Aproximación numérica y errores

Métodos numéricos

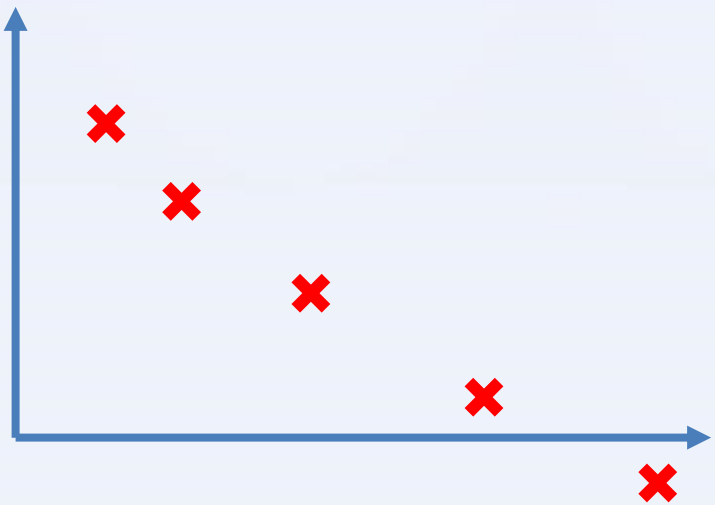
Son ***herramientas alternativas que nos facilitan el trabajo*** para resolver problemas matemáticos en los cuales se dificultad el uso de los métodos analíticos tradicionales.

Aproximación numérica y errores

Análisis matemático

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{df(3x^2)}{dx} = 6x$$

Análisis numérico



Transformación de datos obtenidos en un fenómeno (real o experimento) a funciones aproximadas que nos permitirán obtener valores semejantes a los reales (con un error no significativo)

Matemáticas aplicadas

Aproximación numérica y errores

Análisis numérico

Solución de problemas que seria muy complejo resolver con el análisis matemático tradicional.

	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7	g_8	g_9	g_{10}
g_1	0.0	8.1	9.2	7.7	9.3	2.3	5.1	10.2	6.1	7.0
g_2	8.1	0.0	12.0	0.9	12.0	9.5	10.1	12.8	2.0	1.0
g_3	9.2	12.0	0.0	11.2	0.7	11.1	8.1	1.1	10.5	11.5
g_4	7.7	0.9	11.2	0.0	11.2	9.2	9.5	12.0	1.6	1.1
g_5	9.3	12.0	0.7	11.2	0.0	11.2	8.5	1.0	10.6	11.6
g_6	2.3	9.5	11.1	9.2	11.2	0.0	5.6	12.1	7.7	8.5
g_7	5.1	10.1	8.1	9.5	8.5	5.6	0.0	9.1	8.3	9.3
g_8	10.2	12.8	1.1	12.0	1.0	12.1	9.1	0.0	11.4	12.4
g_9	6.1	2.0	10.5	1.6	10.6	7.7	8.3	11.4	0.0	1.1
g_{10}	7.0	1.0	11.5	1.1	11.6	8.5	9.3	12.4	1.1	0.0

Solución de un sistema de ecuaciones de muchas incógnitas

$$\int 1 \frac{\ln\left(\cos\left(e^{3x} - \ln(3 * x)\right)\right)}{\cosh\left(1/\sqrt{2 + x^2}\right)}$$

Integral de una función compleja

Aproximación numérica y errores

¿Cuándo usarlos?

Se utilizan principalmente en aquellos problemas en los que ***el uso*** de alguna herramienta analítica o matemática tradicional requiera de ***mucho esfuerzo o que no tenga una solución exacta***.

Por ejemplo para encontrar la solución a ecuación siguiente, no podríamos despejar la variable x para encontrar la solución de manera directa y exacta.

$$e^x = \frac{1}{x}$$

Aproximación numérica y errores

¿Cuándo usarlos?

Por ejemplo en la matemática tradicional se pensaría en despejar la x:

$$e^x = \frac{1}{x} \longrightarrow \ln\left(xe^x\right) = 1$$

No se puede despejar

$$\ln\left(x\right)\ln\left(e^x\right) = 1 \longrightarrow \ln\left(x\right)x = 1$$

Aproximación numérica y errores

¿Cuándo usarlos?

