Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados

En estos métodos se encierra la función en un intervalo donde dicha función cambia de signo para forzar que se presente una raíz dentro de ese intervalo y luego empezar a reducir por medio de algoritmos el tamaño del intervalo.

Los métodos cerrados más conocidos son:

- ✓ Método de bisección
- ✓ Método de la regla falsa (Secante)

Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Bisección

Este método se basa en los teoremas de Bolzano y de valor medio y se emplea para aproximar funciones a un valor de cero.

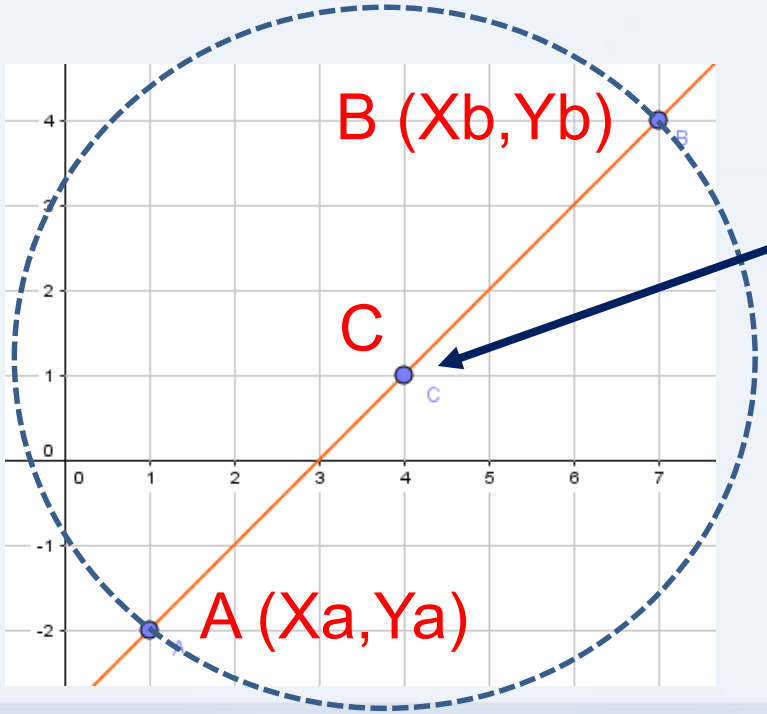
Supóngase que queremos encontrar los ***ceros*** de una función ***f(x)*** continua. Dados dos puntos ***a*** y ***b*** tal que ***Ya=f(a)*** y ***Yb=f(b)*** tengan ***signos distintos***, sabemos por el ***Teorema de Bolzano*** que f(x) debe tener, ***al menos, una raíz*** en el intervalo ***[Xa, Xb].***

El método busca encontrar una de las raíces de la función f(x)

Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Bisección

Este método divide el intervalo en dos, usando un tercer punto c que se encuentra a la mitad de dichos puntos:



$$X_C = \frac{X_A + X_B}{2} = (4,1)$$

Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Bisección

Localizado dicho punto C. Se analizan los intervalos AC y CB para eliminar alguno de los puntos iniciales.

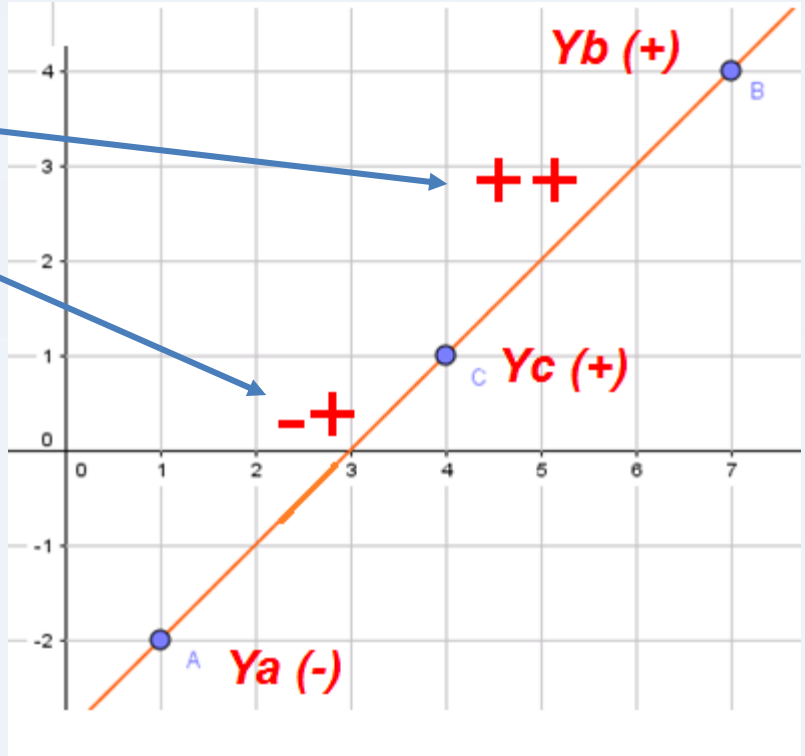
Se comparan los símbolos de las ordenadas en cada intervalo

Se eliminará aquel punto (A o B) donde los valores de sus ordenadas tengan el mismo símbolo

Para el caso en análisis se elimina B.

Para un segunda iteración la nueva B asumirá los valores de C obtenidos en la primera iteración.

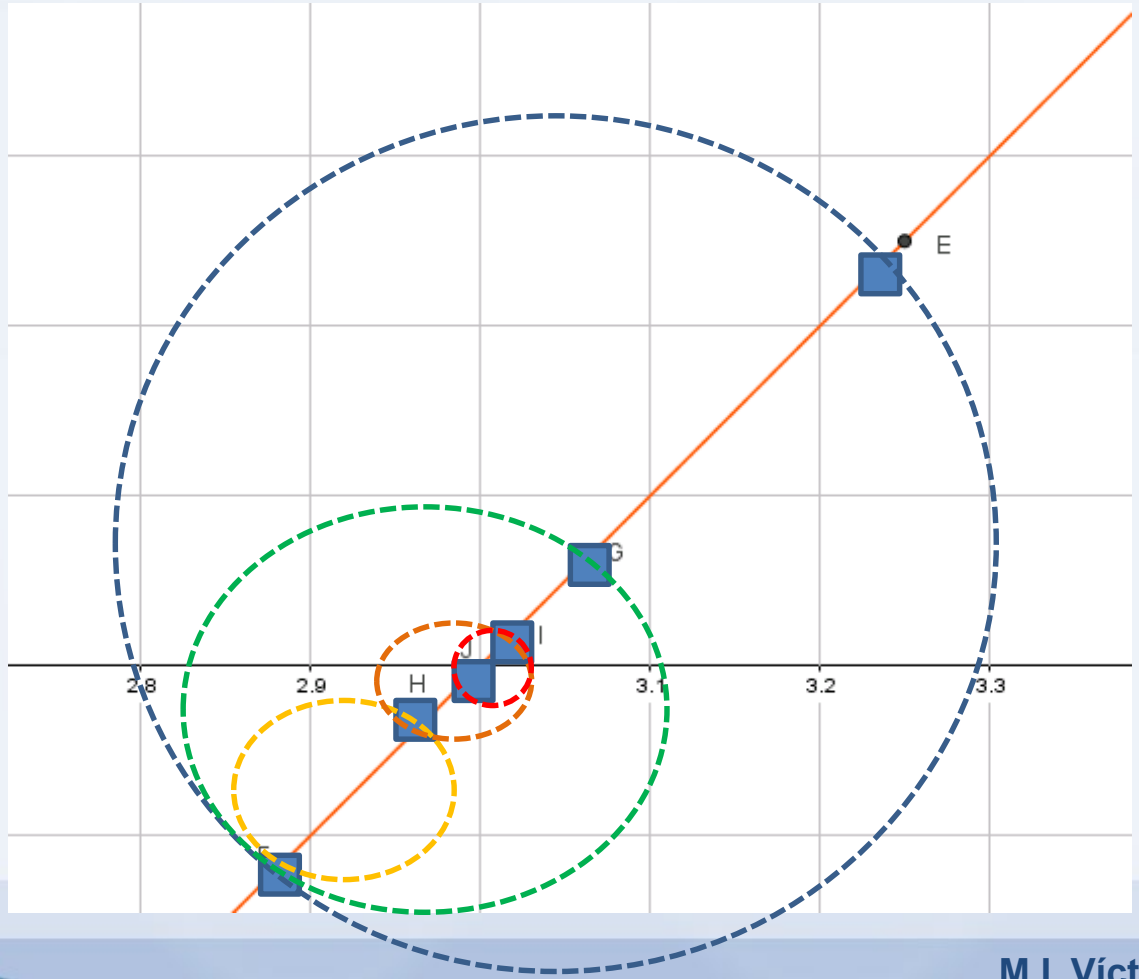
Xb=Xc



Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Bisección

El proceso de eliminación de algunos de los puntos de los intervalos se repetirá hasta que la ordenada del último C calculado sea menor a la tolerancia (previamente definida).

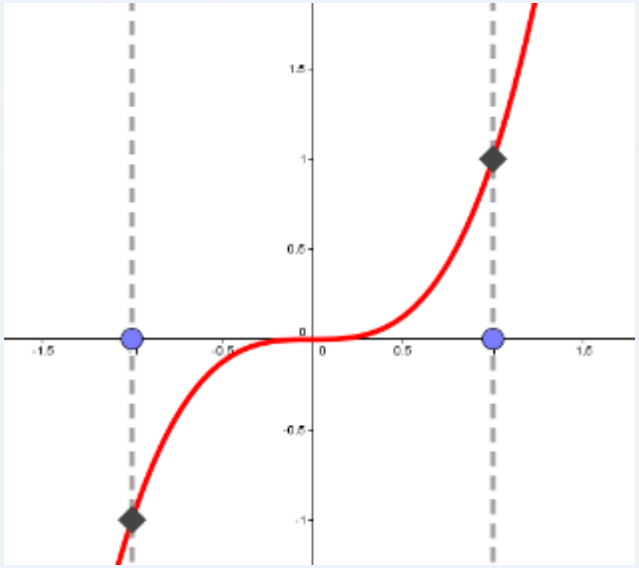


Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Bisección

Ejemplo: Para la siguiente función analizarla el intervalo [-3,2] y buscar la raíz que se encuentra en dicho intervalo.

$$f(x) = x^3$$



Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Bisección

Aplicando el teorema de bisección:

$$X_a = -3 \qquad f(-1) = (-3)^3 = -27$$

$$X_b = 2 \qquad f(2) = (2)^3 = 8$$

Hay un cambio de signo.

