Método de Krilov.

El problema de los valores característicos de una matriz cuadrada **A**, consiste en determinar los valores l que proporcione soluciones diferentes de la trivial al sistema lineal

$$\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$$

Es decir, soluciones tales que $\mathbf{x} \neq 0$. estos valores se llaman valores propios o característicos de la matriz **A**.

$$\begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{n,1} & A_{n,2} & \cdots & A_{n,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Esto imprica que:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Donde **I** representa a la matriz identidad.

El método de Krilov no tiene como objetivo encontrar los valores característicos de la matriz **A**, sólo permite encontrar el polinomio característico. El método se basa enla aplicación del teorema de Cayley – Hamilton, que establece que *toda matriz **A** verifica su propio polinomio característico*. Es decir, si

$$P(\lambda) = 0$$

Es el polinomio característico de **A**. entonces:

$$P(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^n\mathbf{y} + b_{n-1}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{y} + b_{n-2}\mathbf{A}^{n-2}\mathbf{y} + \ldots + b_1\mathbf{Ay} + b_0\mathbf{y} = 0.$$

Esta ecuación puede considerarse como un sistema lineal de las incógnitas b_i. Aplicando a un vector cualquiera la matriz **A** repetidas veces se construye el sistema de ecuaciones, resolviéndolo por cualquier método (Gauss, Gauss – Jordan, LU, etc), se obtienen los coeficientes del polinomio característico, y este puede ser resuelto por algún método oara encontrar raíces (Horner, Factores Cuadráticos, etc).

Teorema de Cayley – Hamilton: Si **A** es una matriz de $n \times n$, de polinomio característico $f(\lambda)$, entonces $f(\mathbf{A}) = 0$ es la matriz nula de $n \times n$.

Ejemplo del método de Krilov

Usando el método de Krilov encontrar los valores propios y vectores propios de la matriz.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución:

El polinomio característico de la matriz **A** es de grado 3, es decir, de la forma:

$$P(\lambda) = \lambda^3 + b_2\lambda^2 + b_1\lambda + b_0 = 0$$

De acuerdo con el teorema de Cayley – Hamiltón:

$$P(\lambda) = \mathbf{A}^3\mathbf{y} + b_2\mathbf{A}^2\mathbf{y} + b_1\mathbf{A}\mathbf{y} + b_0\mathbf{y} = \mathbf{0}$$

Elegimos un vector de 1 × 3, (funciona cualquier vector, pero este implica menos operaciones):

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Realizamos los productos:

$$\mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}\mathbf{y}) = \mathbf{A}^2\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{A}^2\mathbf{y}) = \mathbf{A}^3\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 29 \\ -16 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 177 \\ -108 \\ 18 \end{bmatrix}$$

Sustituyendo en *P(***A***)*:

$$P(\lambda)=\mathbf{A}^3\mathbf{y}+b_2\mathbf{A}^2\mathbf{y}+b_1\mathbf{A}\mathbf{y}+b_0\mathbf{y}=\begin{bmatrix}177\\-108\\18\end{bmatrix}+b_2\begin{bmatrix}29\\-16\\2\end{bmatrix}+b_1\begin{bmatrix}5\\-2\\0\end{bmatrix}+b_0\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}=\mathbf{0}$$

Pasando el término independiente al lado derecho de la igualdad:

$$b_2\begin{bmatrix}29\\-16\\2\end{bmatrix}+b_1\begin{bmatrix}5\\-2\\0\end{bmatrix}+b_0\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-177\\108\\-18\end{bmatrix}$$

En forma matricial, tenemos:

$$\begin{bmatrix}29&5&1\\-16&-2&0\\2&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_2\\b_1\\b_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-177\\108\\-18\end{bmatrix}$$

Resolviendo por Gauss con sustitución hacia atrás:

$$\begin{aligned}b_2&=-9\\b_1&=\frac{108+16(-9)}{-2}=18\\b_0&=-177-29(-9)-5(18)=-6\end{aligned}$$

Sustituyendo en *P(λ)*:

$$P(\lambda)=\lambda^3-9\lambda^2+18\lambda-6=0$$

Resolviendo por Horner, tomando como aproximación inicial x_0 = 3, (factor primo de 6):

$\mathbf{b_3}$	$\mathbf{b_2}$	$\mathbf{b_1}$	$\mathbf{b_0}$	$\mathbf{b'_2}$	$\mathbf{b'_1}$	$\mathbf{b'_0}$	$\mathbf{x_{n+1}}$	**error**
1	-6	0	-6	1	-3	-9	2.3333	0.6667
1	-6.6667	2.4444	-0.2963	1	-4.3333	-7.6667	2.2949	0.0384
1	-6.7053	2.613	-0.003	1	-4.4106	-7.5076	2.2943	0.0006

Lo que nos da un valor característico en λ = 2.2943
Y el polinomio reducido es:

$$Q(\lambda)=\lambda^2-6.7053\lambda+2.613=0$$

Resolviendo por fórmula general tenemos los valores propios redondeados a 4 decimales:

