Método de descomposición LU.

Dr. Mario González Cardel

- El Método de descomposición LU, también es conocido como factorización matricial.
- Consiste en descomponer la matriz **A** en el producto de dos matrices, una **L** (de *low*) triangular inferior y otra **U** (de *Up*) triangular superior.

Sea un sistema de ecuaciones con *n* ecuaciones y *n* incógnitas como el siguiente:

$$A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + \ldots + A_{1,n}x_n = B_1$$
$$A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + \ldots + A_{2,n}x_n = B_2$$

$$A_{n,1}x_1 + A_{n,2}x_2 + \ldots + A_{n,n}x_n = B_n$$

Se puede escribir en forma matricial quedando:

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ \\ B_n \end{bmatrix}$$

O simplemente:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{B}$$

Descomponiendo la matriz **A** en el producto de dos matrices, una **L** y otra **U**:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LUx} = \mathbf{B}$$

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & 0 \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ \\ B_n \end{bmatrix}$$

Si agrupamos el producto de **U** por el vector columna **x**, tenemos el vector columna **c**, de modo que el producto queda::

$$\mathbf{L}\left(\mathbf{Ux}\right)=\mathbf{Lc}=\mathbf{B}$$

$$\begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ & & & 0 \\ l_{n,1} & l_{n,2} & \cdots & l_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \\ c_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ \\ B_n \end{bmatrix}$$

De tal forma que podemos resolver fácilmente el siguiente sistema, usando el método de Gauss con sustitución hacia atrás, ya que la matriz **U** es triangular superior.

$$\mathbf{U}\mathbf{x} = \mathbf{c}$$

$$\begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & \cdots & \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & & & \\ 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ \\ c_n \end{bmatrix}$$

Una vez que conocemos las componentes del vector **c**, regresamos al sistema original:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Lc} = \mathbf{B}$$

El cual se puede resolver fácilmente, usando el método de Gauss con sustitución hacia adelante, ya que la matriz **L** es triangular inferior.

Existen tres formas de hacer esta factorización, la de *Dollitle,* en la que se propone que la diagonal principal de **L** esté formada por unos. La de *Crout* que propone que la diagonal principal de **U** sea la formada por unos y la de *Cholesky,* que parte de que **U** es la transpuesta de L, $\mathbf{L}^t$.

La palabra *Dolittle*, tiene la letra $\boldsymbol{l}$, por lo que nos ayuda a recordar que para Dolittle, la matriz $\boldsymbol{l}$ tiene su diagonal principal formada de 1.

La palabra *Crout*, tiene la letra $\boldsymbol{u}$, por lo que nos ayuda a recordar que para Crout, la matriz $\boldsymbol{u}$ tiene su diagonal principal formada de 1.

En *Cholesky,* se usa la transpuesta $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{l}^t$, esta factorización sólo se aplica a matrices simétricas.

Deduciendo las expresiones de recurrencia para un sistema de 3 × 3 de acuerdo a Dolittle:

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}=\mathbf{LU}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Realizando los productos para determinar las componentes:

$$A_{11} = l_{11}u_{11} + l_{12}u_{21} + l_{13}u_{31} = u_{11}$$

$$A_{12} = l_{11}u_{12} + l_{12}u_{22} + l_{13}u_{32} = u_{12}$$

$$A_{13} = l_{11}u_{13} + l_{12}u_{23} + l_{13}u_{33} = u_{13}$$

Podemos deducir de manera general:

$$u_{1j} = A_{1j}$$

$$A_{22} = l_{21}u_{21} + l_{22}u_{22} + l_{23}u_{23} = l_{21}u_{12} + u_{22}$$

$$u_{22} = A_{22} - l_{21}u_{12}$$

$$A_{23} = l_{21}u_{31} + l_{22}u_{32} + l_{23}u_{33} = l_{21}u_{31} + u_{23}$$

$$u_{23} = A_{23} - l_{21}u_{31}$$

$$A_{33} = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33}u_{33} = l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33}$$

$$u_{33} = A_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}$$

$$u_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}u_{kj}$$

$$A_{32} = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} + l_{33}u_{32} = l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22}$$

$$l_{32} = \frac{A_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}}$$

$$l_{ij} = \frac{A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}u_{kj}}{u_{jj}}$$

Las expresiones de recurrencias para:

Dolittle:

$$u_{1j} = A_{1j} \qquad l_{i1} = \frac{A_{i1}}{u_{11}}$$

$$u_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj} \qquad l_{ij} = \frac{A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}}{u_{jj}}$$

Las expresiones de recurrencias para:

Crout:

$$l_{1j} = A_{1j}$$

$$u_{i1} = \frac{A_{i1}}{l_{11}}$$

$$l_{ij} = A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} u_{kj}$$

$$u_{ij} = \frac{A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}}{l_{ii}}$$

Las expresiones de recurrencias para:

Cholesky:

$$l_{ij} = \sqrt{A_{ij} - \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{i-1} l_{ik}^2}$$

$$l_{ij} = \frac{A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} l_{ik} l_{jk}}{l_{jj}}$$

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones usando la descomposición LU de Dolittle:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Descomponiendo la matriz A en el producto de **LU** debido a Dolittle.

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & -2 & -1\end{bmatrix}=\mathbf{LU}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1/3 & 1 & 0\\ 1 & -3/7 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 0 & 7/3 & 7/3\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

La matriz ***L*** tiene su diagonal principal formada de 1.