Manejarlas como dos funciones separadas y dándole valores a x hasta aproximarnos a que las dos funciones tengan un valor igual:

$$f(x) = e^{x} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{g(x)} = \frac{1}{x}$$

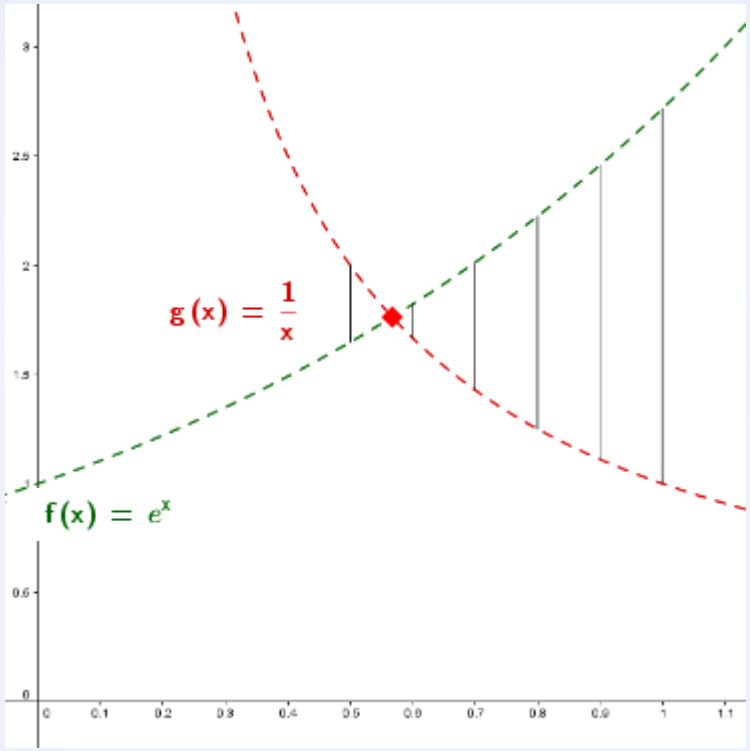
Aproximación numérica y errores

¿Cuándo usarlos?

x	f(x)	g(x)	f(x)-g(x)
1	2.718	1	1.718
2	7.389	0.5	6.889
0	1	Indefinido	Indefinido
.5	1.649	2	-.351
.6	1.822	1.667	0.155
.55	1.773	1.818	-.085
.56	1.751	1.786	-.0335
.57	1.768	1.754	0.014
.565	1.759	1.77	-0.010
.567	1.763	1.764	-6.982*10^-4

Aproximación numérica y errores

¿Cuándo usarlos?



Aproximación numérica y errores

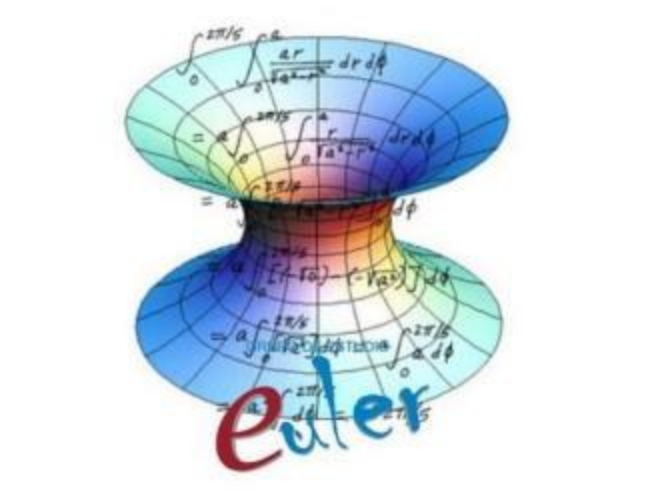
¿Cuándo usarlos?

Al utilizar cualquier métodos numérico debe procurarse que el tiempo invertido en la búsqueda de una solución, sea menor al que hubiéramos utilizado al resolverlo manualmente.

Aproximación numérica y errores

¿Cuándo usarlos?

Los métodos numéricos pueden realizarse manualmente con papel y lápiz, pero para poder sacarle el máximo provecho es conveniente utilizar las herramientas tecnológicas como son las computadoras o incluso las calculadoras programables, tabletas o teléfonos inteligentes.



