Capítulo V:

Solución numérica de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales

M.I. Víctor Manuel Durán Campos

Ecuaciones diferenciales

Una ecuación diferencial es del tipo:

$$\frac{dy}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad dy = 2x\ dx$$

Para eliminar las diferenciales se integran las dos partes de la ecuación:

$$\int dy = \int 2x\ dx \quad \Rightarrow \quad y + c_1 = 2\frac{x^2}{2} + c_2 \quad \Rightarrow \quad y = x^2 + c$$

Solución general de una ecuación diferencial

Ecuaciones diferenciales – Condición inicial

Cuando se desea determinar el valor de una ecuación diferencial es un punto específico a ese punto se le llama condición inicial.

Por ejemplo obtener la solución de la siguiente ecuación cuando x=2:

$$dy = 2x\ dx$$

$$\Downarrow$$

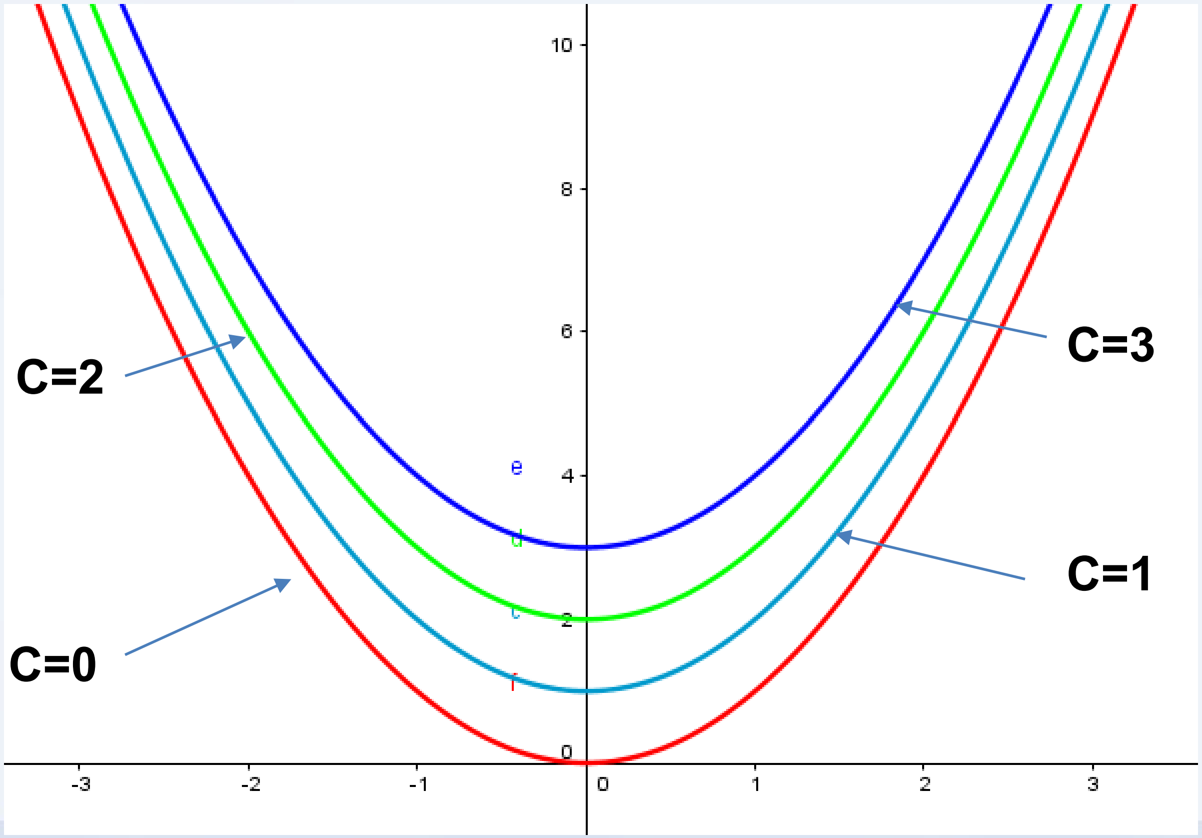
$$y = x^2 + c$$

$$\Downarrow$$

$$y = (2)^2 + c = 4 + c \longleftarrow \text{Tiene muchas posibles soluciones}$$

Ecuaciones diferenciales – Condición inicial

Por ejemplo graficando la solución general: $y = x^2 + c$



Ecuaciones diferenciales – Condición inicial

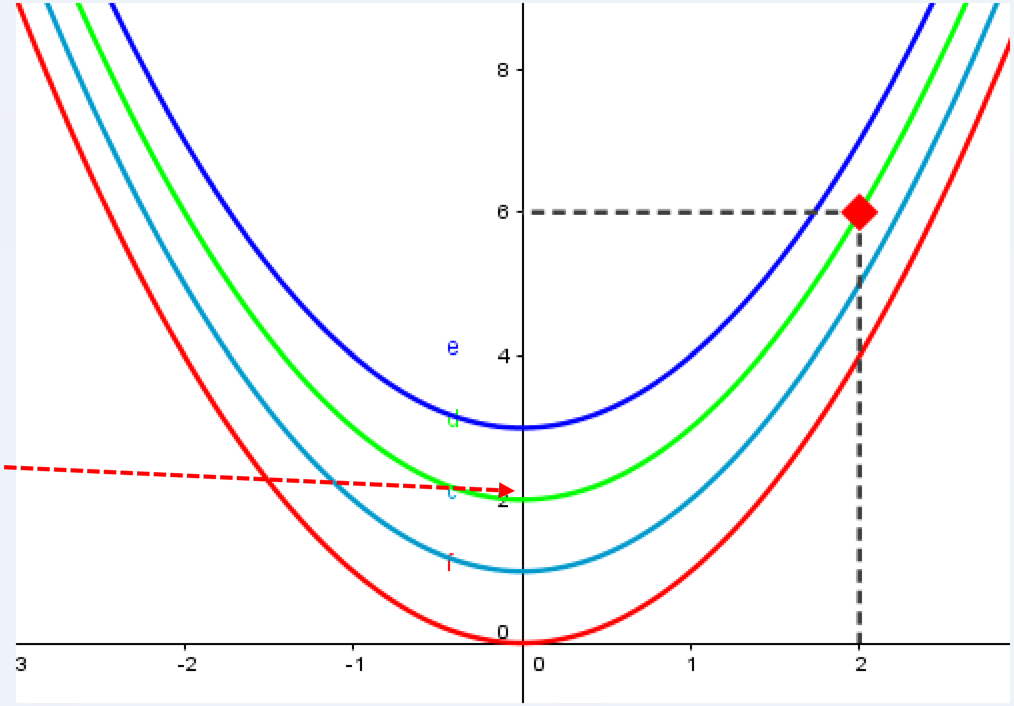
Si forzamos la solución a un determinado valor de ***y***, tendríamos:

$$x = 2 \quad y=6$$

$$y = x^2 + c$$

$$6 = (2)^2 + c$$

$$c = 6 - 4 = 2$$



Orden de una ecuación diferencial

El orden es igual al mayor orden de las derivadas que están incluidas en la ecuación o las ecuaciones.

$\boxed{\frac{d^2y}{dx^2}} + 5x\frac{dy}{dx} + 3y = 0$	$orden\ 2\ por\ \frac{d^2y}{dx^2}$
$y''' + y'' + y' + y = sen\ 3x$	$orden\ 3\ por\ y'''$
$(x+y)dx = (y-x)dy$	$orden\ 1\ por\ \text{"dx"}\ y\ \text{"dy"}$
$y' = 3(y'')^2 + 5y - 3x + 2$	$orden\ 2\ por\ y''$
$\frac{d^4y}{dx^4} + 3\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{3x}$	$orden\ 4\ por\ \text{"}\frac{d^4y}{dx^4}\text{"}$

Grado de una ecuación diferencial

El grado de una ecuación diferencial está dado por el exponente que tiene la derivada de mayor orden.

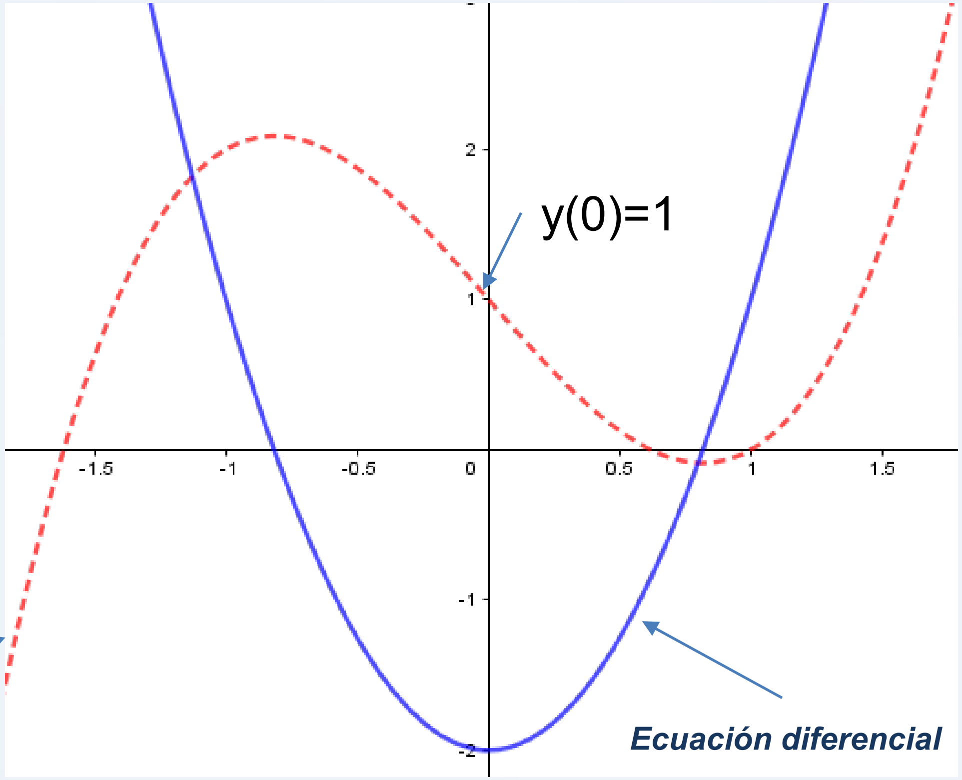
1) $\boxed{e^x \frac{d^2y}{dx^2}} + sen\ x \frac{dy}{dx} = x$	2do orden	1er grado
2) $\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^2 - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + xy = 0$	3er orden	2do grado
3) $\frac{d^3y}{dx^3} + 2\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^3 + \frac{dy}{dx} = tan\ x$	3er orden	1er grado
4) $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$	1er orden	1er grado