$$Xc = \frac{-3+2}{2} = \frac{-1}{2} \qquad f(X_c) = f\left(\frac{-1}{2}\right) = \left(\frac{-1}{2}\right)^3 = \frac{-1}{8}$$

Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Bisección

Aplicando una segunda interacción con base en los últimos valores obtenidos:

$$Xa = Xc$$

$$Xa = -1/2 \qquad f(-1/2) = \left(-1/2\right)^3 = -1/8$$

$$Xb = 2 \qquad f(2) = \left(2\right)^3 = 8$$

Hay un cambio de signo.

$$Xc = \frac{-1/2 + 2}{2} = \frac{3/2}{2} = \frac{3}{4} \longrightarrow f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$$

Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Bisección

Aplicando una tercera interacción con base en los últimos valores obtenidos:

$$Xb = c$$

$$Xa = -1/2 \qquad \text{f}(-1/2) = \left(-1/2\right)^3 = -1/8$$

Hay un cambio de signo.

$$Xb = 3/4 \qquad \text{f}(3/4) = \left(3/4\right)^3 = 27/64$$

$$Xc = \frac{-1/2 + 3/4}{2} = \frac{1/4}{2} = \frac{1}{8} \qquad f\left(\frac{1}{8}\right) = \left(\frac{1}{8}\right)^3 = \frac{1}{512}$$

Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Bisección

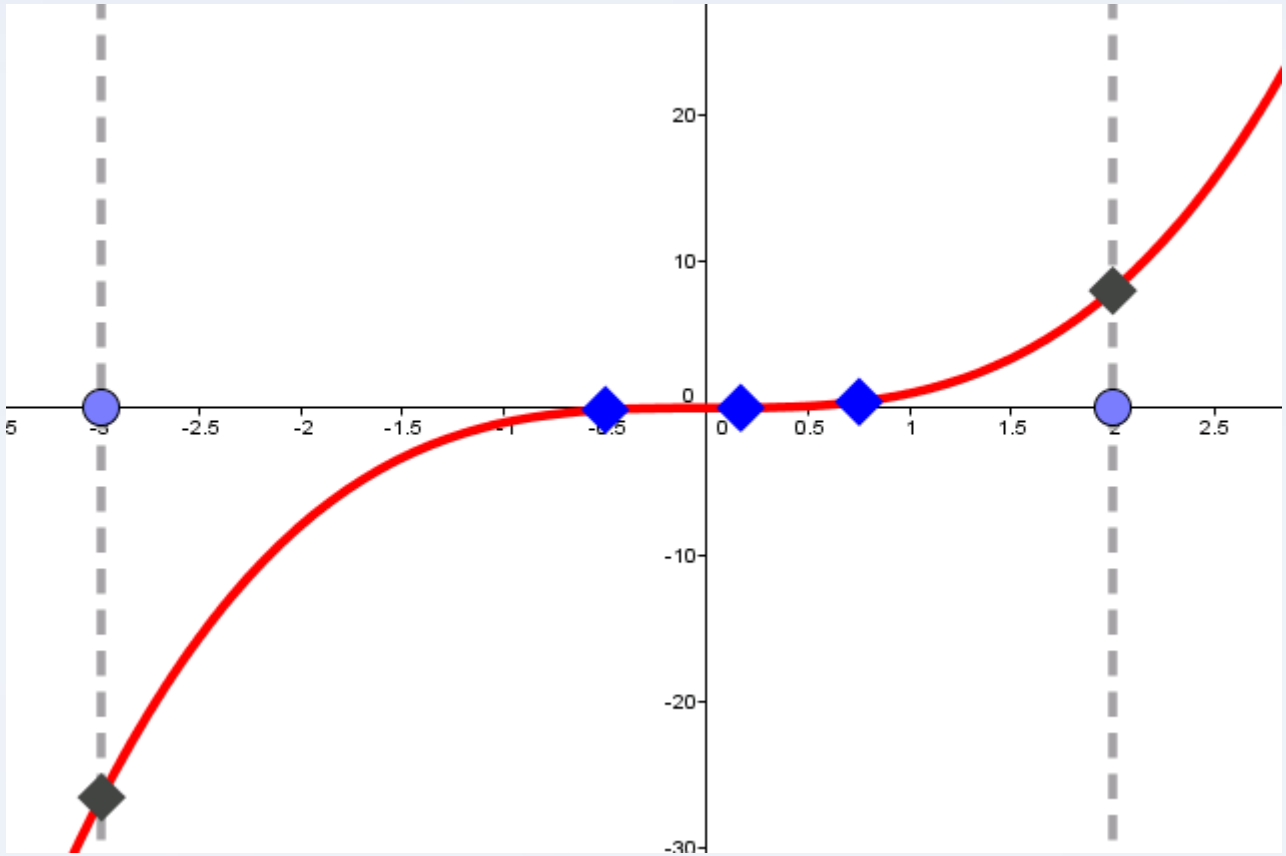
Para este ejemplo dependiendo de la precisión a la que se quiera llegar tendrían que realizarse más iteraciones:

$$f\left(\frac{1}{8}\right)=\left(\frac{1}{8}\right)^3=\frac{1}{512}=0.00193$$

Tiende a cero pero no es cero

Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Bisección



Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Bisección

Ejemplo: Realizar un algoritmo para la función del ejemplo anterior y obtener el un valor aproximado de c con una tolerancia de 5 dígitos.

$$f(x) = x^3$$

Intervalo = [-3,2]

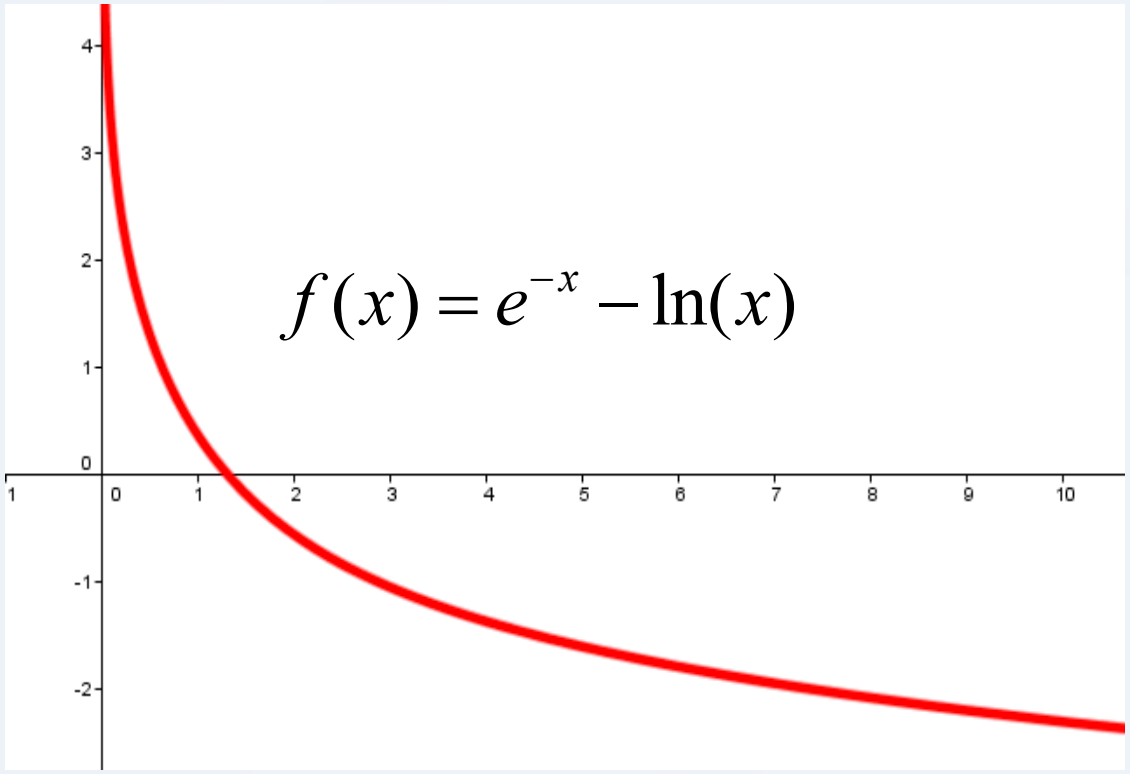
Tolerancia= 0.00001

Iteracciones máximas = 1000

Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Bisección

Ejemplo: Ajustar el algoritmo encontrado en el ejemplo anterior para buscar la raíz para la siguiente función, considerando una tolerancia de 0.001 unidades:

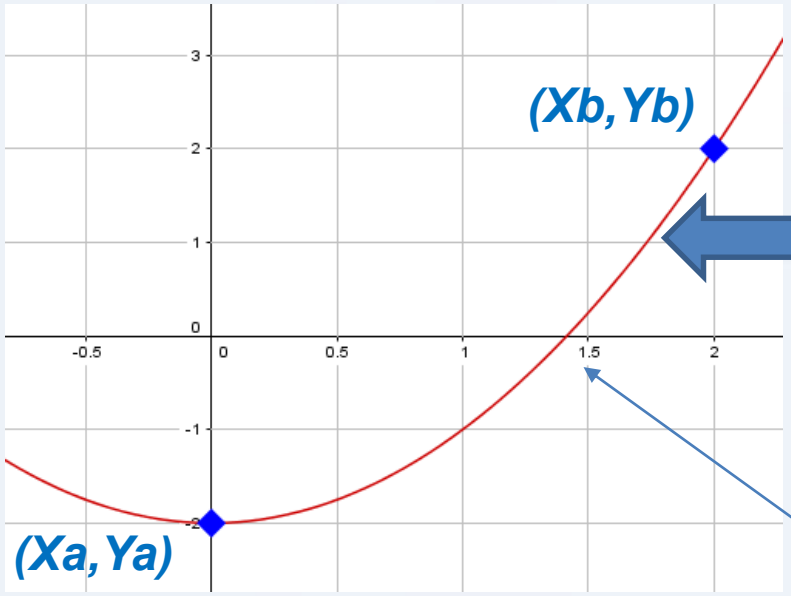


De la grafica podemos apreciar que la raíz se encuentra entre 1 y 2

Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Regla falsa (secante)

Un defecto del método de bisección es que al dividir el intervalo [A,B] en mitades iguales no se toma en cuenta la magnitud de f(A) y f(B).