Aproximación numérica y errores

Necesidad de los métodos numéricos

Entonces surge la ***necesidad*** de los ***métodos numéricos*** para acortar el tiempo de solución.

Pero además no solo podemos tomar como base los métodos ya existentes, sino todos tenemos la capacidad de crear nuestros propios métodos para solucionar un problema en específico.

No es necesario que sean muy complicados sino que deben cumplir con el objetivo con que fueron creados.

Aproximación numérica y errores

Necesidad de los métodos numéricos

En el ejercicio anteriormente visto se llegaron a necesitar 10 iteraciones para encontrar una solución aproximada a 3 dígitos significativos. Pero si se quisiera una mejor precisión esas iteraciones podrían convertirse en miles o incluso millones.

Aproximación numérica y errores

Aproximación numérica y error

Lo aconsejable al ejecutar un método numérico al no conocerse una solución exacta, es acotar el análisis a:

Determinar el mínimo error permitido y donde se presente dicho valor se terminará la ejecución del método.

Error o tolerancia máxima → Solución aproximada aceptable

Aproximación numérica y errores

Aproximación numérica y error

Para ciertos problemas matemáticos no es posible obtener una solución exacta sino una aproximación al valor real, por lo cual se recurre al concepto de ***error***:

Los errores numéricos se generan por diversas causas y pueden ser calculados por la siguiente formula:

$$\textit{Valor verdadero (o límite)} = \textit{aproximación} + \textit{error}$$

$$\Downarrow$$

$$\textit{Error} = \textit{Valor verdadero} - \textit{aproximación}$$

Aproximación numérica y errores

Aproximación numérica y error

Al no conocer el valor verdadero (por que es el valor que estamos buscando), una buena técnica es igualar a cero la ecuación y considerar como valor verdadero dicho valor.

$$e^x = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad e^x - \frac{1}{x} = 0 \quad \Rightarrow$$

Valor verdadero= 0

Aproximación numérica y errores

Aproximación numérica y error

La definición anterior no toma en cuenta la magnitud de la medición.

Ejemplo:

Un error de $1\ cm.$ es mucho más significativo si se está midiendo una hoja tamaño carta, que un puente.

Aproximación numérica y errores

Aproximación numérica y error

Una manera de tener en cuenta la magnitud es normalizar el error respecto a un valor de referencia, a esta nueva forma de redefinir el error se le llama ***Error Relativo***:

$$\text{Error relativo} = \frac{\left(\text{Valor real} - \text{valor aproximado}\right)}{\text{valor real}}$$

Aproximación numérica y errores

Aproximación numérica y error

Si se quiere obtener en porcentajes se utiliza el ***Error Relativo porcentual***:

$$\text{Error relativo porcentual} = \left| \frac{(\text{Valor real} - \text{valor aproximado})}{\text{valor real}} \right| (100)$$

Aproximación numérica y errores

Aproximación numérica y error

En nuestro ejemplo tendríamos un error si aplicamos la formula anterior:

$$\mathrm{ERP} = \left|\frac{(\mathrm{Vr} - \mathrm{Va})}{\mathrm{Vr}}\right|(100) = \left|\frac{(0 - 1.178)}{0}\right|(100) = \frac{117.8}{0}$$

Aproximación numérica y errores

Aproximación numérica y error

Para evitar ese error podríamos manejar un valor real aproximado a cero:

$$\mathrm{ERP} = \left|\frac{(\mathrm{Vr} - \mathrm{Va})}{\mathrm{Vr}}\right|(100) = \left|\frac{(0.00001 - 1.178)}{0.00001}\right|(100) = 117 \quad \%$$

Aproximación numérica y errores

Aproximación numérica y error porcentual

Vr=0.000001

x	Va	Error relativo %
1	1.718	
2	6.889	
0	Indefinido	
.5	-.351	
.6	0.155	
.55	-.085	
.56	-.0335	
.57	0.014	
.565	-0.010	
.567	-6.982*10^-4	

Aproximación numérica y errores

Aproximación numérica y error porcentual

Vr=0.000001

x	Va	Error relativo %
1	1.718	117.700
2	6.889	68.8800
0	Indefinido	Indefinido
.5	-.351	3.5200
.6	0.155	1.5400
.55	-.085	0.8600
.56	-.0335	3.3600
.57	0.014	0.1300
.565	-0.010	0.1100
.567	-6.982*10^-4	0.0169.82

Aproximación numérica y errores

Fuentes principales para generar un error numérico:

- ✓ Errores en la entrada de datos
- ✓ Errores de redondeo en los datos y en los cálculos
- ✓ Errores por el truncamiento de la ejecución del método
- ✓ Errores de inestabilidad y control

Aproximación numérica y errores

Estabilidad y convergencia de un método numérico

Se entiende por ***convergencia de un método*** numérico la garantía de que, al realizar un buen número de repeticiones (iteraciones), las aproximaciones obtenidas terminan por acercarse cada vez más al verdadero valor buscado.