Ecuación diferencial lineal de primer orden con condiciones iniciales

Una ecuación diferencial ordinaria de primer orden con valores iniciales se puede definir como:

$$EDO=\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}=f\left(t,y\left(t\right)\right)\\ y\left(t_0\right)=y_0\end{cases}$$

Función original (Solución de la ecuación diferencial)



Ecuación diferencial

Ecuación diferencial lineal de primer orden con condiciones iniciales

Si la solución la tratamos de encontrar utilizando el método de aproximaciones sucesivas tendríamos lo siguiente:

Incremento en t

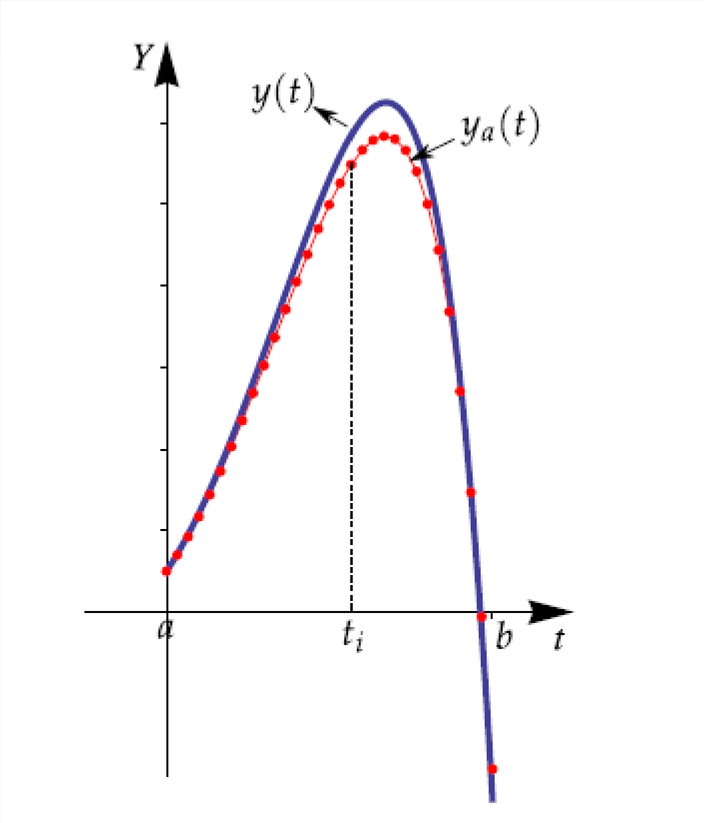
$$EDO = \begin{cases} \dfrac{dy}{dt} = f\left(t, y\left(t\right)\right) \\ y\left(t_0\right) = y_0 \end{cases} \Longrightarrow \quad y\left(t_{i+1}\right) = y\left(t_i\right) + h * \phi\left(t_i, y\left(t_i\right)\right)$$

El problema consiste en encontrar una función $\phi\left(t_i, y\left(t_i\right)\right)$ que satisfaga las condiciones iniciales.

Si m=1 existe una solución única (***teorema de Lipschitz***) *para una determinada condición inicial*

Ecuación diferencial lineal de primer orden con condiciones iniciales

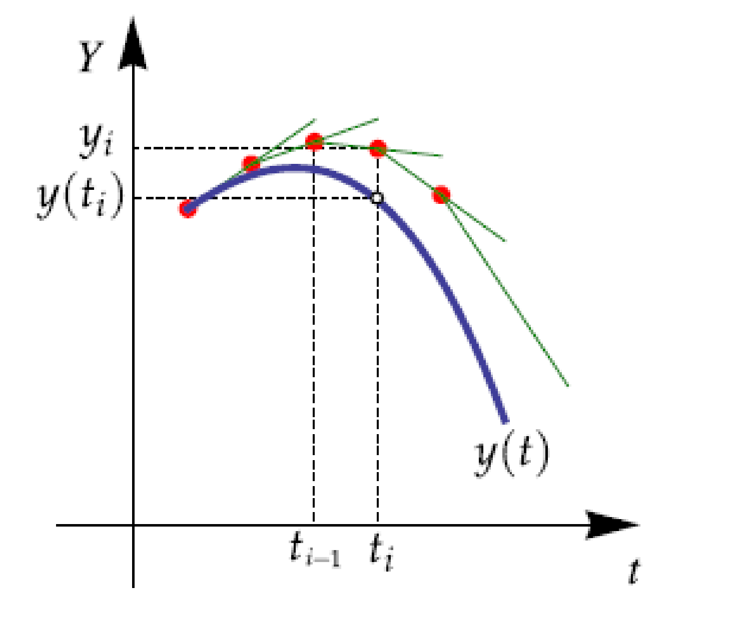
Desde el punto de vista numérico lo que nos interesa encontrar, son aproximaciones **$y_a(t_i)$** a los valores exactos **$y(t_i)$** tomando como base puntos equiespaciados.



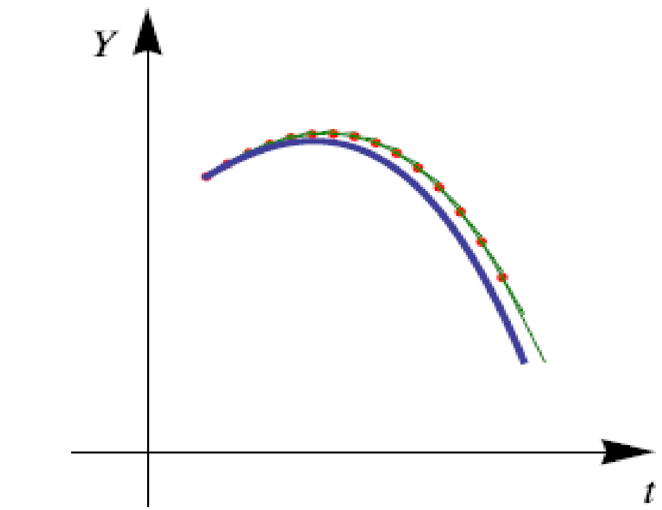
También se podría construir una tabla de aproximaciones con los datos de la función **f(t,f(t))** y por interpolación, construir un polinomio con una solución aproximada.

Método de Euler para orden 1

Uno de los métodos más usados para resolver este tipo de problemas es el desarrollado por Euler, quien propuso seguir la tangente en cada punto.



$$y(t_i) \approx y_i = y_{i-1} + \underbrace{h\,f(t_{i-1}, y_i)}_{\text{Derivada}}.$$



Tangentes en (t_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots 15$.

Método de Euler para orden 1

La formula que define su método es la siguiente:

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + h * \phi(t_i, y(t_i)) \quad \text{h>0}$$

$$y(t_{i+1}) \approx y_{i+1}$$

$$y(t_i) \approx y_i$$

$$y_{i+1} \approx y_i + h * f'(t_i, y_i) \quad \text{i=0,1,2...n}$$

$$t \in [\text{a, b}]$$

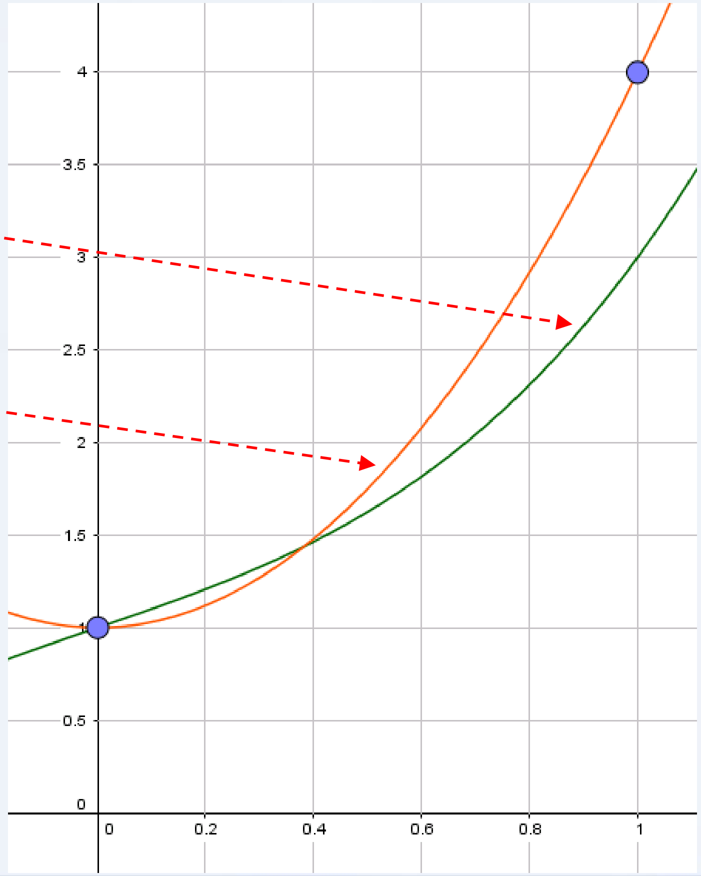
Es la función que se proporciona en el planteamiento del problema

Método de Euler para orden 1

Ejemplo: Consideremos la siguiente función f(x) y su derivada en el intervalo x=[0,1]

$$y = f(x) = x^3 + x + 1$$

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1$$



En x=0 el valor de la función f(x) es y=1

Lo que se busca con Euler es obtener una aproximación de la curva original en un determinado intervalo por ejemplo de 0 a 1.