Agrupando el producto **Ux**:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Lc} = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \mathbf{Lc} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1 & 0 \\ 1 & -3/7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{B}$$

Usando el método de Gauss con sustitución hacia adelante para resolver para **c**:

$$c_1 = 12$$

$$c_2 = 11 - \frac{1}{3}(12) = 7$$

$$c_3 = 2 - 1(12) + \frac{3}{7}(7) = -7$$

Resolviendo el producto **Ux** = **c**, para determinar **x** usando el método de Gauss con sustitución hacia atrás:

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{c}$$

$$\mathbf{Ux} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & 7/3 & 7/3 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix} = \mathbf{c}$$

La solución es:

$$x_3 = \left(\frac{-7}{-2}\right) = \frac{7}{2}$$

$$x_2 = \left[7 - \frac{7}{3}\left(\frac{7}{2}\right)\right]\left(\frac{3}{7}\right) = \frac{-1}{2}$$

$$x_1 = \left(12 - 2\left(\frac{7}{2}\right) + \frac{-1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}$$

Comprobando:

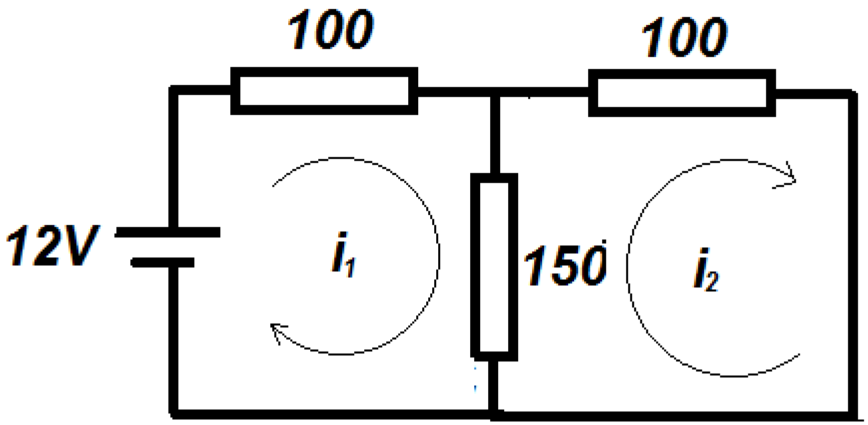
$$3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{-1}{2}\right) + 2\left(\frac{7}{2}\right) = 12$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = \left(\frac{3}{2}\right) + 2\left(\frac{-1}{2}\right) + 3\left(\frac{7}{2}\right) = 11$$

$$3x_1 - 2x_2 - x_n = 3\left(\frac{3}{2}\right) - 2\left(\frac{-1}{2}\right) - \left(\frac{7}{2}\right) = 2$$

Ejemplo:

Encuentra la corriente que circula por la resistencia de 150 Ω. usando la descomposición LU de Cholesky.



Usando el método de Maxwell para plantear las ecuaciones.

$$150(i_2 - i_1) + 100 i_2 = 0$$
$$-12 + 100 i_1 + 150(i_1 - i_2) = 0$$

$$-150 i_1 + 250 i_2 = 0$$
$$+250 i_1 - 150 i_2 = 12$$

Reduciendo:

$$\begin{bmatrix} -150 & 250 \\ 250 & -150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

L a matriz asociada al sistema es simétrica.

- Descomponiendo la matriz **A** en el producto de **LU**.

$$\begin{bmatrix} -150 & 250 \\ 250 & -150 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\sqrt{6}i & 0 \\ -50i/\sqrt{6} & 40/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5\sqrt{6}i & -50i/\sqrt{6} \\ 0 & 40/\sqrt{6} \end{bmatrix}$$

Nota: i sin subíndice representa a la unidad imaginaria .

.

Sustituyendo en el sistema original:

$$\begin{bmatrix} -150 & 250 \\ 250 & -150 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5\sqrt{6}i & 0 \\ -50i/\sqrt{6} & 40/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5\sqrt{6}i & -50i/\sqrt{6} \\ 0 & 40/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Agrupando el producto **Ux** = **c**

$$\begin{bmatrix} 5\sqrt{6}i & 0 \\ -50i/\sqrt{6} & 40/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Usando el método de Gauss con sustitución hacia adelante para resolver para **c**:

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = \left(12 - \frac{-50i}{\sqrt{6}} c_1\right)\left(\frac{\sqrt{6}}{40}\right) = \frac{12\sqrt{6}}{40} = \frac{3\sqrt{6}}{10}$$

- Ahora el producto **Ui**:

$$\mathbf{Ui} = \begin{bmatrix} 5\sqrt{6}i & -50i/\sqrt{6} \\ 0 & 40/\sqrt{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3\sqrt{6}/10 \end{bmatrix} = \mathbf{c}$$

Usando el método de Gauss con sustitución hacia atrás para determonar las corrientes:

$$i_2 = \left(\frac{3\sqrt{6}}{10}\right)\left(\frac{\sqrt{6}}{40}\right) = \frac{18}{400} = 0.045A$$

$$i_1 = \left(0 - \left(\frac{-50i}{\sqrt{6}}\right)\left(\frac{18}{400}\right)\right)\frac{1}{5\sqrt{6}i} = \frac{3}{40} = 0.075A$$

Comprobando:

$$-150\left(\frac{3}{40}\right)+250\left(\frac{18}{400}\right)=0$$

$$+250\left(\frac{3}{40}\right)-150\left(\frac{18}{400}\right)=12$$

La corriente buscada es 0.03 A.

Conclusión:

- El método de descomposición **LU** es un método semi-numérico que no tiene criterio de convergencia y no requiere aproximación inicial, sin embargo es aplicable cuando las matrices se pueden resolver por el método de Gauss sin intercambio de renglones.
- Para aplicar *Cholesky* se debe verificar que la matriz asociada sea simétrica.
- Con este método se pueden resolver sistemas de un gran número de ecuaciones.