En la medida en la que un método numérico requiera de un menor número de iteraciones que otro, para acercarse al valor numérico deseado, se dice que tiene una mayor ***rapidez de convergencia****.*

Aproximación numérica y errores

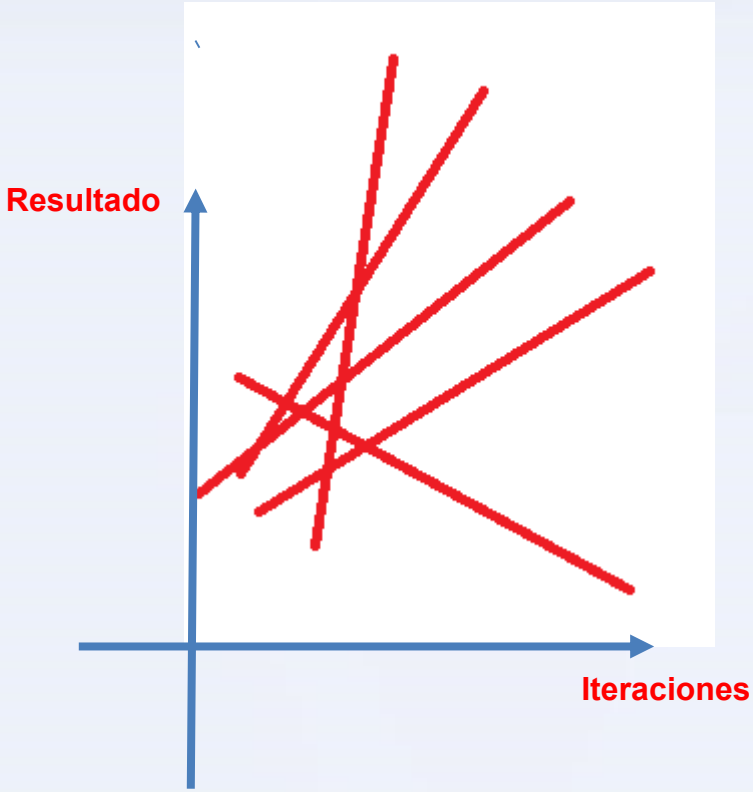
Estabilidad y convergencia de un método numérico

*Se entiende por **estabilidad** de un método numérico el nivel de garantía de convergencia, y es que algunos métodos numéricos no siempre convergen y, por el contrario divergen; es decir, se alejan cada vez más y más del resultado deseado.*

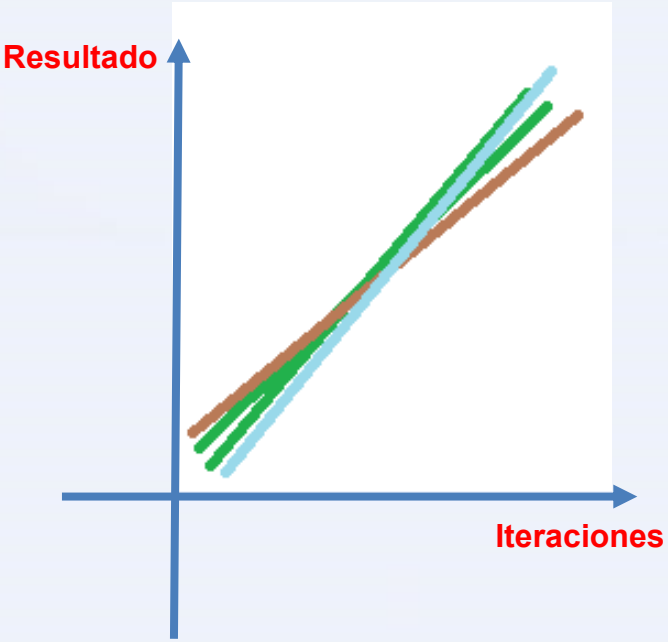
*En la medida en la que un método numérico, ante una muy amplia gama de posibilidades de modelado matemático, es más seguro que converja que otro, entonces se dice que tiene una **mayor estabilidad**.*