Método de Euler para orden 1

Ejemplo: Si utilizamos 10 divisiones y el segmento de 0 a 1 tendríamos:

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \qquad x \in [0,1] \qquad n=10$$

$$x_o = a = 0$$

$$y_o = f(x_0) = f(a) = 1$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10}$$

Método de Euler para orden 1

Ejemplo:

Para la primera iteración

$$y_1 \approx 1 + (1/10) * \left(3(0)^2 + 1\right) = 1.1$$

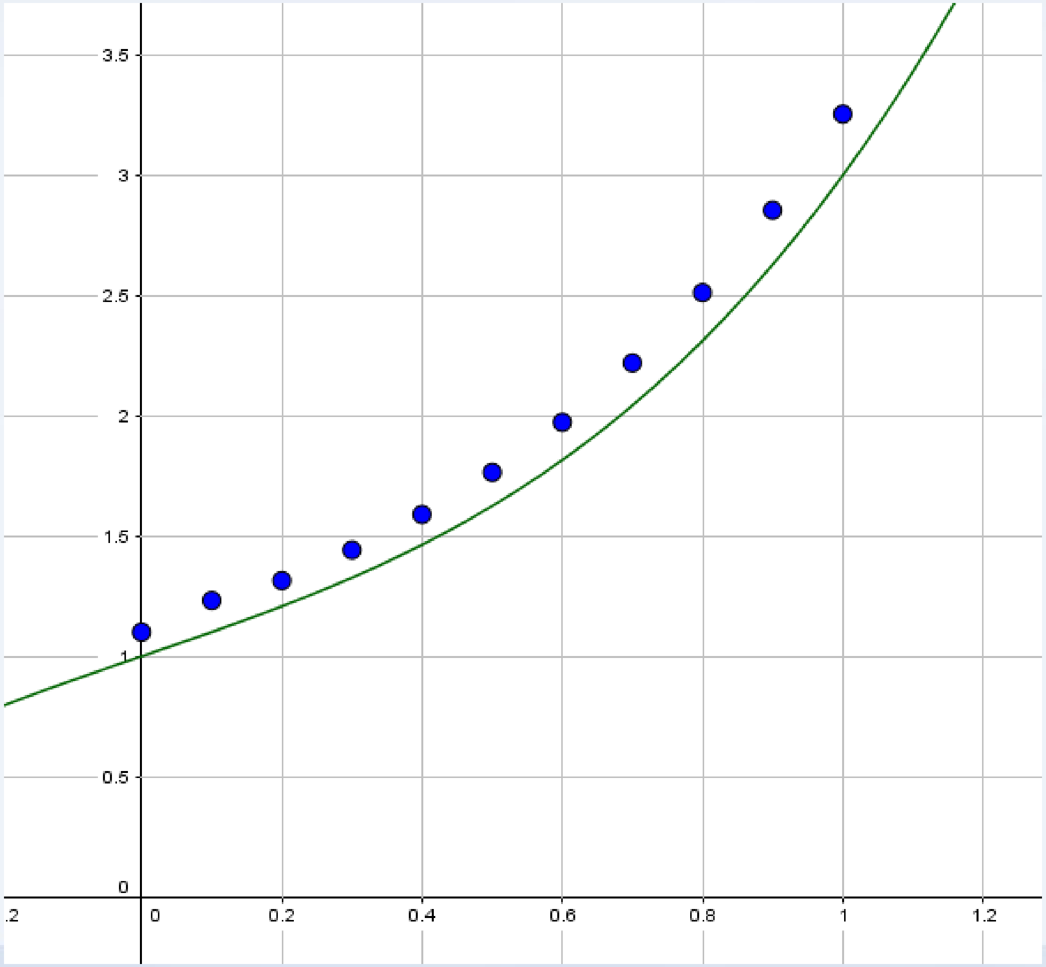
Para la segunda iteración

$$y_2 \approx 1.1 + (1/10) * \left(3(0.1)^2 + 1\right) = 1.1203$$

Método de Euler para orden 1

Ejemplo:

X	Valor Real (y)	Euler (y)
0	1	1.100
0.1	1.101	1.203
0.2	1.208	1.2323
0.3	1.327	1.315
0.4	1.464	1.442
0.5	1.625	1.590
0.6	1.806	1.765
0.7	2.043	1.973
0.8	2.312	2.200
0.9	2.629	2.512
1	3	2.855



Método de Euler para orden 1

Ejemplo: Consideremos el problema de valor inicial (función implícita):

$$\frac{dy}{dt} = 0.7y - t^2 + 1 \qquad t \in [\underset{a}{1}, \underset{b}{2}] \qquad y(1) = 1 \qquad n=10$$

$$\text{en } \; t = 1 \;\Rightarrow y(t_o) = y(a) = y(1) = 1$$

Método de Euler para orden 1

Ejemplo: $\frac{dy}{dx} = 0.7y - t^2 + 1 \qquad t \in [1,2] \qquad y(1) = 1 \qquad n=10$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{2-1}{10} = \frac{1}{10} \qquad y_o = f(t_0) = 1$$