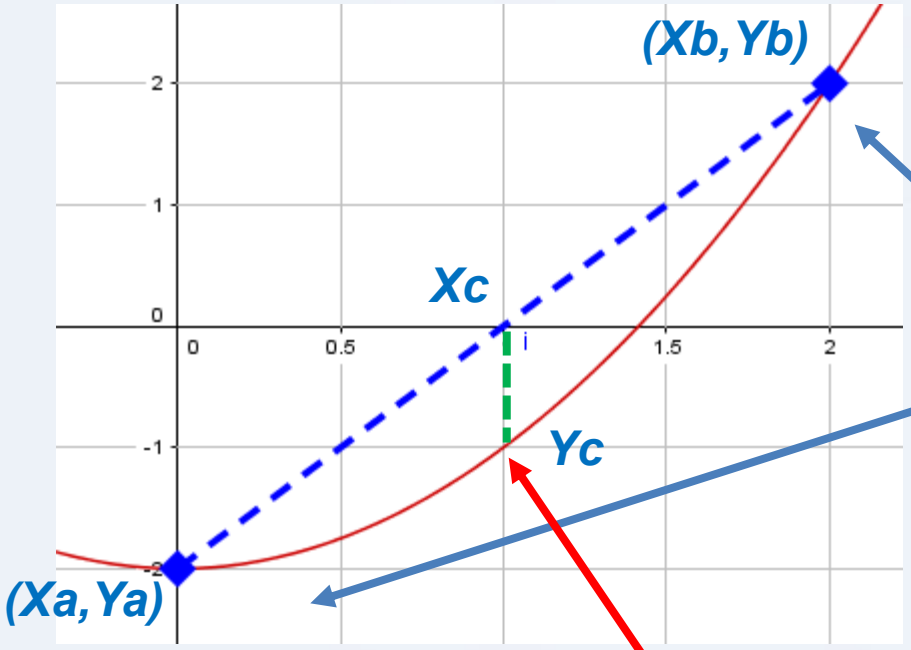
Para esta gráfica se nota que esta más cerca de la raíz B que A, y nos podríamos ahorrar iteraciones si tomáramos en cuenta esta observación

Función Continua en un determinado intervalo

Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Regla falsa (secante)

Este método comienzo creando una recta que pasa por los puntos A y B. La intersección de esa recta con el eje X corresponderá al abscisa de la solución aproximada.



Las ordenadas de los dos puntos deben ser de símbolos contrarios

Yc **Solución primera iteración (se debe comparar con el valor de la tolerancia)**

Aproximación numérica y errores

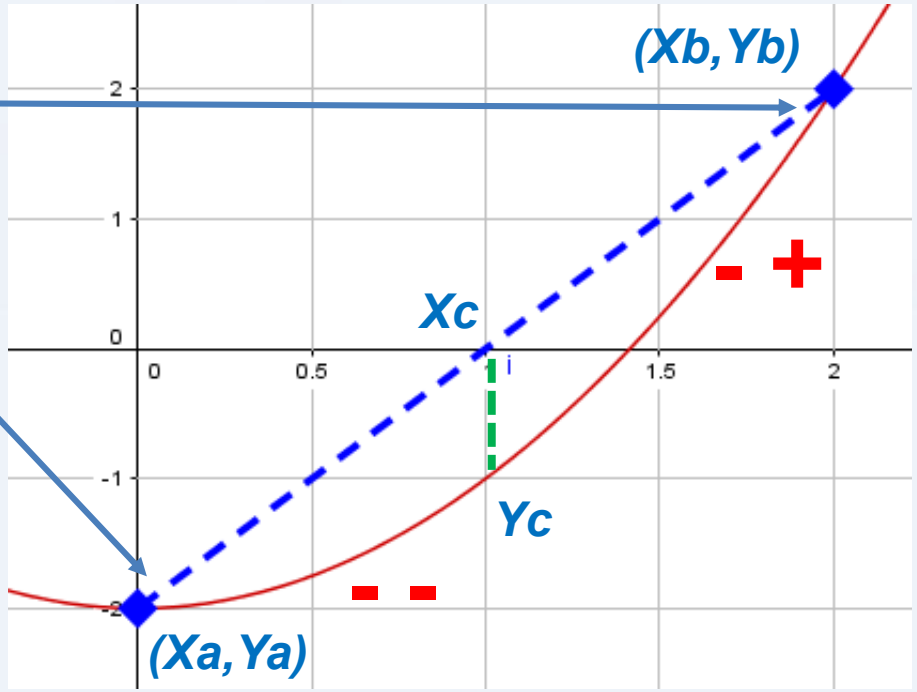
Métodos Cerrados Regla falsa (secante)

En caso de que Yc sea mayor a la tolerancia se debe repetir eliminado como en el método anterior uno de los puntos A y B iniciales y sustituyéndolos por el valor de C obtenido en el paso anterior.

Se comparan los símbolos de las ordenadas en cada intervalo

Para el caso en análisis se elimina A.

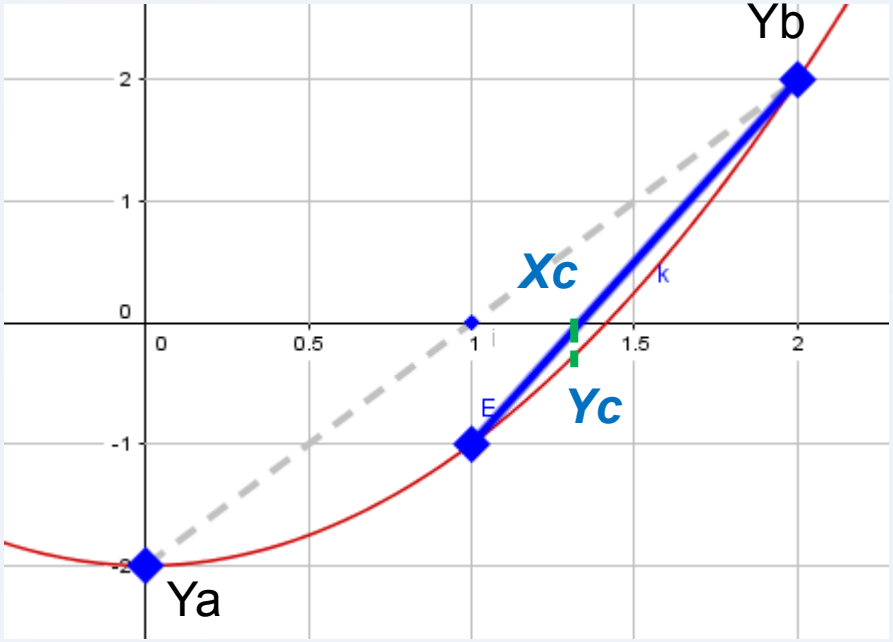
Xa=Xc



Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Regla falsa (secante)

Se repite de nuevo el proceso de la creación de la recta tangente para obtener una nueva Yc.



El método se repite hasta que Yc sea menor a la tolerancia

Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Regla falsa (secante)

La abscisa Xc se calcula con la ecuación de una recta que pasa por los puntos A y B y cuyo valor de Y es igual a cero.

$$\left(y-y_a\right)=m(x-x_a) \Rightarrow \left(0-y_a\right)=m(x-y_a) \Rightarrow x=\frac{y_a}{m}+x_a$$

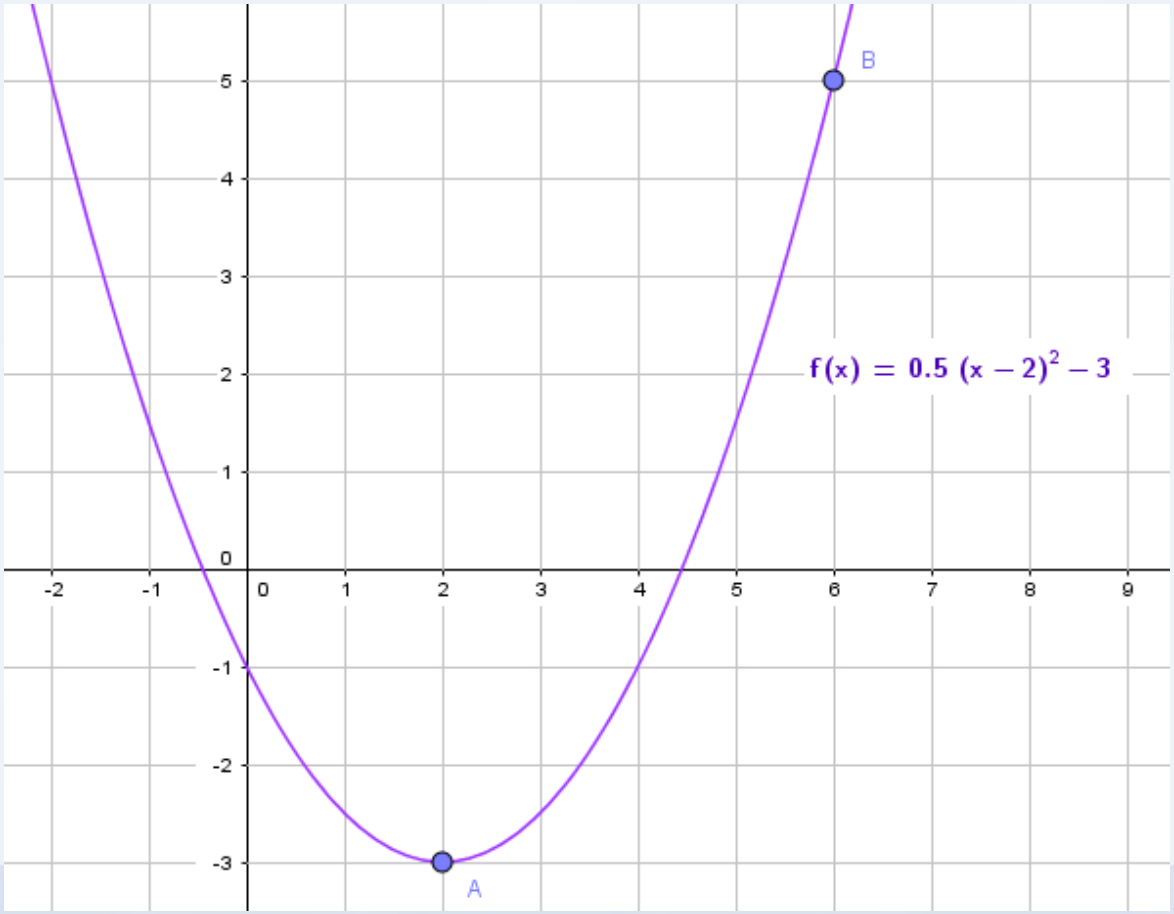
$$Xc=\left(-Ya\right)\frac{\left(Xb-Xa\right)}{\left(Yb-Ya\right)}+Xa$$

Es recomendable meterlo en una función para poder utilizarla varias veces

Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Regla falsa (secante)