Aproximación numérica y errores

Estabilidad y convergencia de un método numérico



Método muy inestable



Método muy estable

Aproximación numérica y errores

Estabilidad y convergencia de un método numérico

De las graficas anteriores podemos ver que el primer método si no se selecciona una distancia muy pequeña corre el peligro de ser divergente, por lo cual es un método inestable.

El segundo método como se van realizando aproximaciones cada vez mas cercanas es un método estable.

Normalmente se puede encontrar métodos que ***convergen rápidamente****, pero son demasiado* ***inestables*** *y, por el contario, modelos* **muy estables***, pero de* ***lenta convergencia****.*

Aproximación numérica y errores

Estabilidad y convergencia de un método numérico

*En Métodos numéricos la **velocidad** con la cual una sucesión converge a su límite es llamada **orden de convergencia**.*

*Este concepto es, desde el punto de vista práctico, muy importante si necesitamos trabajar con secuencias de **aproximaciones sucesivas** con un método iterativo.*

Incluso puede hacer la diferencia entre necesitar diez o un millón de iteraciones.

Aproximación numérica y errores

Tasa o velocidad de convergencia

La tasa o velocidad de convergencia se calcula de la siguiente manera:

Sea una Sucesión $Yn_{n=0}^{\infty}$ *Que converge en* α (valor real)

Con error $e_n = \left|\mathrm{Y_n} - \alpha\right|$

Si C (c=>0) y P (p>=1) existen cuando => $\lim_{n\to\infty} \frac{|e_{n+1}|}{|e_n|^p} = \lim_{n\to\infty} \frac{|Y_{n+1} - \alpha|}{|Y_n - \alpha|^p} = C$

Diferente de cero

La sucesión converge α *con orden p*

C=> Constante asintótica del error
P=> Rango de convergencia

Aproximación numérica y errores

Tasa o velocidad de convergencia

Si p=1 => Convergencia lineal
Si 1<p<2=> Convergencia superlineal
Si p=2 => Convergencia cuadrática
Si 2<p<3 => Convergencia supercuadrática
Si p=3=> Convergencia cúbica

En general cuando el rango de convergencia P sea mas grande, el método Se aproximada más rápido a la solución.

Aproximación numérica y errores

Aproximación de funciones por medio de polinomios

En muchas de las ocasiones en la ingeniería no es necesario obtener el valor exacto de una función, sino basta con tener un valor aproximado muy cercano al real.

Una de las técnicas más socorridas del análisis numérico es la transformación de una función a un polinomio, el cual es más fácil de manipular.

El más conocido y usado en varias área de la ingeniería es el polinomio de Taylor.

$$p(x) = f(a) + \frac{f'(x)}{1!}(x-a)^1 + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Si a=0 => Se denomina polinomio de Mc Laurin

Aproximación numérica y errores

Aproximación de funciones por medio de polinomios

Calcular el polinomio de Taylor de 5er grado cuando a=0, para la siguiente función.

Comparar el valor de la función original y el polinomio de Taylor en $\pi/4$ Y calcular el error relativo porcentual en dicho punto.

$$f(x) = \cos(x)$$

Aproximación numérica y errores

Aproximación de funciones por medio de polinomios

Calculando las derivadas:

$$f(x) = \cos(x)$$

$$f'(x) = -sen(x)$$

$$f''(x) = -\cos(x)$$

$$f''''(x) = sen(x)$$

$$f^{\mathrm{IV}}(x) = \cos(x)$$

$$f^{V}(x) = -sen(x)$$

Aproximación numérica y errores

Aproximación de funciones por medio de polinomios

Aplicando la estructura del polinomio de Taylor:

$$p(x)=\cos(0)-\frac{sen(0)}{1!}(x-0)^1-\frac{\cos(0)}{2!}(x-0)^2+\frac{\sin(0)}{3!}(x-0)^3+\frac{\cos(0)}{4!}(x-0)^4-\frac{\sin(0)}{5!}(x-0)^5$$