$$t_o = 1$$

Para la primera iteración

$$y_1 \approx 1 + (1/10)*\left(0.7(1) - (1)^2 + 1\right) = 1.0700$$

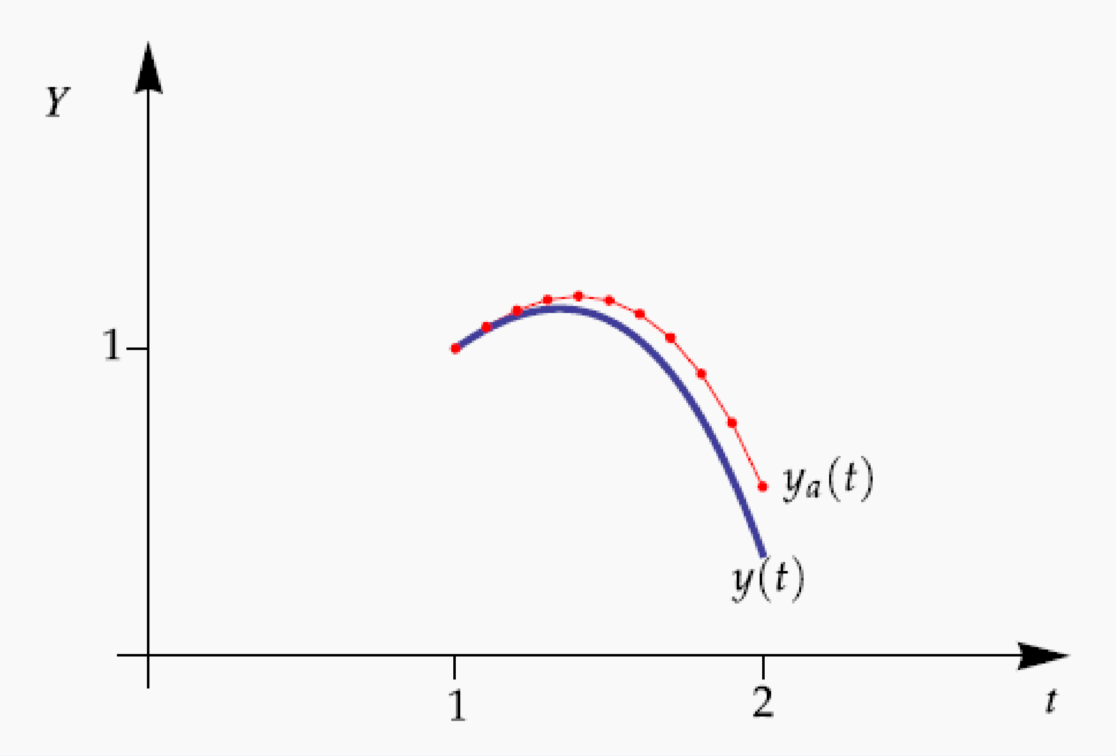
Para la segunda iteración

$$y_2 \approx 1.07 + (1/10)*\left(0.7(1.07) - (1.1)^2 + 1\right) = 1.1239$$

Método de Euler de orden 1

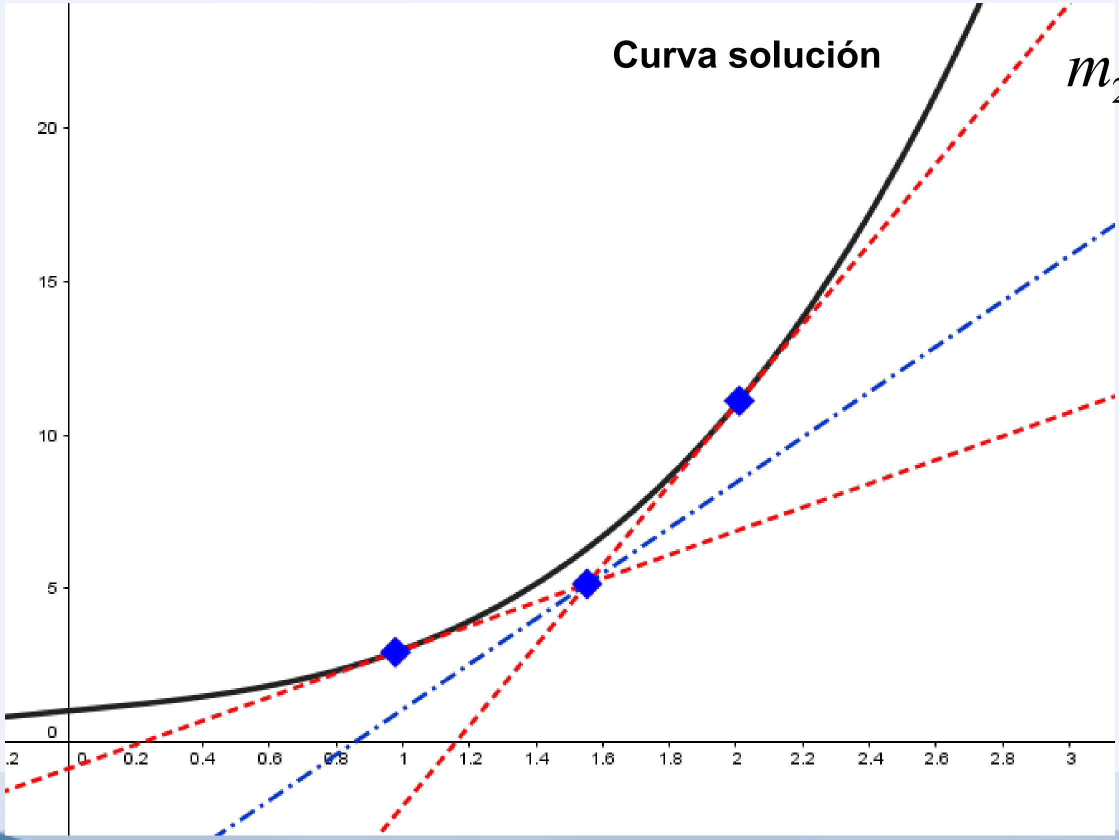
Analizando todo el intervalo t=[1,2]:

i	t	y
0	1	1
1	1.1	1.07
2	1.2	1.2239
3	1.3	1.15857
4	1.4	1.17067
5	1.5	1.5662
6	1.6	1.11258
7	1.7	1.03446
8	1.8	0.917877
9	1.9	0.758128
10	2	0.550197



Métodos de Euler Mejorado

Existe una versión modificada del método de Euler que obtiene resultados más precisos y se conoce como Euler mejorado. Este método se basa en la misma idea del método anterior, pero hace una mejora en la aproximación al tomar un promedio de las pendientes.



$$m_2 = f\left(x_1, y_1\right)$$

$$\bar{m} = \frac{m_1 + m_2}{2}$$

$$m_1 = f\left(x_0, y_0\right)$$

Métodos de Euler Mejorado

F_actual *F_siguiente*

La fórmula es la siguiente:

$$y_{i+1} \approx y_i + \left(\frac{h}{2}\right)\left[f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y^*_{i+1}\right)\right]$$

Donde:

$$y^*_{i+1} = y_i + (h) f\left(x_i, y_i\right)$$ **(Euler tradicional)**

$$x_{i+1} = x_i + (h)$$

Finalmente tendríamos:

$$y_{i+1} \approx y_i + \left(\frac{h}{2}\right)\left[f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, \left[y_i + (h) f\left(x_i, y_i\right)\right]\right)\right]$$

$$y_{i+1} \approx y_i + \left(\frac{h}{2}\right)\left[f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_i + \mathrm{h}, \left[y_i + (h) f\left(x_i, y_i\right)\right]\right)\right]$$

Métodos de Euler Mejorado

Ejemplo: Utilizando el método de Euler mejorado resuelva el ejercicio anterior

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \qquad x \in [0,1] \qquad n=10$$

$$x_o = a = 0$$

$$y_o = f(x_0) = f(a) = 1$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{10} = \frac{1}{10} = 0.1$$

Método de Euler para orden 1

Ejemplo: $$y_{i+1} \approx y_i + \left(\frac{h}{2}\right)\left[f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_i + \mathrm{h}, \left[y_i + (h) f\left(x_i, y_i\right)\right]\right)\right]$$

Para la primera iteración

$$y_{i+1} \approx 1 + \left(\frac{0.1}{2}\right)\left[f(0) + f(0 + 0.5)\right] = 1.101$$

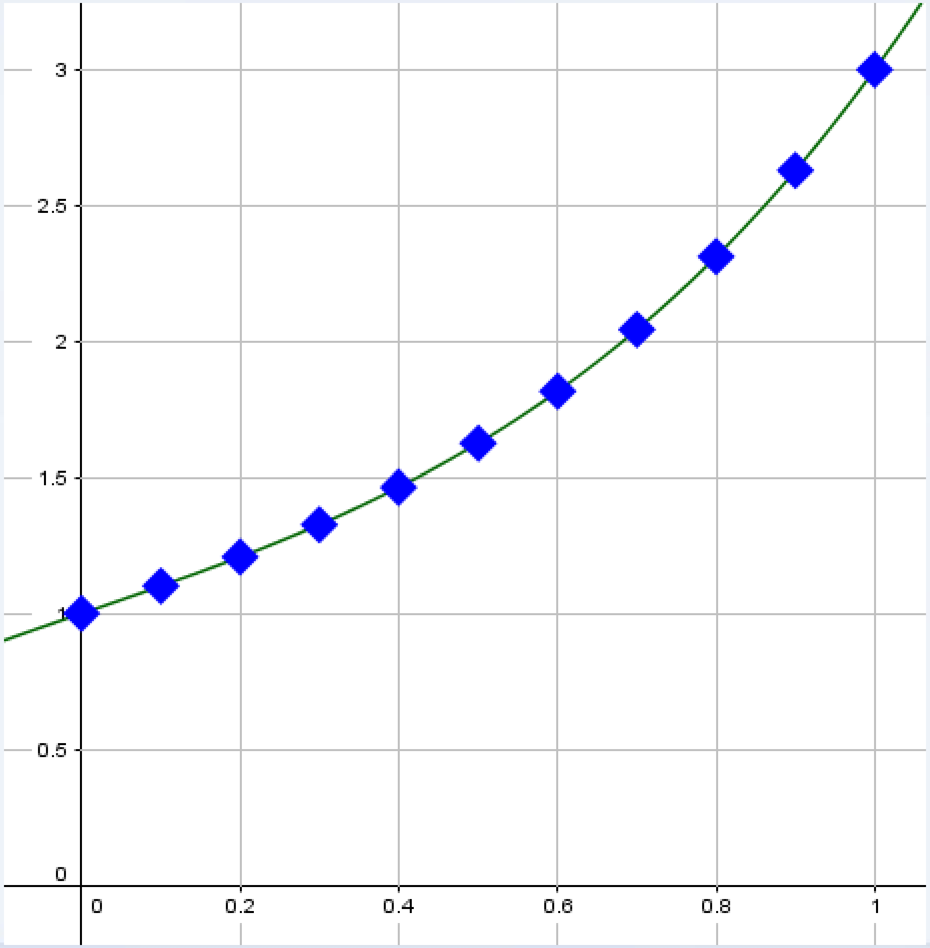
Para la segunda iteración

$$y_{i+1} \approx 1.101 + \left(\frac{0.1}{2}\right)\left[f(0 - 1) + f(0.1 + 0.5)\right] = 1.208$$

Método de Euler para orden 1

Ejemplo:

X	Valor Real (y)	Euler (y)
0	1	
0.1	1.101	1.101
0.2	1.208	1.208
0.3	1.327	1.327
0.4	1.464	1.464
0.5	1.625	1.625
0.6	1.806	1.816
0.7	2.043	2.043
0.8	2.312	2.313
0.9	2.629	2.631
1	3	3.002



Métodos de Euler Mejorado

Ejemplo: Utilizando el método de Euler mejorado integre numéricamente la siguiente ecuación (integrar seria equivalente a obtener la solución de la ecuación diferencial) :

$$\frac{d\left(y(x)\right)}{dx} = y' = f\left(x, y(x)\right) = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

De x=0 a x=4, con un tamaño de paso de h=0.5. La condición inicial en x=0 es y=2 (es decir y(0)=2.)

