = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

$$y_2^E = y_1^H + f(x_1, y_1^H)h = 1.595 + \left(1 - 0.1 + 4(1.595)\right)(0.1) = 2.323$$

$$y_2^H = y_1^H + \left[f(x_1, y_1^H) + f(x_2, y_2^E)\right]\frac{h}{2}$$

$$= 1.595 + \left[\left(1 - 0.1 + 4(1.595)\right) + \left(1 - 0.2 + 4(2.323)\right)\right]\frac{0.1}{2} = 2.4636$$

La iteración número 3 es:

$$x_3 = x_2 + h = 0.2 + 0.1 = 0.3$$

$$y_3^E = y_2^H + f(x_2, y_2^H)h = 2.4636 + \left(1 - 0.2 + 4(2.4636)\right)(0.1) = 3.52904$$

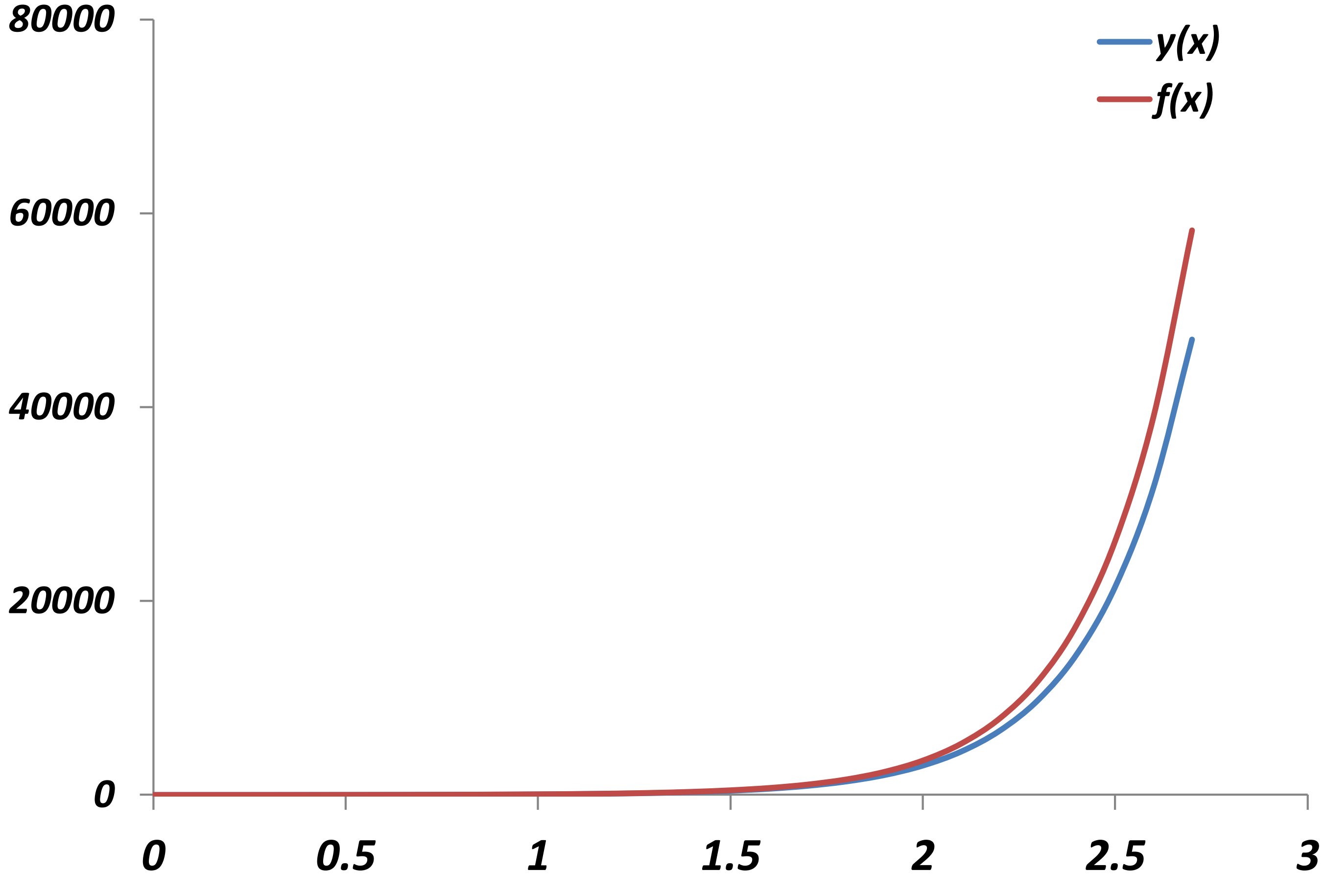
$$y_3^H = y_2^H + \left[f(x_2, y_2^H) + f(x_3, y_3^E)\right]\frac{h}{2}$$