$\lambda_+ = 0.4158$

$\lambda_- = 6.2899$

En los cursos de álgebra lineal estudiamos como hallar los vectores propios:

$$\begin{bmatrix} 5-\lambda_i & -2 & 0 \\ -2 & 3-\lambda_i & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda_i \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para el valor propio $\lambda = 6.2899$, tomamos $x_1 = 1$:

$$\begin{bmatrix} 5-6.2899 & -2 & 0 \\ -2 & 3-6.2899 & -1 \\ 0 & -1 & 1-6.2899 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1.2899 & -2 & 0 \\ -2 & -3.2899 & -1 \\ 0 & -1 & -5.2899 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

y trabajamos sólo con las ecuaciones 2 y 3:

$$\begin{bmatrix} -3.2899 & -1 \\ -1 & -5.2899 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo por Crout:

Hallamos las matrices **L** y **U**:

$$\begin{bmatrix} -3.2899 & -1 \\ -1 & -5.2899 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -3.2899 & 0 \\ -1 & -4.9859 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0.3040 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo **L***c*

$$\begin{bmatrix} -3.2899 & 0 \\ -1 & -4.9859 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$c_2 = -0.6079$$
$$c_3 = 0.1219$$

Resolviendo **U***x*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0.3040 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -0.6079 \\ 0.1219 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$x_2 = -0.6450$$
$$x_3 = 0.1219$$

Por lo tanto el vector propio correspondiente a $\lambda = 6.2899$ es:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0.6450 \\ 0.1219 \end{bmatrix}$$

Comprobando:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -0.6450 \\ 0.1219 \end{bmatrix} = 6.2899 \begin{bmatrix} 1 \\ -0.6450 \\ 0.1219 \end{bmatrix}$$

Con un error menor a 0.0001.

Para el valor propio $\lambda = 2.2943$, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 5-2.2943 & -2 & 0 \\ -2 & 3-2.2943 & -1 \\ 0 & -1 & 1-2.2943 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.7057 & -2 & 0 \\ -2 & 0.7057 & -1 \\ 0 & -1 & -1.2943 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ 1 \\ x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tomamos $x_2 = 1$ y trabajamos sólo con las ecuaciones 2 y 3:

$$\begin{bmatrix} 2.7057 & 0 \\ 0 & -1.2943 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo por Gauss - Jordán tenemos:

$$x_1 = \frac{2}{2.7057} = 0.7392$$

$$x_3 = \frac{1}{-1.2943} = -0.7726$$

Por lo tanto el vector propio correspondiente a $\lambda = 2.2943$ es:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0.7392 \\ 1 \\ -0.7726 \end{bmatrix}$$

Comprobando con un error menor a 0.0001:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7392 \\ 1 \\ -0.7726 \end{bmatrix} = 2.2943 \begin{bmatrix} 0.7392 \\ 1 \\ -0.7726 \end{bmatrix}$$

Para el valor propio $\lambda = 0.4158$, tenemos:

$$\begin{bmatrix} 5-0.4158 & -2 & 0 \\ -2 & 3-0.4158 & -1 \\ 0 & -1 & 1-0.4158 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.5842 & -2 & 0 \\ -2 & 2.5842 & -1 \\ 0 & -1 & 0.5842 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tomamos $x_2 = 1$ y trabajamos sólo con las ecuaciones 1 y 2:

$$\begin{bmatrix} 4.5842 & -2 \\ -2 & 2.5842 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como la matriz es simétrica se puede resolver por Cholesky:

Hallamos las matrices **L** y **U**:

$$\begin{bmatrix} 4.5842 & -2 \\ -2 & 2.5842 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.1411 & 0 \\ -0.9341 & 1.3083 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2.1411 & -0.9341 \\ 0 & 1.3083 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo **L***c*

$$\begin{bmatrix} 2.1411 & 0 \\ -0.9341 & 1.3083 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$c_1 = 0$$
$$c_2 = 0.7644$$

Resolviendo **U***x*

$$\begin{bmatrix} 2.1411 & -0.9341 \\ 0 & 1.3083 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7644 \end{bmatrix}$$

De donde:

$$x_2 = \frac{0.7644}{1.3083} = 0.5843$$
$$x_1 = \frac{0 + 0.9341(0.5843)}{2.1411} = 0.2549$$

Por lo tanto el vector propio correspondiente a $\lambda = 0.4158$ es:

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0.2549 \\ 0.5843 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Comprobando:

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.2549 \\ 0.5843 \\ 1 \end{bmatrix} = 0.4158 \begin{bmatrix} 0.2549 \\ 0.5843 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Con un error del orden de 0.0001.

Conclusiones:

El método de Krilov termina cuando tenemos el polinomio característico, resolverlo para encontrar los valores propios o característicos implica usar otros métodos numéricos o analíticos.

Para obtener los vectores característicos se recurre a métodos estudiados en los cursos de álgebra lineal, con la variante de asignar un valor a alguna de las componentes, pues al programar este método no es posible calcular las componentes en función de una de ellas.

Para construir el polinomio se puede usar cualquier vector, pero se sugiere utilizar el implique menos operaciones u operaciones más simples.

En nuestro ejemplo, se obtuvieron los tres valores característicos y sus vectores correspondientes.