Métodos de Euler Mejorado

Ejemplo:

$$y_1 = y_0 + \left(\frac{h}{2}\right)\left[f\left(x_0, y_0\right) + f\left(x_1,\left[y_0 + \left(h\right) f\left(x_0, y_0\right)\right]\right)\right]$$

$$y_1 = 2 + \left(\frac{0.5}{2}\right)\left[f\left(0,2\right) + f\left(0.5,\left[2 + \left(0.5\right) f\left(0,2\right)\right]\right)\right]$$

$$y_1 = 2 + \left(\frac{0.5}{2}\right)\left[\left(4e^{0.8(0)} - 0.5\left(2\right)\right) + f\left(0.5,\left[2 + \left(0.5\right)\left(4e^{0.8(0)} - 0.5\left(2\right)\right)\right]\right)\right]$$

Métodos de Euler Mejorado

Ejemplo:

$$y_1 = 2 + \left(\frac{0.5}{2}\right)\left[3 + f\left(0.5, \left[2 + (0.5)(3)\right]\right)\right] = 2 + \left(\frac{1}{4}\right)\left[3 + f\left(0.5, 3.5\right)\right]$$

$$y_1 = 2 + \left(\frac{1}{4}\right)\left[3 + \left(4e^{0.8(0.5)} - 0.5(3.5)\right)\right]$$

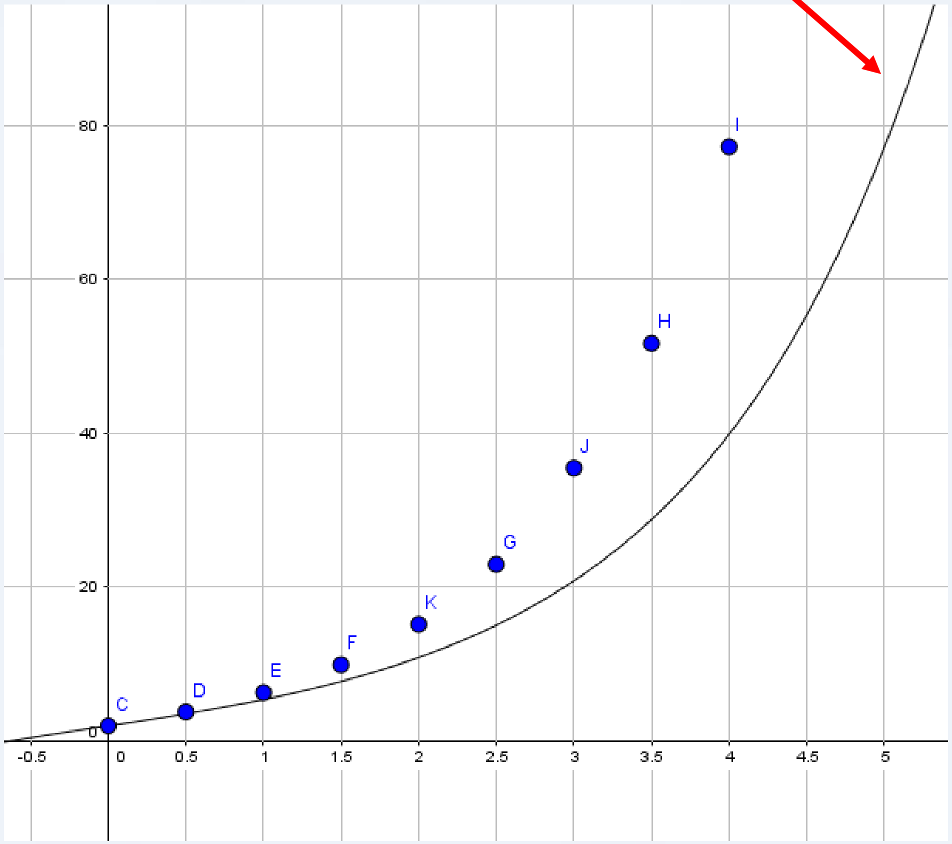
$$y_1 = 2 + \left(\frac{1}{4}\right)\left[3 + 4.217\right] = 3.804$$

Método de Euler mejorado

Ejemplo:

$$y=\int f\left(x,y\right)dx=5e^{0.8x}-0.5xy+c$$

X	Euler Mejorado (y)
0	2.000
0.5	3.804
1	6.316
1.5	9.924
2	15.196
2.5	22.976
3	34.515
3.5	51.677
4	77.239



Método de Taylor para polinomios de orden m

El método de Taylor opera con un polinomio de Taylor que nos permite resolver ecuaciones diferenciales a partir de un polinomio de orden m.

$$y_{i+1} = y_i + h\left[f^{[1]}(x_i, y_i) + \frac{h}{2} f^{[2]}(x_i, y_i) + \frac{h^2}{3!} f^{[3]}(x_i, y_i) + \ldots + \frac{h^{m-1}}{m!} f^{[m-1]}(x_i, y_i) \right]$$

$$error = f^{m}(x_i)\left(\frac{h^m}{n!}\right) \Leftarrow$$

Por truncamiento

Método de Taylor para polinomios de orden m

Aplicando el método de Taylor de orden 4, para la siguiente función, obtener la solución e la ecuación diferencial que cumple con las siguientes condiciones:

$$EDO\begin{cases} y' = \cos(\mathrm{x}) \\ y(0) = 0 \\ x \in [0,1] \end{cases}$$

Método de Taylor para polinomios de orden m

Calculando las m derivadas:

$$y' = \cos(\mathrm{x})$$

$$y''' = -sen(\mathrm{x})$$

$$y''' = -\cos(\mathrm{x})$$

$$y^{'\mathrm{v}} = sen(\mathrm{x})$$

Sustituyéndolas en la ecuación de recurrencia:

$$y_{i+1} = y_i + h\left[\cos(x) - \frac{h^1}{2}\mathrm{sen}(x) - \frac{h^2}{3!}\cos(x) + \frac{h^3}{4!}sen(x)\right]$$

Método de Taylor para polinomios de orden m

Sustituyendo valores para obtener Y1:

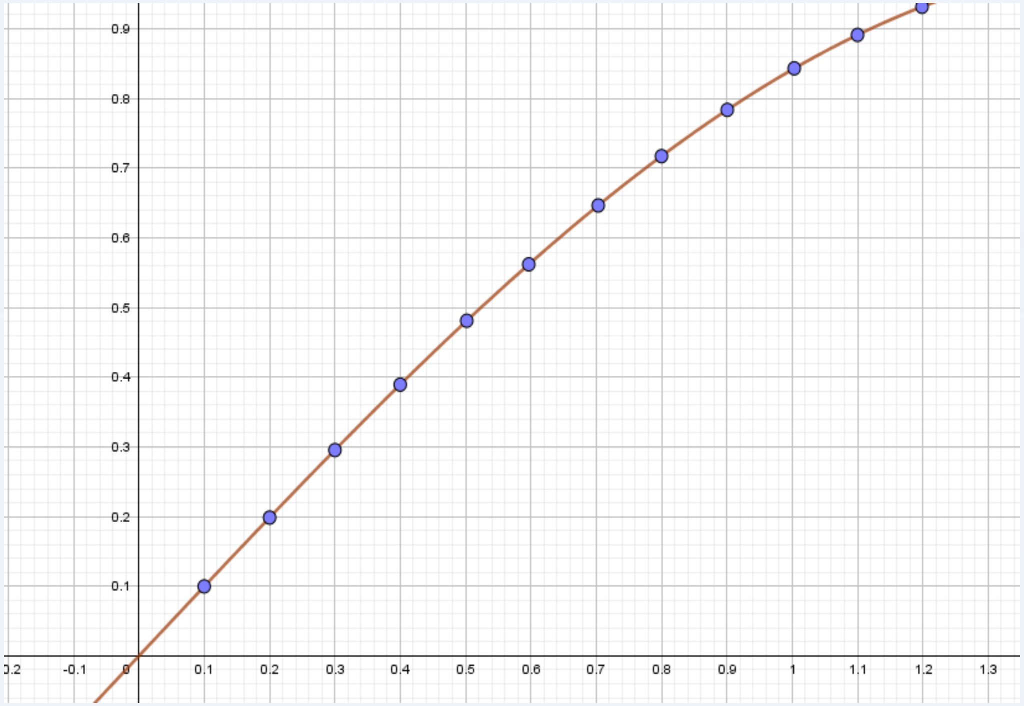
$$y_1 = 0 + \left(\frac{1}{10}\right)\left[\cos(0) - \frac{(1/10)^1}{2}\operatorname{sen}(0) - \frac{(1/10)^2}{6}\cos(0) + \frac{(1/10)^3}{24} sen(0)\right]$$

$$y_{|1} = 0 + \left(\frac{1}{10}\right)\left[1 - \frac{(1/10)^2}{6}(1)\right] = 0.09833$$

Método de Taylor para polinomios de orden m

Calculando las demás Yi:

X	Yreal	Y talor
0.0	0	0
0.1	0.0998	0.0998
0.2	0.1987	0.1987
0.3	0.2955	0.2955
0.4	0.3894	0.3894
0.5	0.4794	0.4794
0.6	0.5646	0.5646
0.7	0.6442	0.6442
0.8	0.7174	0.7174
0.9	0.7833	0.7833
1.0	0.8415	0.8415



Método de Taylor para polinomios de orden m

Regla de la cadena para funciones multivariables.

$$y' = \frac{d}{dx} f\left(x, y\left(x\right)\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$

$$y^{[k]} = f^{[k]}\left(\mathrm{x}, y\right) = f\left(\mathrm{x}, y\right) \qquad \text{con } k = 1, 2, 3, 4 \ldots m$$

$$y^{[k+1]} = f^{[k+1]}\left(\mathrm{x}, y\right) = f_x^{[k]}\left(\mathrm{x}, y\right) + f_y^{[k]}\left(\mathrm{x}, y\right) f\left(\mathrm{x}, y\right)$$