$$\Downarrow$$

$$p(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

Aproximación numérica y errores

Aproximación de funciones por medio de polinomios

Aplicando la estructura del polinomio de Taylor:

$$p(x)=\cos(0)-\frac{sen(0)}{1!}(x-0)^1-\frac{\cos(0)}{2!}(x-0)^2+\frac{\sin(0)}{3!}(x-0)^3+\frac{\cos(0)}{4!}(x-0)^4-\frac{\sin(0)}{5!}(x-0)^5$$

$$\Downarrow$$

$$p(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

Aproximación numérica y errores

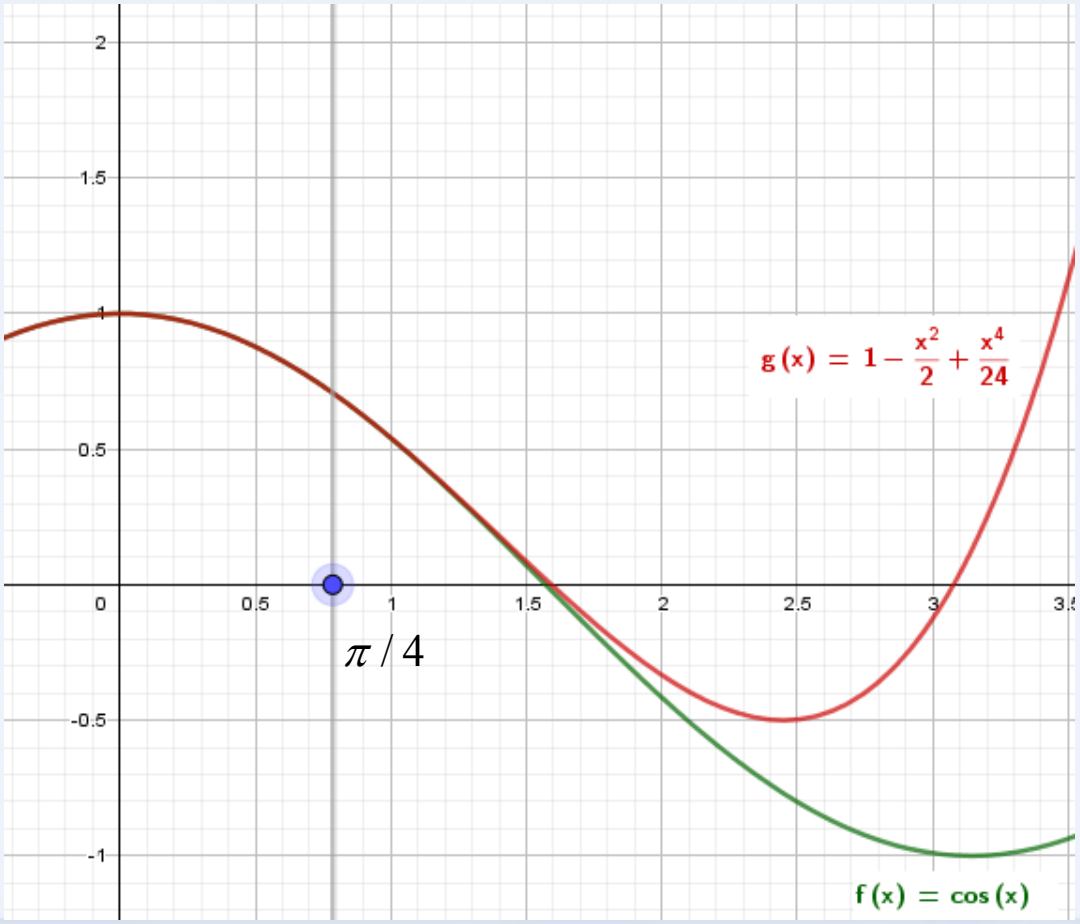
Aproximación de funciones por medio de polinomios

Graficando y evaluando la función f(x) y el polinomio de Taylor:

$$f(\pi/4) = \cos((\pi/4)) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$f(\pi/4) = 0.7071067812$$

$$p(\pi/4) = 1 - \frac{(\pi/4)^2}{2} + \frac{(\pi/4)^4}{24}$$

$$p(\pi/4) = 0.7074292067$$

$$ERP = 0.0455979\%$$