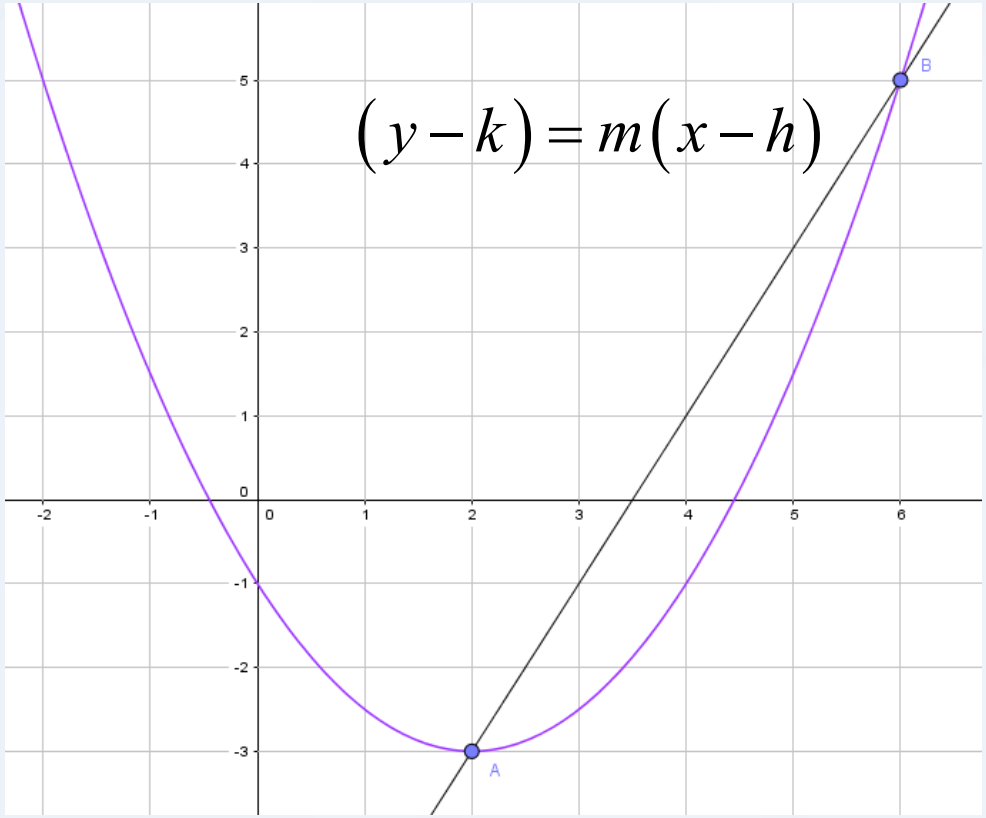
Ejemplo: Aplicando el método de la secante obtener la raíz de la siguiente función.



Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Regla falsa (secante)

Aplicando la primera iteración



Obteniendo la ecuación de la recta y evaluando en y=f(x)=0

$$m=\left(\frac{Y_B-Y_A}{X_B-X_A}\right)=\left(\frac{5-(-3)}{6-2}\right)=2$$

$$(0+3)=2(x-2)$$

$$Xc=\frac{(3)}{2}+2$$

$$Xc=\frac{7}{2}=3.5$$

Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Regla falsa (secante)

El valor de x=3.5 Se ingresa la ecuación de la parábola para obtener el valor de f(x)

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2} - 2\right)^2 - 3 = \frac{-15}{8}$$

Dicho valor se compara con el ERP o con la tolerancia permitida.

$$ERP = \left(\frac{0.01 - \frac{-15}{8}}{0.01}\right)100 = 18850\% \Rightarrow \text{MUY GRANDE}$$

$$\left|\frac{-15}{8}\right| \leq 0.01 \Rightarrow 1.875 \leq 0.01 \Rightarrow NO \text{ CUMPLE}$$

Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Regla falsa (secante)

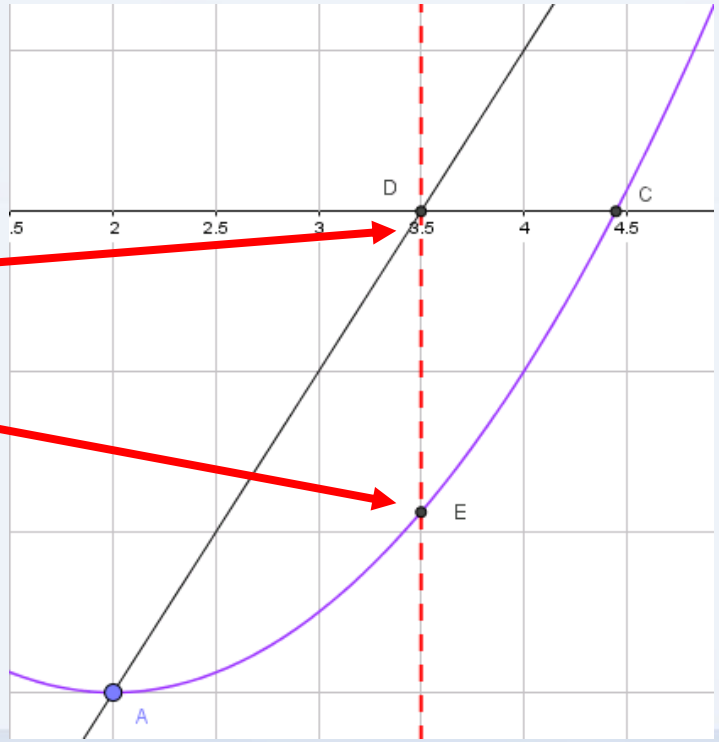
Si dicho error es muy grande. Volveremos a repetir el método.

Para la segunda iteración partimos de los datos obtenidos en el paso anterior para dibujar una nueva recta.

$$P.I._{\text{eje x}} = (3.5, 0)$$

$$f(3.5) = -\frac{15}{8}$$

$$Pcurva = \left(3.5, \frac{-15}{8}\right)$$



Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Regla falsa (secante)

Para la segunda recta también debemos obtener su ecuación cartesiana y evaluarla en f(x)=0 para obtener el punto de intersección de dicha recta con el eje X.

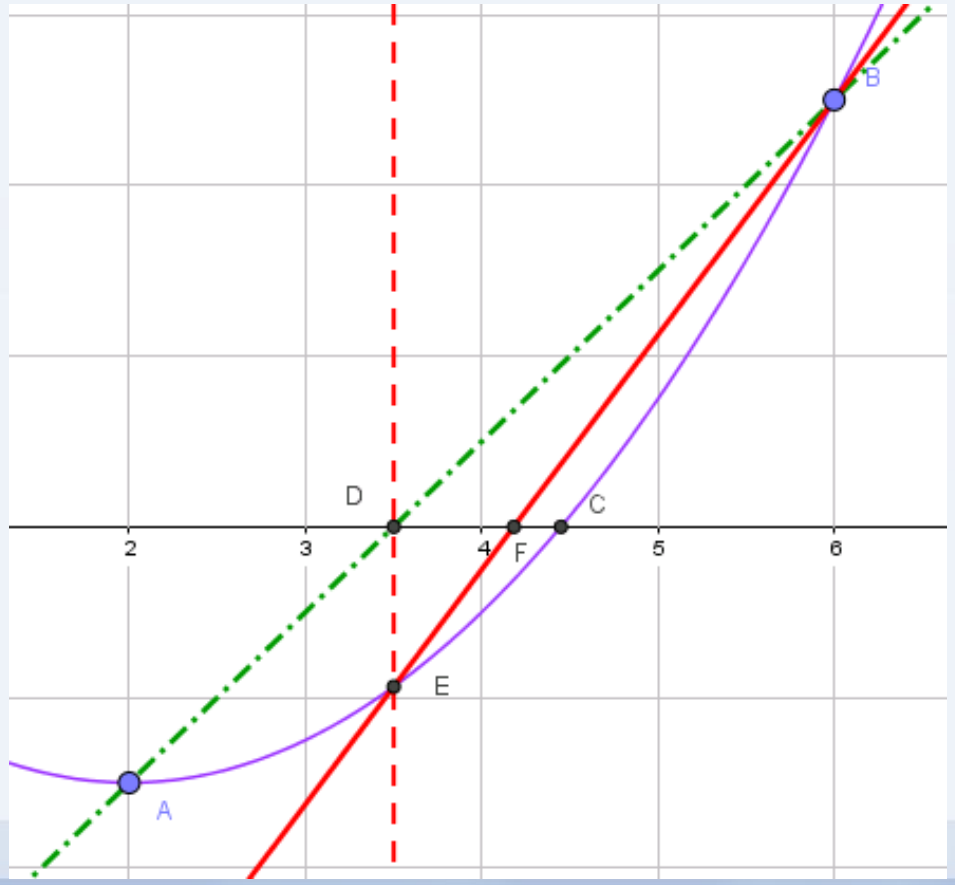
$$m = \left(\frac{5-(-15/8)}{6-3.5} \right) = 2.75$$

$$(0+15/8) = 2.75(x-3.5)$$

$$Xc = \frac{(15/8)}{2.75} + 3.5$$

$$Xc = 4.18$$

$$f(\mathrm{Xc}) = \mathrm{F}(4.18) = -0.62$$



Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Regla falsa (secante)

De nuevo se calculan los errores en x=4.18 y f(x)=-0.62 :