Método de Taylor para polinomios de orden m

Ejemplo: Aplicar el método de Taylor de orden 4 (m=4) bajo las siguientes condiciones.

$$\frac{dy}{dx} = 0.7y - x^2 + 1 \qquad x \in [1, 2] \qquad y(1) = 1 \qquad n=10$$

Método de Taylor para polinomios de orden m

Ejemplo:

$$y^{[k+1]} = f_x^{[k]}(\mathrm{x}, y) + f_y^{[k]}(\mathrm{x}, y)\, f(\mathrm{x}, y)$$

$$y' = f'(x, y) = \left(0.7y - x^2 + 1\right)$$

$$y'' = f''(x, y) = \left(-2\mathrm{x}\right) + \left(0.7\right)\left(0.7y - x^2 + 1\right)$$

$$y''' = f'''(x, y) = \left(-2 - 2(0.7)x\right) + \left(0.7^2\right)\left(0.7y - x^2 + 1\right)$$

$$y^{\mathrm{iv}} = f^{\mathrm{iv}}(x, y) = \left(-2(0.7) - (2)\left(0.7^2\right)x\right) + \left(0.7^3\right)\left(0.7y - x^2 + 1\right)$$

Método de Taylor para polinomios de orden m

Aplicando el método de Taylor de orden m, con h=0.1 yi=1 y xi=1:

$$y_{i+1} = y_i + h\left[y' - \frac{h^1}{2} y'' - \frac{h^2}{3!} y''' + \frac{h^3}{4!} y^{iv} \right]$$

$$y' = \left(0.7(1) - (1)^2 + 1\right) = 0.7$$

$$y'' = \left(-2(1)\right) + (0.7)\left(0.7(1) - (1)^2 + 1\right) = -2 + 0.7^2 = -1.51$$

$$y''' = \left(-2 - 2(0.7)(1)\right) + \left(0.7^2\right)\left(0.7(1) - (1)^2 + 1\right) = -3.0570$$

$$y^{iv} = \left(-2(0.7) - (2)\left(0.7^2\right)(1)\right) + \left(0.7^3\right)\left(0.7(1) - (1)^2 + 1\right) = -2.1399$$

Método de Taylor para polinomios de orden m

Ejemplo:

$$y_1 = 1 + 0.1\left[0.7 + \frac{0.1}{2}(-1.51) + \frac{(0.1)^2}{3!}(-3.057) + \frac{(0.1)^3}{4!}(-2.1399)\right]$$

$$y_1 = 1.0619$$

Método de Taylor para polinomios de orden m

Ejemplo: Calculando y2, partiendo de y1=1.0619 x=0.1 y h=0.1

$$y_2 = 1.0619 + 0.1\left[0.5333 + \frac{0.1}{2}(-1.8266) + \frac{(0.1)^2}{3!}(-3.2786) + \frac{(0.1)^3}{4!}(-2.2950)\right]$$

$$y_2 = 1.1237$$

Método de Taylor para polinomios de orden m

Ejemplo:

i	x	y
0	1	1.00000000000
1	1.1	1.06193158375
2	1.2	1.1238631675
3	1.3	1.1856062675
4	1.4	1.24753785125
5	1.5	1.309469435
6	1.6	1.37140101875
7	1.7	1.4333326025
8	1.8	1.49526418625
9	1.9	1.55719577
10	2	1.61912735375

Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Runge-Kutta (RK) se basan indirectamente en el método de Taylor, pero sin requerir el cálculo de derivadas superiores.

Probablemente son uno de los procedimientos más difundidos, y a la vez más exactos, para obtener la solución numérica del problema de valor inicial:

$$y' = f(t, y) \quad \text{con} \quad y(t_0) = y_0$$

Métodos de Runge-Kutta

Los métodos de Runge Kutta de cualquier orden se deducen mediante el desarrollo de la serie de Taylor de la función f(x,y). Existen muchas variaciones, las cuales tienen la forma:

$$y_{i+1} \approx y_i + h * \left(a_1 k_1 + a_2 k_2 + a_3 k_3 + \ldots + a_n k_n\right)$$

donde las a_i son constantes que dependen del orden del método y las k son calculadas de manera recursiva (es decir para obtener k_2, previamente se debió calcular k_1, y así para los subsecuentes valores)

Métodos de Runge-Kutta

La idea general de los métodos de Runge-Kutta es sustituir el problema de valor inicial:

$$y' = f(x, y) \quad \text{con} \quad y(x_0) = y_0$$

Por la ecuación equivalente:

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx \Rightarrow y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\, dx$$

$$\Downarrow$$

$$y_{i+1} = y_i + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y(x))\, dx$$

Métodos de Runge-Kutta 2 orden

La primera opción que podemos aplicar es integrar mediante el método de los trapecios, es decir tomando:

Trapecio=(B+b)h/2

$$y_{i+1} \approx y_i + \frac{h}{2}\left(f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y^*_{i+1}\right)\right)$$

Donde:

$$y^*_{i+1} = y_i + (h) f\left(x_i, y_i\right)$$

Euler Simple

Sustituyendo tendríamos.:

$$y_{i+1} \approx y_i + \frac{h}{2}\left(f\left(x_i, y_i\right) + f\left(x_{i+1}, y_i + hf\left(x_i, y_i\right)\right)\right)$$

Métodos de Runge-Kutta 2 orden

Pero lo normal es presentar el método con las expresiones siguientes:

$$k_1 = hf\left(x_i, y_i\right)$$
$$k_2 = hf\left(x_{i+1}, y_i + k_1\right)$$

$$\Rightarrow \quad y_{i+1} \approx y_i + \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right)$$

Métodos de Runge-Kutta de 2 orden

Ejemplo: Utilizando el método Runge-Kutta de orden 2 resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d\left(y(x)\right)}{x} = y' = f\left(x, y(x)\right) = 4e^{0.8x} - 0.5y$$

De x=0 a x=4, con un tamaño de paso de h=0.5. La condición inicial en x=0 es y=2

Métodos de Runge-Kutta de 2 orden

Ejemplo:

$$k_1 = hf\left(x_i, y_i\right) = 0.5\left(4e^{0.8(0)} - 0.5(2)\right) = 1.5$$

$$k_2 = hf\left(x_{i+1}, y_i + k_1\right) = 0.5\left(4e^{0.8(0)} - 0.5(2+1.5)\right) = 2.1086$$

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right) = 2 + \frac{1}{2}\left(1.5 + 2.1086\right) = 3.8043$$

Métodos de Runge-Kutta 2 orden

Ejemplo:

i	x	y
0	0.0	2.0000
1	0.5	3.8043
2	1.0	6.3165
3	1.5	9.924
4	2.0	15.1962
5	2.5	22.9759
6	3.0	34.5149
7	3.5	51.6768
8	4.0	77.2385

Métodos de Runge-Kutta 4 orden

Aunque se podría calcular el método para distintos ordenes, el más utilizado Es el de cuarto orden que se origina al integrar la función tomando como base la solución de la integral por medio de Simpson 1/3:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}\left(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4\right)$$

$$k_1 = hf\left(x_i, y_i\right)$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \mathrm{h}/2, y_i + k_1/2\right)$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \mathrm{h}/2, y_i + k_2/2\right)$$

$$k_4 = hf\left(x_i + \mathrm{h}, y_i + k_3\right)$$

Métodos de Runge-Kutta de 4 orden

Ejemplo: Utilizando el método Runge-Kutta de orden 4 resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = x^2 - 3y$$

De x=0 a x=1, con un tamaño de paso de h=0.1. La condición inicial en x=0 es y=1

Métodos de Runge-Kutta de 4 orden

Ejemplo:

$$k_1 = hf\left(x_i, y_i\right) = (0.1)\left((0)^2 - 3(1)\right) = -0.3$$

$$k_2 = hf\left(x_i + \mathrm{h}/2, y_i + k_1/2\right) = (0.1)\left((0+0.1/2)^2 - 3(1+0.3/2)\right) = \text{-}0.2547$$

$$k_3 = hf\left(x_i + \mathrm{h}/2, y_i + k_2/2\right) = (0.1)\left((0+0.1/2)^2 - 3(1\text{-}0.2547/2)\right) = \text{-}0.2615$$

$$k_4 = hf\left(x_i + \mathrm{h}, y_i + k_3\right) = (0.1)\left((0+0.1)^2 - 3(1\text{-}0.2615)\right) = \text{-}0.2205$$

$$y_1 = 1 + \frac{1}{6}\left((-0.3) + 2(\text{-}0.2547) + 2(\text{-}0.2615) + (\text{-}0.2205)\right) = 0.7411$$

M.I. Víctor Manuel Durán Campos

Métodos de Runge-Kutta 4 orden

Ejemplo:

i	x	y
0	0.0	1.0000
1	0.1	0.7411
2	0.2	0.5511
3	0.3	0.4139
4	0.4	0.3174
5	0.5	0.2529
6	0.6	0.2138
7	0.7	0.1952
8	0.8	0.1936
9	0.9	0.2063
10	1.0	0.2313

Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden

Los métodos utilizados para resolver este tipo de sistemas, parten del supuesto de que las ecuaciones involucradas son de ***primer orden*** y en caso de no serlo deben ser ***transformadas***.

