Método de Gauss – Seidel.

El método de Gauss – Seidel es un método de aproximaciones sucesivas, el cual, como todos los métodos iterativos, se basa en la aplicación de una fórmula de recurrencia. Supongamos que tenemos un sistema de ecuaciones como sigue:

$$A_{1,1}x_1 + A_{1,2}x_2 + \dots + A_{1,n}x_n = B_1$$

$$A_{2,1}x_1 + A_{2,2}x_2 + \dots + A_{2,n}x_n = B_2$$

$$A_{n,1}x_1 + A_{n,2}x_2 + ... + A_{n,n}x_n = B_n$$

y deseamos conocer los valores de x_i con i=1, 2, 3,...,n. Entonces despejamos x_I de la primera ecuación, x_2 de la segunda y así sucesivamente:

$$x_{1} = \frac{B_{1} - A_{12}x_{2} - \dots - A_{1n}x_{n}}{A_{11}}$$

$$x_{2} = \frac{B_{2} - A_{21}x_{1} - \dots - A_{2n}x_{n}}{A_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_{n} = \frac{B_{n} - A_{n1}x_{1} - \dots - A_{nn-1}x_{n-1}}{A_{nn}}$$
(1)

y como en todos los métodos iterativos estudiados en el capitulo anterior, se requiere una aproximación inicial, consideremos como aproximación inicial el vector:

$$\mathbf{\bar{x}}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_1^{(0)} \\ x_2^{(0)} \\ \vdots \\ x_n^{(0)} \end{bmatrix}$$

que al sustituir en la expresión para x_I nos da una mejor aproximación de x_I .

$$x_1^{(1)} = \frac{B_1 - A_{12} x_2^{(0)} - \dots - A_{1n} x_n^{(0)}}{A_{11}}$$

Ahora podemos sustituir la aproximación inicial en la igualdad para x_2 , y así obtener una mejor aproximación de ella.

$$x_2^{(1)} = \frac{B_2 - A_{21} x_1^{(0)} - \dots - A_{2n} x_n^{(0)}}{A_{22}}$$

Pero conocemos previamente una mejor aproximación de x_1 , esta es $x_1^{(1)}$ y puede utilizarse en la expresión para x_2 , es decir que x_2 se aproxima mejor por:

$$x_2^{(1)} = \frac{B_2 - A_{21} x_1^{(1)} - \dots - A_{2n} x_n^{(0)}}{A_{22}}$$

En este momento ya contamos con aproximaciones para x_1 y x_2 , mejores que las aproximaciones iníciales y que pueden ser usadas para estimar una mejor aproximación de x_3 . Y así sucesivamente construimos el vector:

$$\mathbf{\bar{x}}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ x_2^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}$$

vector que usaremos para construir una mejor aproximación a la solución. Por lo que las expresiones de recurrencia quedan como sigue:

$$x_{1}^{(k+1)} = \frac{B_{1} - A_{12}x_{2}^{(k)} - \dots - A_{1n}x_{n}^{(k)}}{A_{11}}$$

$$x_{2}^{(k+1)} = \frac{B_{2} - A_{21}x_{1}^{(k+1)} - \dots - A_{2n}x_{n}^{(k)}}{A_{22}}$$

$$\vdots$$

$$x_{n}^{(k+1)} = \frac{B_{n} - A_{n1}x_{1}^{(k+1)} - \dots - A_{nn-1}x_{n-1}^{(k+1)}}{A_{nn}}$$

$$(2)$$

Ahora surge la siguiente pregunta: ¿Hasta cuándo iteramos?

Al igual que en los métodos vistos en la unidad dos, detenemos el proceso de iteración cuando la diferencia absoluta entre dos aproximaciones consecutivas sea menor a un valor previamente fijado, pero ahora debemos considerar todas y cada una de las componentes del vector que aproxima a la solución. Matemáticamente esto se escribe así:

$$\left| \vec{x}^{(k+1)} - \vec{x}^{(k)} \right| \langle \vec{\varepsilon} \tag{3}$$

donde $\vec{\varepsilon}$, es el vector cuyos elementos son todos iguales a ε , es decir que la componente i-ésima del vector que aproxima a la solución debe satisfacer:

$$\left|x_i^{(k+1)}-x_i^{(k)}\right| \langle \mathcal{E}$$

O bien:

$$m \acute{a} x \Big\{ x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \Big| \Big\} \varepsilon$$
 para $i = 1, 2, 3, ..., n$.

 Si la matriz asociada es diagonalmente dominante se garantiza que el método de Gauss – Seidel converge, pero cuando no lo es, no existe garantía de la divergencia del método.