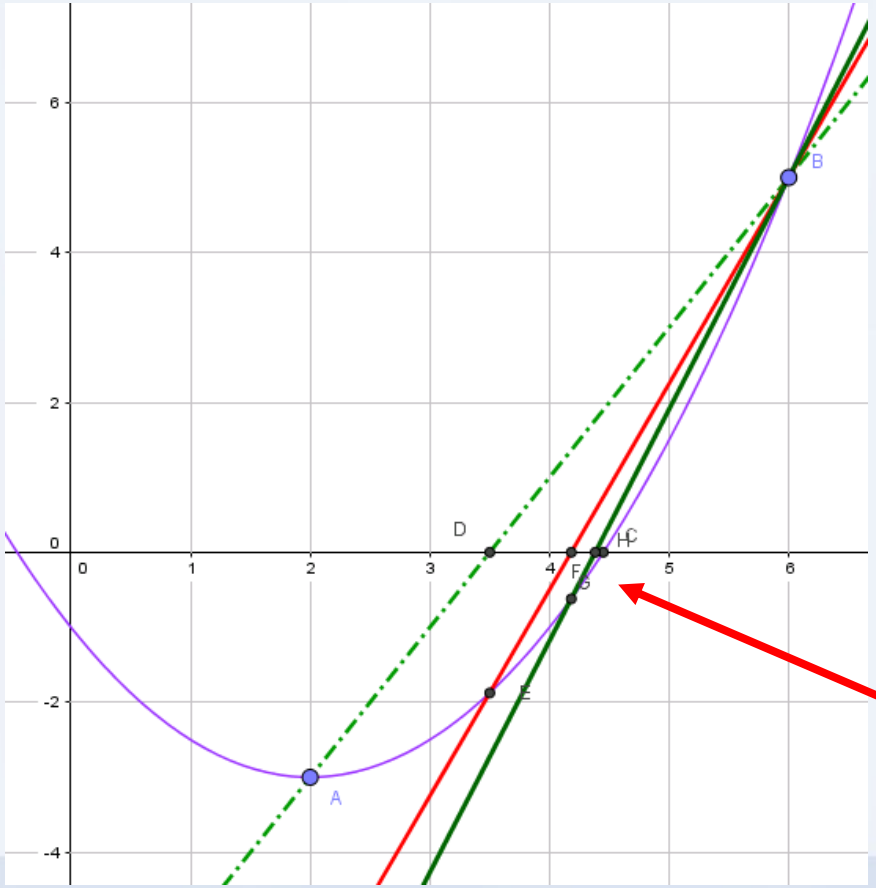
$$ERP = \left(\frac{0.01 - (-0.62)}{0.01} \right) 100 = 6300\% \Rightarrow \text{MUY GRANDE PERO MENOR AL ANTERIOR}$$

$$|-0.62| \leq 0.01 \Rightarrow NO \text{ CUMPLE}$$

Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Regla falsa (secante)

De ser necesario se realiza una nueva iteración. Repitiendo los pasos realizados en la iteración 1 y 2.



$$x = 4.38$$

Aproximación numérica y errores

Métodos Cerrados Regla falsa (secante)

El método termina cuando Yc es menor a la tolerancia, para nuestro ejemplo la solución final aproximada se alcanza en la quinta iteración y tiene un valor de Xc= 4.4455587393 con un error de -0.009621226.

Aproximación numérica y errores

Métodos Abiertos

Los métodos abiertos más conocidos son:

- ✓ Métodos de aproximaciones sucesivas (punto fijo)
- ✓ Método de Newton-Raphson

Condición: Se deben analizar funciones continuas en un determinado intervalo.

Aproximación numérica y errores

Métodos de aproximaciones sucesivas (punto fijo)

Por ejemplo en términos práctico un francotirador es difícil que atine al objetivo si la distancia es muy grande (debido a diversos factores como el viento).

Por lo cual va realizando disparados para ***irse aproximando*** poco a poco al objetivo.

Record de 3.5 kilómetros

Aproximación numérica y errores

Métodos de aproximaciones sucesivas (punto fijo)

Estos métodos se basan en obtener la solución de una función ***f(x) = 0*** transformándola a una función ***x=g(x)*** por medio de pasos algebraicos. Al repetir el método varias veces se va formando una sucesión de datos que cada vez se aproximan más a la solución.

$$x_1 = g(x_0) \Leftarrow \quad x_0 \Rightarrow \text{Primera solución aproximada}$$

$$x_2 = g(x_1)$$

$$x_3 = g(x_2)$$

$$\ldots$$

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

El método termina cuando:

$$|x_{i+1} - x_i| \leq \text{tolerancia}$$

Aproximación numérica y errores

Métodos de aproximaciones sucesivas (punto fijo)

Sea

$$f(x_i) = 0$$

y

$$f(x_i) = x_i - g(x_i) = 0$$

Ecuación transformada

$$x_i - g(x_i) = 0$$

$$x_{i+1} = g(x_i)$$

Ecuación en formato de punto fijo

$$\left|\frac{dg}{dx}\right| < 1$$

RESTRICCIÓN

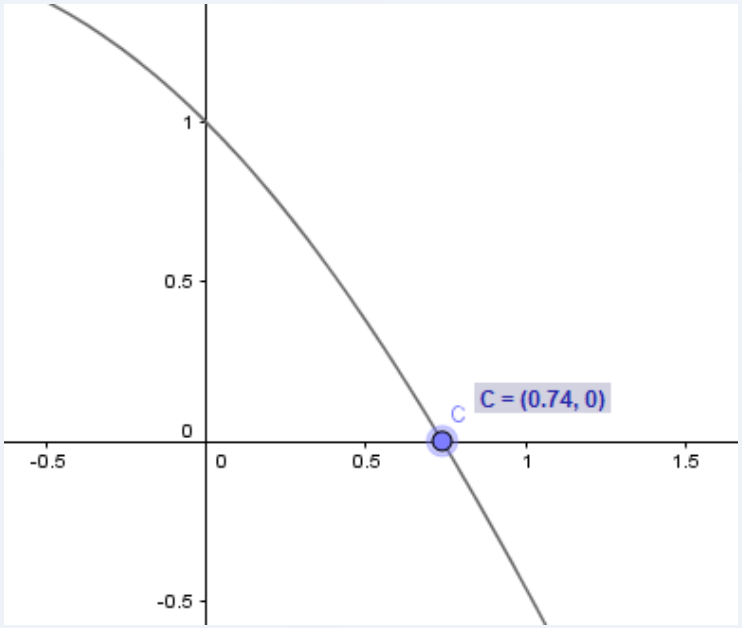
Sí se cumple esta condición el punto fijo existe y es único

Aproximación numérica y errores

Métodos de aproximaciones sucesivas (punto fijo)

Transformar la siguiente ecuación a formato de punto fijo:

$$f(x) = \cos(x) - x = 0$$



Aproximación numérica y errores

Métodos de aproximaciones sucesivas (punto fijo)

Transformar la siguiente ecuación a formato de punto fijo:

$$f(x) = \cos(x) - x = 0$$

Función en formato normal

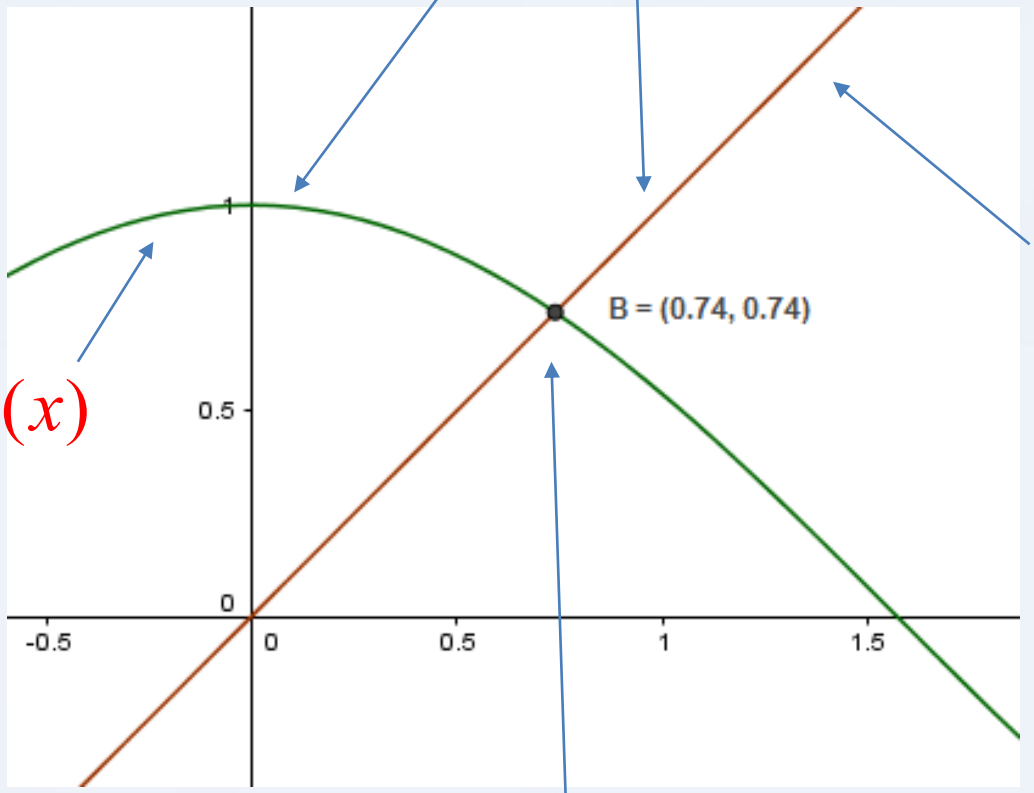
$$x = \cos(x)$$

Función en formato de punto fijo

Aproximación numérica y errores

Métodos de aproximaciones sucesivas (punto fijo)

$\cos(x) = \mathrm{x}$



$y = x$

$y = \cos(x)$

La intersección es la solución de la función original

Punto fijo en x=0.74

Aproximación numérica y errores

Métodos de aproximaciones sucesivas (punto fijo)

Para el ejemplo anterior tenemos:

$$g(x) = \cos(x)$$

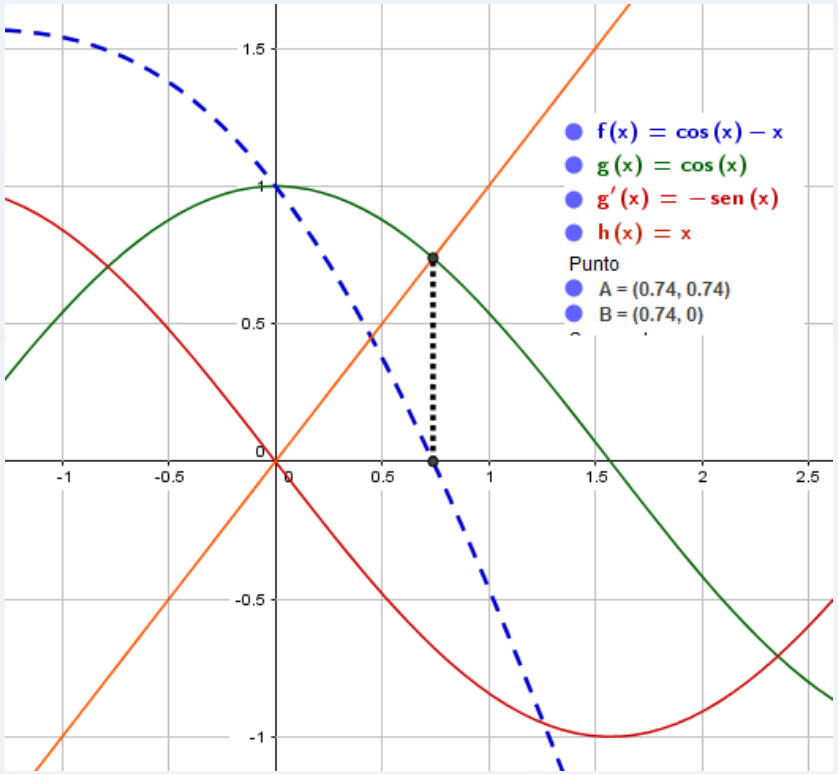
$$g'(x) = -sen(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\left|-sen(\mathrm{x})\right| < 1$$