Además deben conocer las condiciones iniciales de cada una de las ecuaciones involucradas y el valor del salto o espaciamiento sobre el eje x.

$$y' = f(x, y, z) \qquad \text{con } y(x_0)=\text{constante}$$

$$z' = g(x, y, z) \qquad \text{con } z(x_0)=\text{constante}$$

$$\text{h=constate} \qquad \text{con } x_0 = \text{constante}$$

Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden

La solución del sistema se realiza obteniendo la solución cada una de las ecuaciones diferenciales en forma individual, pero los resultados previos alimentarán a las siguientes ecuaciones diferenciales (se produce una liga entre ellas).

$$y_1 = y_0 + h \ \phi(x, y, z)$$

$$z_1 = z_0 + h \ \phi(x, y, z)$$

Se puede aplicar cualquiera de los métodos vistos hasta ahora (Euler, Euler Mejorado, Taylor, Runge Kutta-2, Runge Kutta-4).

Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden (Euler-Gauss)

Ejemplo: Si resolvemos el sistema con ***Euler mejorado***, las ecuaciones recursivas que se usarían para resolver el problema serian:

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$y_{i+1} = y_i + h * f\left(x_i, y_i, z_i\right)$$

$$z_{i+1} = z_i + h * f\left(x_i, y_i, z_i\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left(f\left(x_i, y_i,, z_i\right) + f\left(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}\right)\right)$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{2}\left(g\left(x_i, y_i, z_i\right) + g\left(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1}\right)\right)$$

Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden

Ejemplo: Sea el sistema de ecuaciones de primer orden siguiente, por medio de Euler mejorado encontrar la solución del sistema bajo las condiciones iniciales que más abajo se muestran:

$$y' = 4x - y + 1 \quad \Rightarrow \quad y' = f(x, y)$$

$$z' = 2z - y \quad \Rightarrow \quad z' = g(z, y)$$

$$y(0) = 1$$

$$z(0) = 1$$

$$h = 0.1$$

$$\text{Intevalo de análisis x} \in [0,1]$$

Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden (Euler-Gauss)

Primera iteración i=0, Calculando el valor de Y_{i+1}

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f\left(x_0, y_0\right) + f\left(x_1, \mathrm{y}_1\right)\right)$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f\left(x_0,\ \ \mathrm{y}_0\right) + f\left(x_0 + h,\ \ \mathrm{y}_0 + hf\left(x_0, y_0\right)\right)\right)$$

$$y_1 = 1 + \frac{(1/10)}{2}\left(f\left(0,1\right) + f\left(0 + 1/10,\ \ 1 + (1/10)f\left(0,1\right)\right)\right) = 1.0200$$

Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden (Euler-Gauss)

Calculando el valor de Z_{i+1}

$$y_1 = 1.0200$$ ← **Que fue calculado en el paso anterior**

$$z_1 = z_0 + \frac{h}{2}\left(g\left(y_0,\ z_0\right) + g\left(y_1,\ z_1\right)\right)$$

$$y_1 = 1 + \frac{(1/10)}{2}\left(g(1,1) + g\left(1.0200,\ 1+(1/10)g(1,1)\right)\right) = 1.1090$$

Sistemas de ecuaciones diferenciales de primer orden (Euler-Gauss)

Resolviendo el sistema con un programa que nos arroja los siguientes resultados:

x	y	z
0.0000	1.0000	1.0000
0.1000	1.0200	1.1090
0.2000	1.0761	1.2380
0.3000	1.1649	1.3875
0.4000	1.2832	1.5587
0.5000	1.4283	1.7532
0.6000	1.5976	1.9734
0.7000	1.7888	2.2222
0.8000	1.9999	2.5038
0.9000	2.2289	2.8232
1.0000	2.4742	3.1868
1.1000	2.7341	3.6027

En el ejemplo se utilizo Euler modificado, pero podría haberse usado Runge-Kutta o Taylor para resolver el sistema.

Solución de ecuaciones diferenciales de orden m

Como se comento anteriormente en caso de que las ecuaciones diferenciales que componen el sistema sean de un orden mayor a 1, deben transformarse y posteriormente se puede aplicar los métodos vistos para sistemas de orden uno.

Partiendo de que toda ecuación de orden M puede transformarse en una de orden uno.

$$y^{\mathrm{'v}} + 2xy''' + 3y'' + 4y' + 5\,\mathrm{xy} + 6 = 0$$

Con condiciones iniciales:

$$y'''(x_0),\;\; y''(x_0),\;\; y'(x_0),\;\;\; \mathrm{y}(x_0)$$

Solución de ecuaciones diferenciales de orden m

Utilizando un cambio de variable U=y', Sustituyendo en la ecuación original tenemos:

$$U''' + 2xU'' + 3U' + 4U + 5\,\mathrm{xy} + 6 = 0$$

Como la ecuación sigue siendo de orden mayor a uno se realiza otro cambio de variable:

$$W = U'$$

$$W'' + 2xW' + 3W + 4U + 5\,\mathrm{xy} + 6 = 0$$

Solución de ecuaciones diferenciales de orden m

El proceso se repite tantas veces hasta obtener una ecuación diferencial de orden uno.

$$Z = W'$$

$$Z' + 2xZ + 3W + 4U + 5\,\mathrm{xy} + 6 = 0$$

Solución de ecuaciones diferenciales de orden m

Después de haber aplicado varias transformaciones nos queda lo siguiente, y con dicha información se puede resolver este sistema con cualquier método (Euler, Euler modificado, Runge Kutta de 2 y 4 orden, Taylor):

$$Y' = U$$

$$U' = W$$

$$W' = Z$$

$$Z' = 2xZ - 3W - 4U - 5\,\mathrm{xy} - 6$$

Con las siguientes condiciones:

$$Y(x_0)$$

$$Y'(x_0) \Rightarrow U(x_0)$$

$$Y''(x_0) \Rightarrow W(x_0)$$

$$Y'''(x_0) \Rightarrow Z(x_0)$$

Solución de ecuaciones diferenciales de orden m

Ejemplo: Resolver la siguiente ecuación de segundo orden transformándola en un sistema de ecuaciones diferenciales, y ese sistema resolverlo con Runge-Kutta de orden 2.

$$y'' = 18x$$

Bajo las siguientes condiciones:

$$y(x_0) = 0$$

$$y'(x_0) = -2$$

$$\text{Intervalo en } x \in [0,1]$$

$$h = 0.2$$

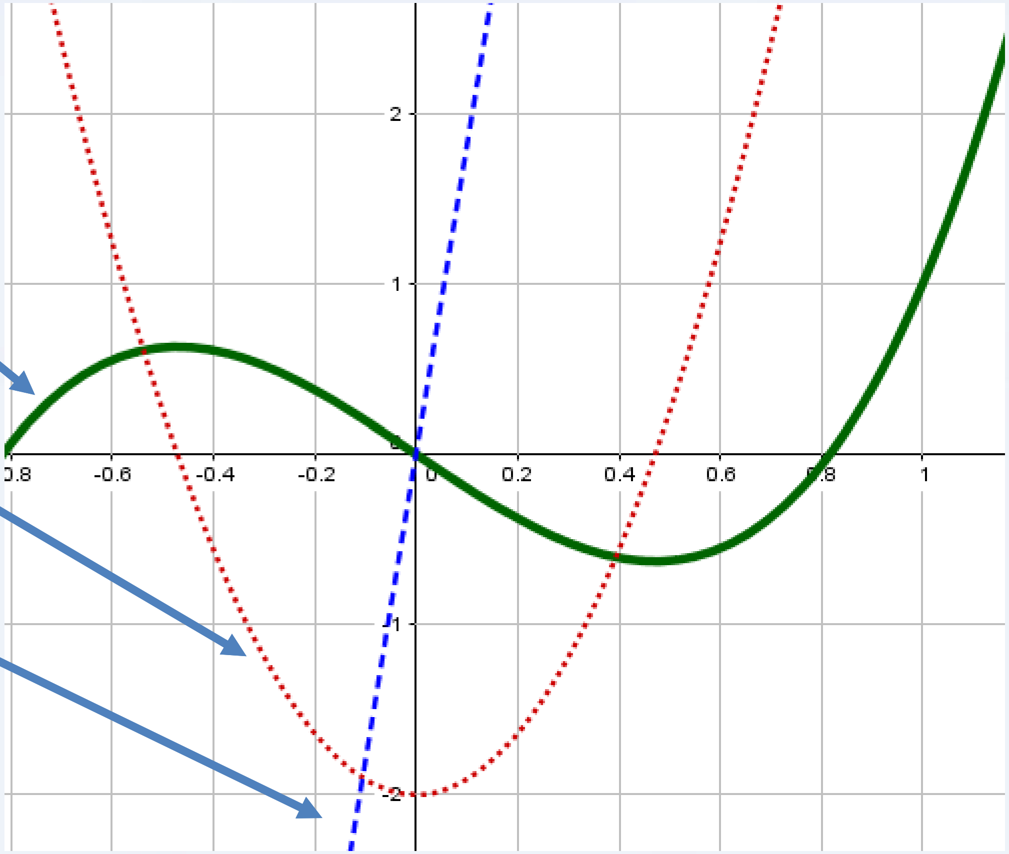
Solución de ecuaciones diferenciales de orden m

Las ecuaciones originales son:

$$y = 3x^3 - 2x$$

$$y' = 9x^2 - 2$$

$$y'' = 18x$$



Solución de ecuaciones diferenciales de orden m

Ejemplo: Utilizando variables auxiliares para transformar a orden uno la ecuación diferencial.