EJEMPLO:

Utilizando el método de Gauss - Seidel resolver con un error menor a 0.0001 el siguiente sistema de ecuaciones:

$$12x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 1$$
$$3x_1 - 8x_2 - 3x_3 = 1$$
$$5x_1 + 4x_2 - 12x_3 = 3$$

Solución:

• Primero, verifiquemos si cumple el criterio de convergencia.

$$\begin{bmatrix} 12 & 3 & -5 \\ 3 & -8 & -3 \\ 5 & 4 & -12 \end{bmatrix}$$

Para el renglón 1: |3| + |-5| < |12|

El renglón 2: |3| + |-3| < |-8|

Renglón 3: |5| + |4| < |-12|

Por lo que cumple con el criterio de convergencia.

Despejamos a x_1 de la primera ecuación; x_2 de la segunda y x_3 de la tercera:

$$x_{1} = \frac{B_{1} - A_{12}x_{2} - A_{13}x_{3}}{A_{11}} = \frac{1 - 3x_{2} + 5x_{3}}{12}$$

$$x_{2} = \frac{B_{2} - A_{21}x_{1} - A_{23}x_{3}}{A_{22}} = \frac{1 - 3x_{1} + 3x_{3}}{8}$$

$$x_{3} = \frac{B_{3} - A_{31}x_{1} - A_{32}x_{2}}{A_{33}} = \frac{3 - 5x_{1} - 4x_{2}}{-12}$$

por lo que las expresiones de recurrencia son:

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1 - 3x_2^{(k)} + 5x_3^{(k)}}{12}$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1 - 3x_1^{(k+1)} + 3x_3^{(k)}}{8}$$

$$x_3^{(k+1)} = \frac{3 - 5x_1^{(k+1)} - 4x_2^{(k+1)}}{-12}$$

Sea ahora

$$\mathbf{\vec{x}}^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

calculamos los valores de cada componente de $\vec{x}^{\scriptscriptstyle (1)}$ esto es:

$$x_{1}^{(1)} = \frac{1 - 3x_{2}^{(0)} + 5x_{3}^{(0)}}{12} = \frac{1 - 3(0) + 5(0)}{12} = \frac{1}{12} = 0.0833$$

$$x_{2}^{(1)} = \frac{1 - 3x_{1}^{(1)} + 3x_{3}^{(0)}}{8} = \frac{1 - 3(0.0833) + 3(0)}{8} = -0.0938$$

$$x_{3}^{(1)} = \frac{3 - 5x_{1}^{(1)} - 4x_{2}^{(1)}}{-12} = \frac{3 - 5(0.0833) - 4(-0.09375)}{-12} = -0.2465$$

Por lo tanto la primera aproximación a la solución es el vector

$$\mathbf{\bar{x}}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0.0833 \\ -0.0937 \\ -0.2465 \end{pmatrix}.$$

El error de esta aproximación esta dado por:

$$e = m \acute{a} x \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right| = \left| x_3^{(1)} - x_3^{(0)} \right| = \left| -0.2465 - 0.0 \right| = 0.2465$$

Con estos valores calculamos ahora la segunda aproximación:

$$x_{1}^{(2)} = \frac{1 - 3x_{2}^{(1)} + 5x_{3}^{(1)}}{12} = \frac{1 - 3(-0.0937) + 5(-0.2465)}{12} = 0.0041$$

$$x_{2}^{(2)} = \frac{1 - 3x_{1}^{(2)} + 3x_{3}^{(1)}}{8} = \frac{1 - 3(0.0833) + 3(0)}{8} = -0.0310$$

$$x_{3}^{(2)} = \frac{3 - 5x_{1}^{(2)} - 4x_{2}^{(2)}}{-12} = \frac{3 - 5(0.0833) - 4(-0.0937)}{-12} = -0.2586$$

La segunda aproximación a la solución es el vector

$$\mathbf{\bar{x}}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0.0041 \\ -0.0310 \\ -0.2586 \end{pmatrix}.$$

Ahora el error de esta aproximación es:

$$e = m\acute{a}x\left\{x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right\} = \left|x_1^{(2)} - x_1^{(1)}\right| = \left|0.0041 - 0.0833\right| = 0.0792$$

La tercera iteración se calcula con este vector, a continuación se muestra una tabla con las iteraciones necesarias para obtener una aproximación a la solución con un error menor a .0001:

k	0	1	2	3	4	5	6	7
x_1^k	0	0.0833	0.0040	-0.0167	-0.0199	-0.0208	-0.0209	-0.0209
\mathbf{x}_{2}^{k}	0	-0.0938	-0.0310	-0.0342	-0.0318	-0.0319	-0.0318	-0.0318
x_3^k	0	-0.2465	-0.2586	-0.2684	-0.2689	-0.2693	-0.2693	-0.2693
e		0.2465	0.0792	0.0207	0.0032	0.0008	0.0001	< 0.0001

Una buena aproximación a la solución es:

$$x_1 = -0.0209$$
, $x_2 = -0.0319$, $x_3 = -0.2693$