$$\Downarrow$$

Cumple

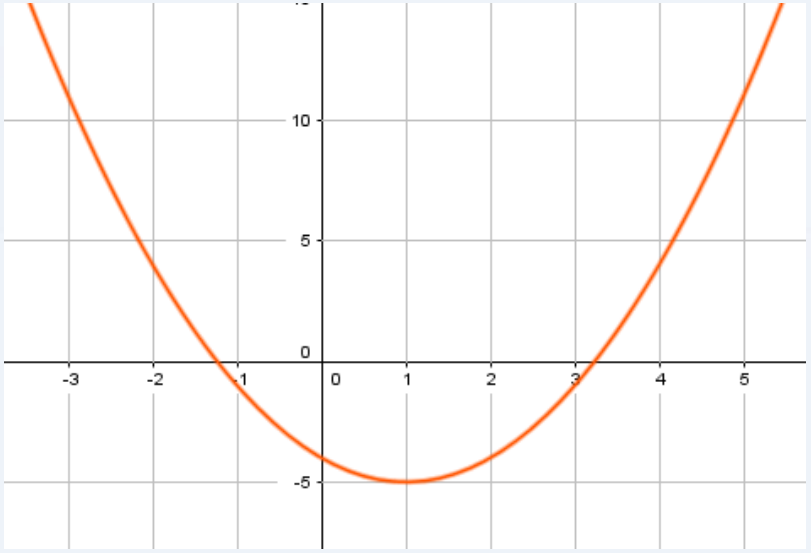


Aproximación numérica y errores

Métodos de aproximaciones sucesivas

Por ejemplo si quisiéramos conocer una de las raíces de la siguiente función:

$$f(x) = x^2 - 2x - 4$$



Aproximación numérica y errores

Métodos de aproximaciones sucesivas

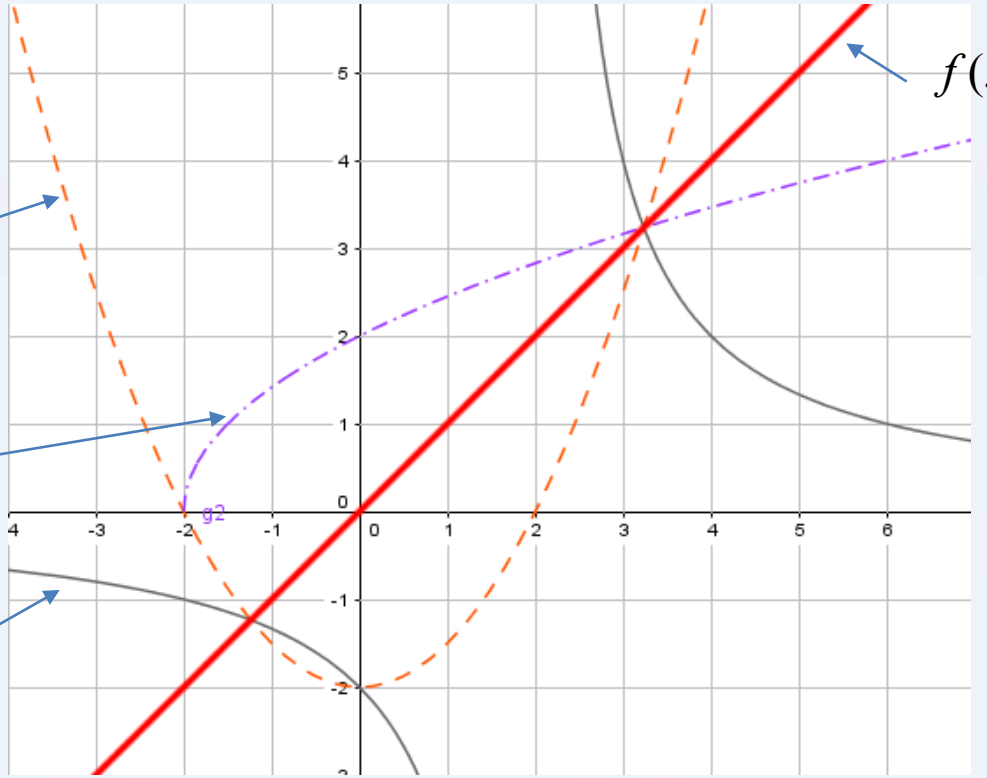
Se pueden obtener varias funciones G(x), pero se debe elegir aquella que cumpla con el criterio de la derivada.

$$f(x) = x^2 - 2x - 4$$

$$x = g_1(x) = \frac{x^2}{2} - 2$$

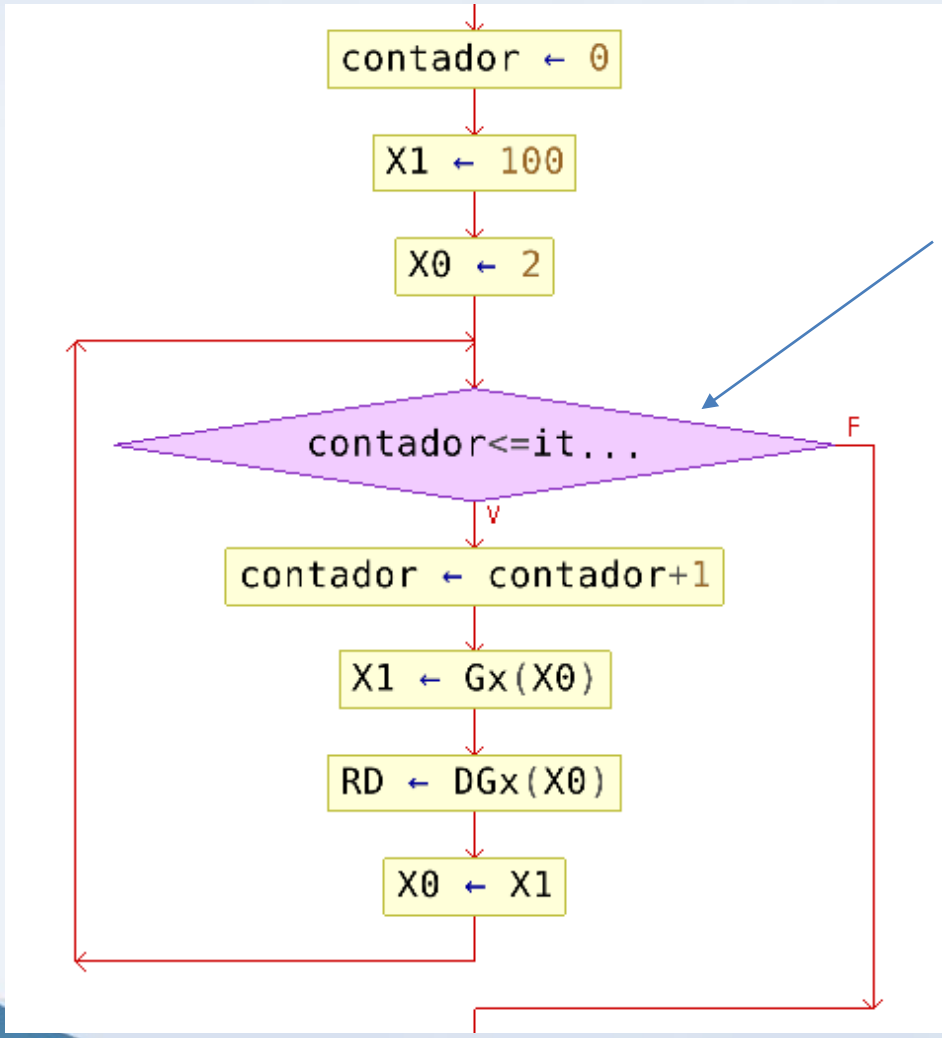
$$x = g_2(x) = \sqrt{2x+4}$$

$$x = g_3(x) = \frac{4}{x-2}$$



Aproximación numérica y errores

Métodos de aproximaciones sucesivas - Algoritmo



abs(X1-X0)>=tolerancia y contador<=Iteraciones_maximas

Aproximación numérica y errores

Métodos de aproximaciones sucesivas - Algoritmo

Tabla de resultados:

Xo	X1=g(Xo)	|X1-Xo|	Dgx
3	3.162277660	0.162277600	0.31622776
3.162277660	3.213184607	-0.050906947	0.3112177239
3.213184607	3.228988884	-0.015804277	0.309694469
3.228988884	3.233879677	-0.004890793	0.309226099

Solución aproximada en X=3.2338796775

Aproximación numérica y errores

Métodos de Newton-Raphson

Este método nos permite conocer en forma aproximada la raíz de una función y si se aplica a la derivada de dicha función nos permite obtener los máximos y mínimos de la misma.

$$f(x) = 0 \Rightarrow Raices$$

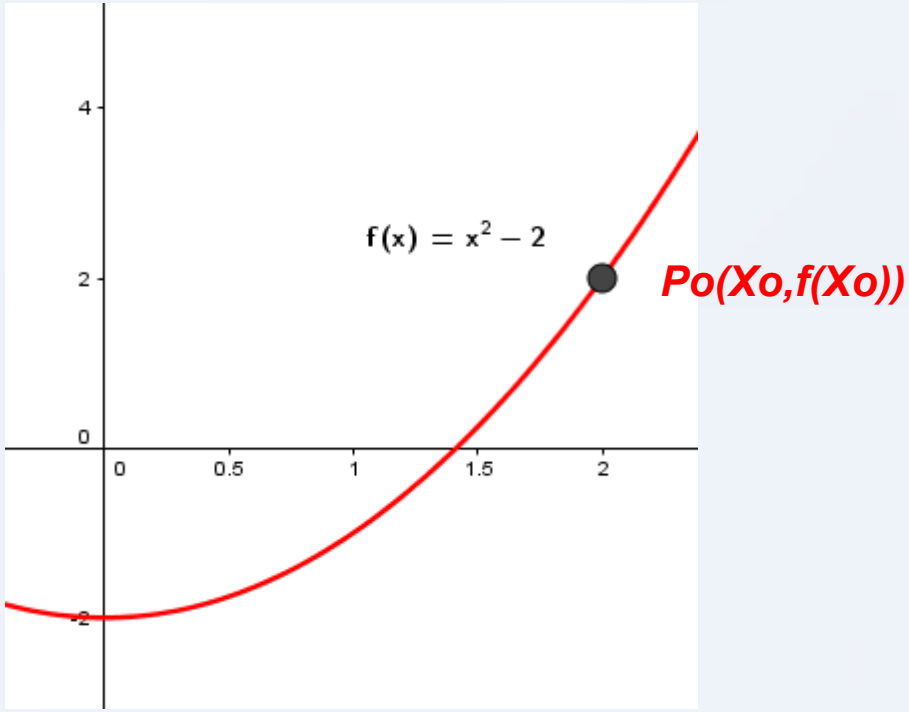
$$f'(0) = 0 \Rightarrow \text{Máximos o mínimos}$$