$$= 2.4636 + \left[\left(1 - 0.2 + 4(2.4636)\right) + \left(1 - 0.3 + 4(3.52904)\right)\right]\frac{0.1}{2} = 3.7371$$

Las primeras 10 iteraciones se muestran en la siguiente tabla:

n	x_n	$f(x_n, y_n^h)$	y_n^E	$f(x_n, y_{n+1}^h)$	y_n^H
0	0	5	1		1
1	0.1	7.28	1.5	6.9	1.595
2	0.2	10.6544	2.323	10.092	2.4636
3	0.3	15.64851	3.52904	14.81616	3.73712
4	0.4	23.03979	5.30197	21.80791	5.60994
5	0.5	33.9789	7.91392	32.15571	8.36972
6	0.6	50.16877	11.76761	47.47046	12.44219
7	0.7	74.12978	17.45907	70.13628	18.45744
8	0.8	109.59208	25.87042	103.68169	27.34802
9	0.9	162.07627	38.30722	153.32891	40.49406
10	1		56.70169	226.80679	59.93822

Comparación de la solución analítica y la numérica



Ejemplo.

Determinar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales por el método de Euler modificado.

$$x'(t) = y + \cos(2t)$$
$$y'(t) = -x$$

,

Solución:

Sabemos que: $x(0)=1 \quad y(0)=4$

Las expresiones de recurrencia se modifican, quedando:

$$t_{n+1} = t_n + h$$

$$x_{n+1}^E = x_n^H + f(x_n^H, y_n^H)h$$

$$x_{n+1}^H = x_n^H + \left[f(x_n^H, y_n^H) + f(x_{n+1}^E, y_{n+1}^E)\right]\frac{h}{2}$$

$$y_{n+1}^E = y_n^H + g(x_n^H, y_n^H)h$$

$$y_{n+1}^H = y_n^H + \left[g(x_n^H, y_n^H) + g(x_{n+1}^H, y_{n+1}^E)\right]\frac{h}{2}$$

La iteración número 1 es:

$$t_1 = t_0 + h = 0 + 0.1 = 0.1$$

$$x_1^E = x_0^H + f(x_0^H, y_n^H)h = 1 + \left(4 + \cos\left(2*(0)\right)\right)(0.1) = 1.5$$

$$x_1^H = x_0^H + \left[f(x_0^H, y_0^H) + f(x_1^E, y_1^E)\right]\frac{h}{2}$$

$$= 1 + \left[\left(4 + \cos\left(2*(0)\right)\right) + \left(4 + \cos\left(2(0.1)\right)\right)\right]\frac{0.1}{2} = 1.4990($$

$$y_1^E = y_0^H + g(x_1^H, y_0^H)h = 4 + (-1.5)(0.1) = 3.85$$

$$y_1^H = y_0^H + \left[g(x_1^E, y_0^H) + g(x_1^H, y_1^E)\right]\frac{h}{2}$$

$$= 4 + \left[\left(-1.500\right) + \left(-1.4900\right)\right]\frac{0.1}{2} = 3.85045$$

La iteración número 2 es:

$$t_2 = t_1 + h = 0 + 0.2 = 0.3$$

$$x_2^E = x_1^H + f(x_1^H, y_1^H)h = 1.49900 + \left(3.85005 + \cos\left(2*(0.1)\right)\right)(0.1) = 1.98201$$

$$x_2^H = x_1^H + \left[f(x_1^H, y_1^H) + f(x_2^E, y_2^E)\right]\frac{h}{2}$$

$$= 1 + \left[\left(1.49900 + \cos\left(2*(0.1)\right)\right) + \left(1.98201 + \cos\left(2(0.2)\right)\right)\right]\frac{0.1}{2} = 1.96915$$