Este método no siempre es convergente y el punto inicial Xo debe estar cercano a cero para ser más efectivo

Aproximación numérica y errores

Métodos de Newton-Raphson

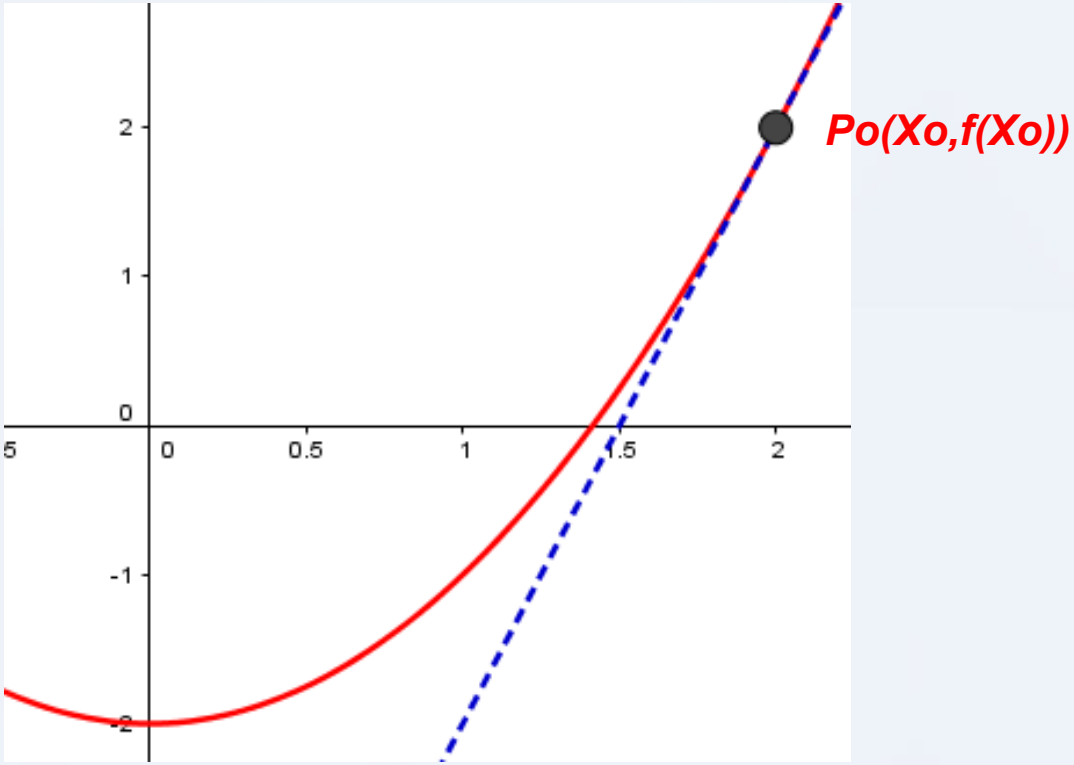
El método comienza en seleccionar un punto cercano a la raíz (P_0).



Aproximación numérica y errores

Métodos de Newton-Raphson

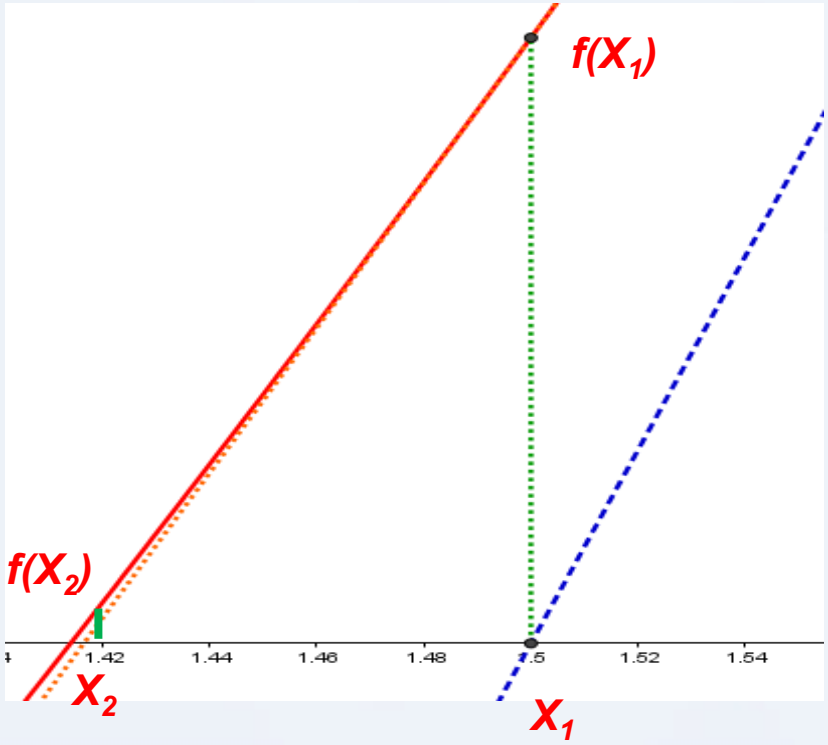
Se dibuja una la recta tangente a la curva en dicho punto.



Aproximación numérica y errores

Métodos de Newton-Raphson

La intersección de la recta tangente con el eje X, corresponderá a la abscisa del siguiente punto a analizar (P_1) y por medio de la función original obtendremos la ordenada de dicho punto. El método se repetirá siguiendo la misma lógica.



El método terminará cuando

$|f(X_1)| <= tolerancia$

Aproximación numérica y errores

Métodos de Newton-Raphson

Matemáticamente el método puede ser resuelto utilizando la siguiente formula.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

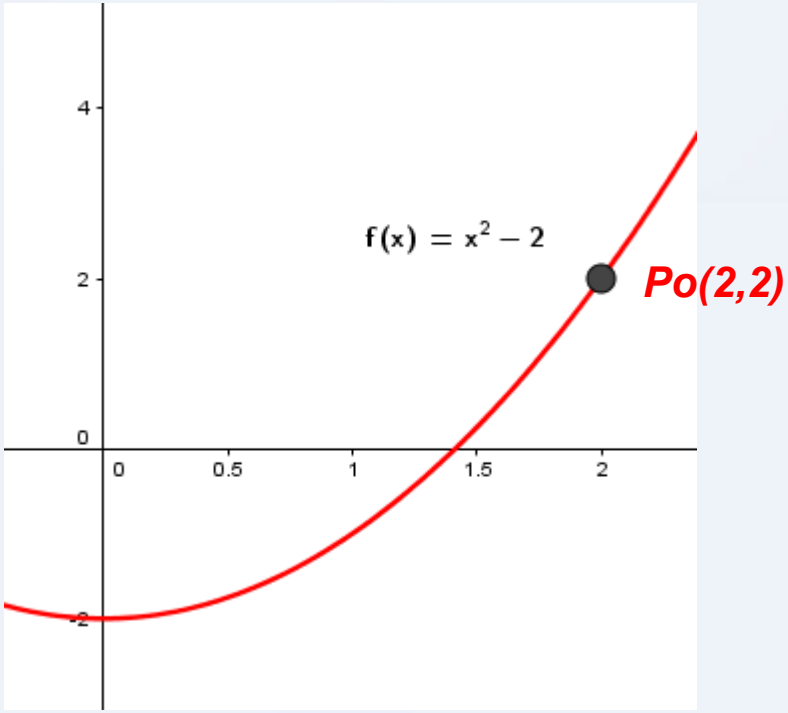
El método terminará cuando

$$|f(X_{n+1})-f(X_n)|<=tolerancia$$

Aproximación numérica y errores

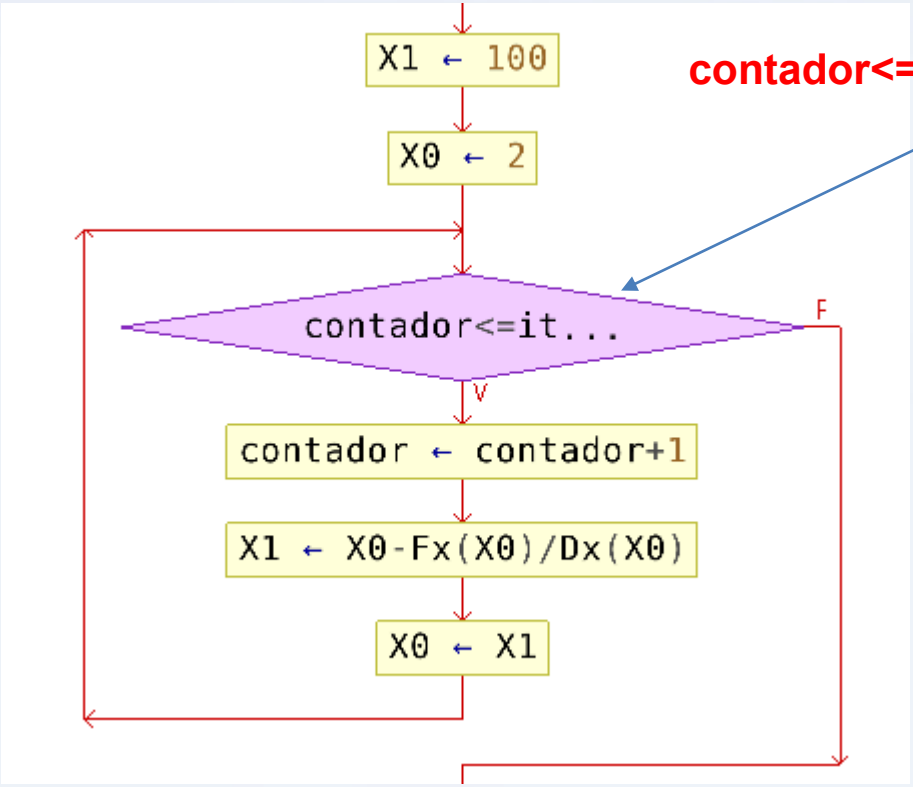
Métodos de Newton-Raphson

Ejemplo: Obtener la raíz de la siguiente función aplicando el método de Newton-Raphson con una tolerancia de 0.01 unidades y partiendo del punto con abscisa X=2



Aproximación numérica y errores

Métodos Newton-Raphson - Algoritmo



contador<=iteraciones_max y abs(X1-X0)>=tolerancia

Aproximación numérica y errores

Métodos de Newton-Raphson

Ejemplo: Primera iteración.

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{(2)^2 - 2}{2(2)} = 2 - \frac{2}{4} = \frac{3}{2}$$

$$|x_1 - x_0| = 0.5 > 0.01$$ ⇒ **Se necesita realizar una segunda iteración**

Aproximación numérica y errores

Métodos de Newton-Raphson

Ejemplo: Segunda iteración

$$x_1 = 3/2$$

$$x_2 = 3/2 - \frac{(3/2)^2 - 2}{2(3/2)} = \frac{3}{2} - \frac{9/4 - 2}{3} = \frac{17}{12} = 1.416$$

$$|x_2 - x_1| = |1.416 - 1.5| = 0.084 > 0.01$$

Se necesita realizar una segunda iteración

Aproximación numérica y errores

Métodos de Newton-Raphson

Tabla de resultados:

Xo	X1	|X1-Xo|
2	1.5	0.5
1.5	1.416666666	0.0833333333
1.416666666	1.416666666	0.002450980

Solución aproximada en X=1.416666666

Aproximación numérica y errores

Métodos de factores cuadráticos (Método de Lin)

Este método es exclusivo para resolver funciones algebraicas (polinomios) y la ventaja del mismo es que se pueden obtener las raíces complejas de la misma.

Es un método más eficiente que el método de la división sintética (el cual es un método de tanteos y no de iteraciones).

Aproximación numérica y errores

Métodos de factores cuadráticos (Método de Lin)

Este método parte de un polinomio de grado mayor a 2 del cual se quieren conocer dos de sus raíces.

$$x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120$$

Al aplicar el método obtenemos dos polinomios uno de grado 2 y el otro de grado 3. El polinomio de grado dos puede ser resulto por formula general o manejo algebraico.

$$\left(x^2 - 3x + 2\right)\left(x^3 - 12x^2 + 47x - 60\right)$$

$X_1=1$ y $X_2=2$

Aproximación numérica y errores

Métodos de factores cuadráticos (Método de Lin)

Formula general para resolver ecuaciones de segundo grado:

$$ax^2 + bx - c$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Aproximación numérica y errores

Métodos de factores cuadráticos (Método de Lin)

Como el polinomio resultante de la primera aplicación del método es de grado mayor a 2, se deberá de repetir de nuevo el método para obtener otras dos raíces:

$$\left(x^3 - 12x^2 + 47x - 60\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(x^2 - 7x + 12\right)\left(x - 5\right)$$

$$\Uparrow$$

X_1=1 y X_2=2

El método termina de aplicarse cuando el polinomio resultante tiene un grado igual o menor a 2.

Aproximación numérica y errores

Métodos de factores cuadráticos

Grafica de la función:

Aproximación numérica y errores

Métodos de factores cuadráticos

Aplicación del método:

Polinomio original: $f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots . a_n x^0$

$$f(x) = x^5 - 15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x - 120$$

$n = 5$

$a_0 = 1$

$a_1 = -15$

$a_2 = 85$

$a_3 = -225$

$a_4 = 274$

$a_5 = -120$

Aproximación numérica y errores

Métodos de factores cuadráticos

Extracción de factores cuadráticos:

$$\frac{f(x)\left(x^2+Px+Q\right)}{\left(x^2+Px+Q\right)}$$

Residuo de la división (debe tender a cero)

$$\left(x^2+Px+Q\right)\left(b_0x^{n-2}+b_1x^{n-3}+b_2x^{n-5}+\ldots b_{n-3}x^1+b_nx^0\right)+\left(Rx+S\right)$$

Polinomio resultado

B_n, P, Q y S son calculados durante el método

Aproximación numérica y errores

Métodos de factores cuadráticos

Ecuaciones de recurrencia:

$$b_k = a_k - Pb_{k-1} - Qb_{k-2}$$

$$R = a_{n-1} - Pb_{n-2} - Qb_{n-3}$$

$$S = a_n - Qb_{n-2}$$

Donde:

k=0,1,2,3,...,n-2

n es el grado del polinomio original

Únicamente para la primera iteración => **P=Q=0**

Para todas las iteraciones => $b_{-1} = b_{-2} = 0$

Aproximación numérica y errores

Métodos de factores cuadráticos

Primera iteración: $n = 5 \quad P = Q = 0 \qquad \mathrm{k} \in [0,1,2,3]$

$$b_k = a_k - Pb_{k-1} - Qb_{k-2}$$

$$b_0 = a_0 - Pb_{0-1} - Qb_{0-2}$$

$$b_1 = a_1 - Pb_{1-1} - Qb_{1-2}$$

$$b_2 = a_2 - Pb_{2-1} - Qb_{2-2}$$

$$b_3 = a_3 - Pb_{3-1} - Qb_{3-2}$$

$$R = a_{n-1} - Pb_{n-2} - Qb_{n-3}$$

$$R = a_{5-1} - Pb_{5-2} - Qb_{5-3}$$

$$S = a_n - Qb_{n-2}$$

$$S = a_5 - Qb_{5-2}$$

Aproximación numérica y errores

Métodos de factores cuadráticos

Sustituyendo los valores conocidos:

$$b_0 = a_0 - Pb_{-1} - Qb_{-2} = 1 - (0)(0) - (0)(0) = 1$$

$$b_1 = a_1 - Pb_0 - Qb_{-1} = (-15) - (0)(1) - (0)(0) = -15$$

$$b_2 = a_2 - Pb_1 - Qb_0 = 85 - (0)(-15) - (0)(-1) = 85$$

$$b_3 = a_3 - Pb_2 - Qb_1 = -225 - (0)(85) - (0)(-15) = -225$$

$$R = a_4 - Pb_3 - Qb_2 = (274) - (0)(-225) - (0)(85) = 274$$

$$S = a_5 - Qb_3 = (-120) - (0)(-225) = -120$$

Aproximación numérica y errores

Métodos de factores cuadráticos

Para esta primera iteración tendríamos lo siguiente:

$$\left(x^2+Px+Q\right)\left(b_0x^{n-2}+b_1x^{n-3}+b_2x^{n-5}+\ldots.b_{n-3}x^1+b_nx^0\right)+\left(Rx+S\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\left(x^2+(0)x+(0)\right)\left((1)x^3+(-15)x^2+(85)x^1+(-225)x^0\right)+\left((-274)x+120\right)$$

$$\Downarrow$$

Debe tender a cero para terminar de iterar (R<=tolerancia y S<=tolerancia)

Aproximación numérica y errores

Métodos de factores cuadráticos

Para una segunda iteración P y Q ya no son cero y se calculan de la siguiente forma

$$\Delta P_i = \frac{R}{b_{n-2}} \qquad \text{y} \qquad \Delta Q_i = \frac{S}{b_{n-2}}$$

Los siguientes valores de P y Q se calculan de la siguiente forma:

$$P_{i+1} = \Delta P_i + P_i = \left(\frac{R}{b_{n-2}}\right) + P_i$$

$$\mathrm{Q}_{\mathrm{i}+1} = \Delta Q_i + Q_i = \left(\frac{S}{b_{n-2}}\right) + Q_i$$

Aproximación numérica y errores

Métodos de factores cuadráticos

Para el ejemplo que se esta analizando tendríamos:

$$P_1 = \left(\frac{R}{b_{n-2}}\right) + P_0 = \left(\frac{274}{-225}\right) + (0) = -1.21778$$

$$\mathrm{Q}_1 = \left(\frac{S}{b_{n-2}}\right) + Q_0 = \left(\frac{-120}{-225}\right) + (0) = 0.53333$$

Aproximación numérica y errores

Métodos de factores cuadráticos

Segunda iteración: $n = 5 \quad P = -1.21778 \quad Q = 0.53333 \qquad k \in [0,1,2,3]$

$$b_0 = a_0 - Pb_{-1} - Qb_{-2} = 1 - (1.21778)(0) - (-0.53333)(0) = 1$$

$$b_1 = a_1 - Pb_0 - Qb_{-1} = (-15) - (1.21778)(1) - (-0.53333)(0) = -13.78$$

$$b_2 = a_2 - Pb_1 - Qb_0 = 85 - (1.21778)(-13.78) - (-0.53333)(1) = 67.68$$

$$b_3 = a_3 - Pb_2 - Qb_1 = -225 - (1.21778)(67.68) - (-0.53333)(-13.78) = -135.23$$

$$R = a_4 - Pb_3 - Qb_2 = (-274) - (1.21778)(-135.23) - (-0.53333)(67.68) = 73.2264$$

$$S = a_5 - Qb_3 = (120) - (-0.53333)(-135.23) = -47.8791$$

$$P_1 = \left(\frac{R}{b_{n-2}}\right) + P_0 = \left(\frac{73.2264}{-135.2265}\right) + (-1.2177) = -1.7592$$

$$Q_1 = \left(\frac{S}{b_{n-2}}\right) + Q_0 = \left(\frac{-47.8791}{-135.2265}\right) + (0.5333) = 0.8873$$

Aproximación numérica y errores

Métodos de factores cuadráticos

Para facilitar el método se puede utilizar la siguiente tabla:

A_0	1
A_1	-15
A_2	85
A_3	-225
A_4	274
A_5	-12’

	1 Iter.	2 Iter.	3 Iter.	…	N iter.
P	0	-1.2178			
Q	0	0.5333			
B_0	1	1			
B_1	-15	-13.8222			
B_2	85	67.6829			
B_3	-225	135.225			
R	274	73.2264			
S	120	-47.8791			
DP	-1.2178	0.5415			
DQ	0.5333	0.3540			

Aproximación numérica y errores

Métodos de factores cuadráticos

El método para una tolerancia de 0.01 se encontró la solución en 56 iteraciones

Iteración No. 56
B[0]= 1
B[1]= -12.0015610989
B[2]= 47.0156134264
B[3]= -60.0421691713
R= 0.0093934238
S= -0.0093934238
Dp= -0.0001564471
Dq= 0.0001564471
P= -2.9985953482
Q= 1.9985953482

$$\left(x^2-3x+2\right)\left(\left(1\right)x^3+\left(-12\right)x^2+\left(47\right)x^1+\left(-60\right)x^0\right)+\left(\left(0\right)x+\left(0\right)\right)$$

Aproximación numérica y errores

Métodos de factores cuadráticos

Ejemplo: Obtener las raíces del siguiente polinomio

$$x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$$