$$y_2^E = y_1^H + g(x_2^H, y_1^H)h = 3.85045 + (-1.96915)(0.1) = 3.65180$$

$$y_2^H = y_1^H + \left[g(x_2^E, y_1^H) + g(x_2^H, y_2^E)\right]\frac{h}{2}$$

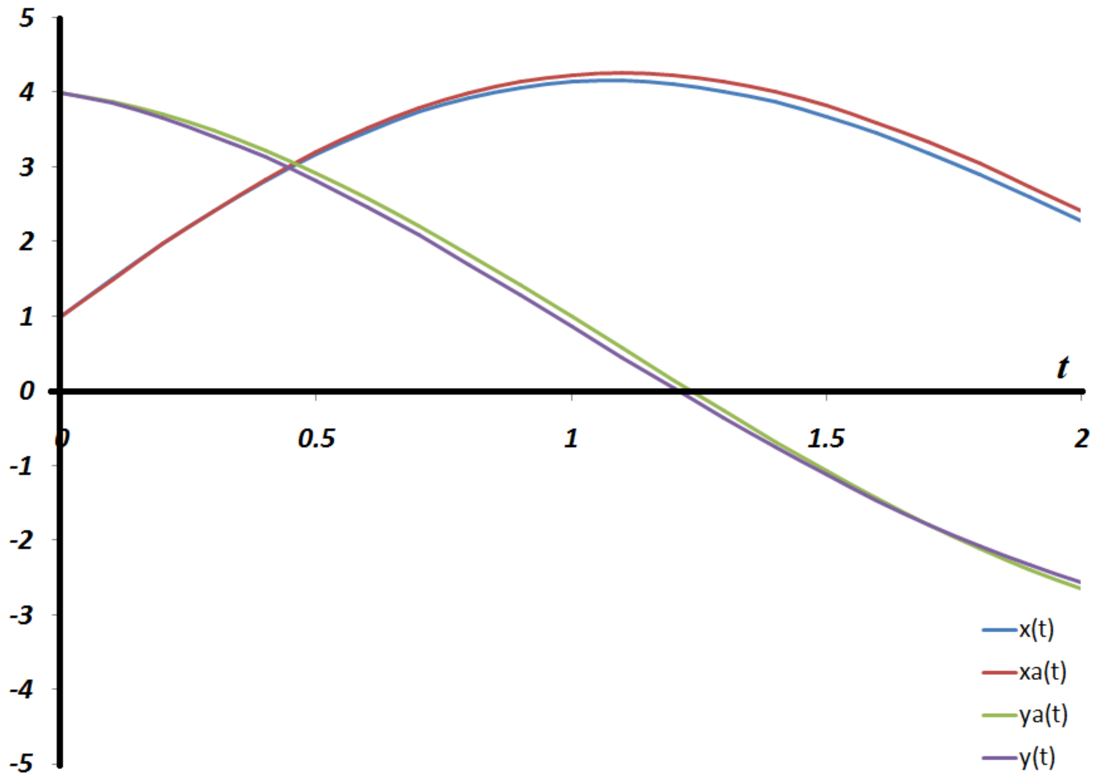
$$= 3.85045 + \left[\left(-1.49900\right) + \left(-1.96915\right)\right]\frac{0.1}{2} = 3.65249$$

Las primeras 10 iteraciones se muestran en la siguiente tabla:

•

n	t	x^E	x^H	y^E	y^H
0	0	1	1	4	4
1	0.1	1.5	1.499	3.85	3.85004
2	0.2	1.98201	1.96915	3.65179	3.65249
3	0.3	2.4265	2.40955	3.40914	3.41068
4	0.4	2.83315	2.81248	3.12583	3.1284
5	0.5	3.19499	3.17106	2.80633	2.8101
6	0.6	3.50611	3.47949	2.45572	2.46082
7	0.7	3.76181	3.73312	2.07954	2.08607
8	0.8	3.95873	3.92865	1.68366	1.6917
9	0.9	4.0949	4.06412	1.27417	1.28375
10	1	4.16978	4.139	0.85719	0.86831

Comparación de la solución analítica y la numérica.



Conclusión.

- El método de Heun brinda mejor precisión que los métodos vistos anteriormente, es aplicable a ecuaciones diferenciales ordinarias y a sistemas de ecuaciones de ecuaciones acopladas.
- Es un método fácil de programar.
- No podemos estimar el error.