$$y''=18x$$

$$\Downarrow$$

$$U=y'$$

$$\Downarrow$$

$$U'=18x$$

$$\Rightarrow$$

Sistema final

$$U'=18x \quad \Rightarrow \quad U'=f(x)$$

$$y'=U \quad \Rightarrow \quad y'=g(U)$$

$$x_0=0$$

$$y(x_0)=0$$

$$y'(x_0)=U(x_0)=-2$$

Solución de ecuaciones diferenciales de orden m

Ejemplo: Aplicando Runge-Kutta al sistema:

$$k_1 = hf\left(x_i, y_i\right)$$

$$k_2 = hf\left(x_{i+1}, y_i + k_1\right)$$

$$y_{i+1} \approx y_i + \frac{1}{2}\left(k_1 + k_2\right)$$

$$\Rightarrow$$

$$X_{i+1} = X_i + h$$

$$U_{i+1} \approx U_i + \frac{1}{2}\left(k_{U1} + k_{U2}\right)$$

$$Y_{i+1} \approx Y_i + \frac{1}{2}\left(k_{Y1} + k_{Y2}\right)$$

Solución de ecuaciones diferenciales de orden m

Ejemplo: Aplicando Runge-Kutta al sistema:

$$X_0 = 0$$

$$X_1 = X_0 + h = 0 + 0.2 = 0.2$$

$$U_0 = -2$$

$$k_{U1} = h * f(\mathrm{X}_0) = 0.2 * f(0) = 0.2 * \left(18 * 0\right) = 0$$

$$k_{U2} = h * f(\mathrm{X}_1) = 0.2 * f\left(0.2\right) = 0.2 * \left(18 * 0.2\right) = 0.72$$

$$U_1 \approx U_0 + \frac{1}{2}\left(k_{U1} + k_{U2}\right) = -2 + \frac{1}{2}\left(0 + 0.72\right) = -1.64$$

Solución de ecuaciones diferenciales de orden m

Ejemplo: Aplicando Runge-Kutta al sistema:

$$U_0 = -2$$

$$U_1 = -1.64$$

$$Y_0 = 0$$

$$k_{Y1} = h * \mathrm{g}(\mathrm{U}_0) = 0.2 * \mathrm{g}(-2) = 0.2 * \left(-2\right) = -0.4$$

$$k_{Y2} = h * \mathrm{g}(\mathrm{U}_1) = 0.2 * \mathrm{g}\left(-1.64\right) = 0.2 * \left(-1.64\right) = -3.28$$

$$Y_1 \approx Y_0 + \frac{1}{2}\left(k_{U1} + k_{U2}\right) = 0 + \frac{1}{2}\left((-0.4) + (-3.28)\right) = -3.68$$

Solución de ecuaciones diferenciales de orden m

Ejemplo: Aplicando Runge-Kutta al sistema:

$$X_0 = 0 \qquad X_1 = 0.2$$

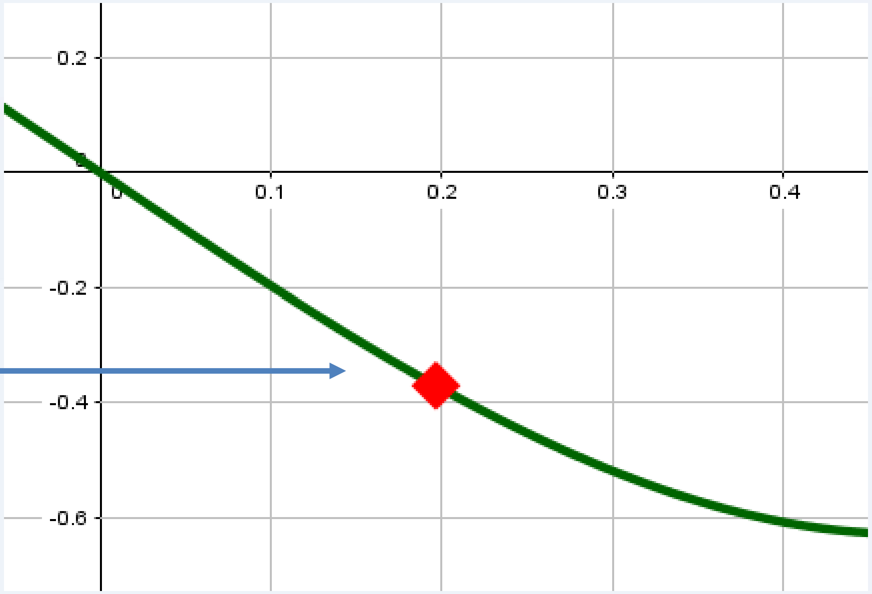
$$Y_0 = 0 \qquad Y_1 = -3.68$$

Solución de ecuaciones diferenciales de orden m

Ejemplo: Comparando con el valor real

$$Y(0.2)\ \text{calculada} = -0.364$$

$$Y(0.2)\ \text{real} = -0.376$$



Solución de ecuaciones diferenciales de orden m

Ejemplo: Llenar tabla de resultados

X	U	Ycalculada	Yreal
0	-2	0	0
0.2	-1.64	-0.364	-0.376
0.4			-0.608
0.6			-0.552
0.8			-0.06
1			1

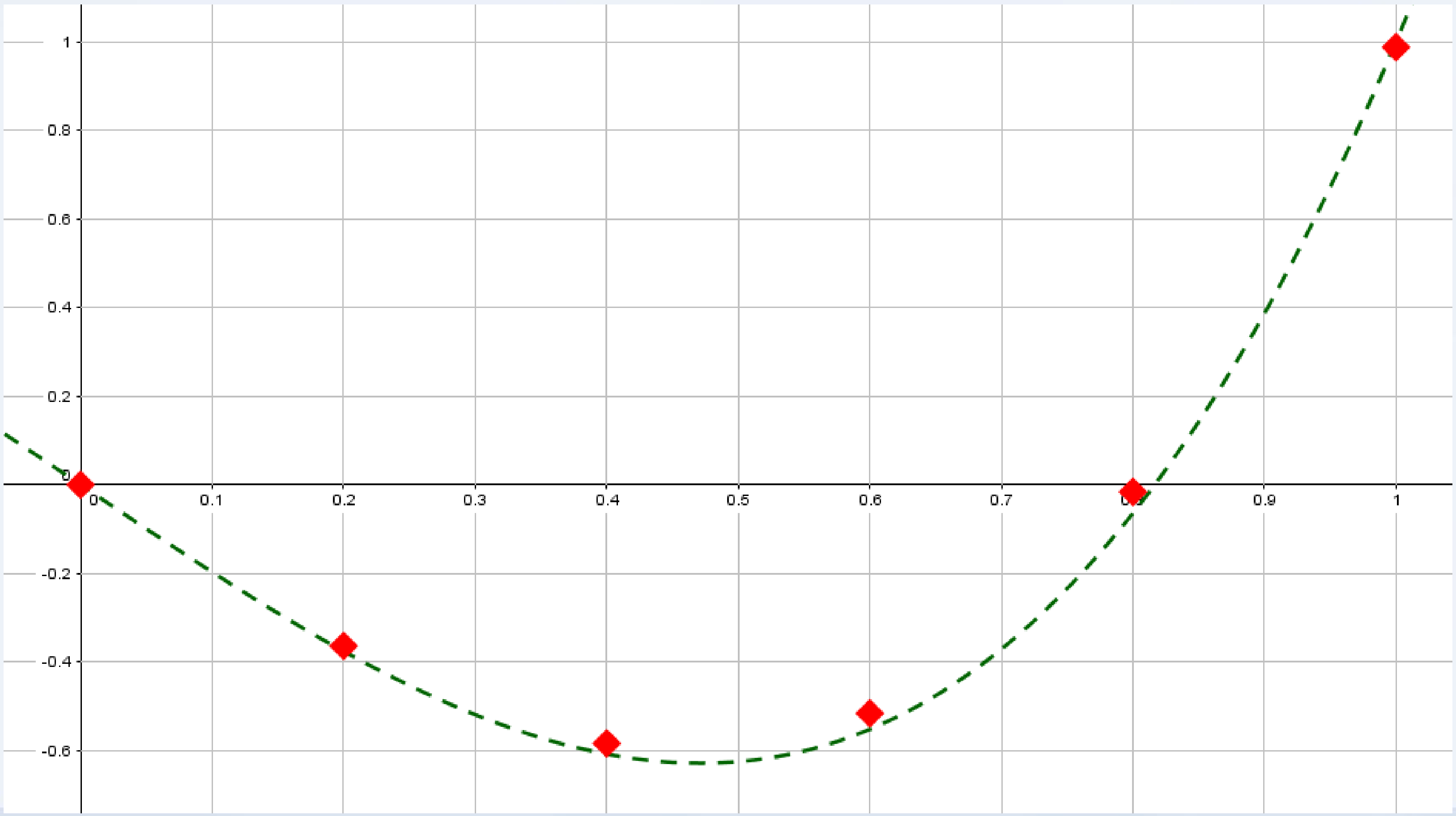
Solución de ecuaciones diferenciales de orden m

Ejemplo: Tabla de resultados

X	U	Ycalculada	Yreal
0	-2	0	0
0.2	-1.64	-0.364	-0.376
0.4	-0.56	-0.584	-0.608
0.6	1.24	-0.516	-0.552
0.8	3.76	-0.016	-0.016
1	7.00	1.060	1.060

Solución de ecuaciones diferenciales de orden m

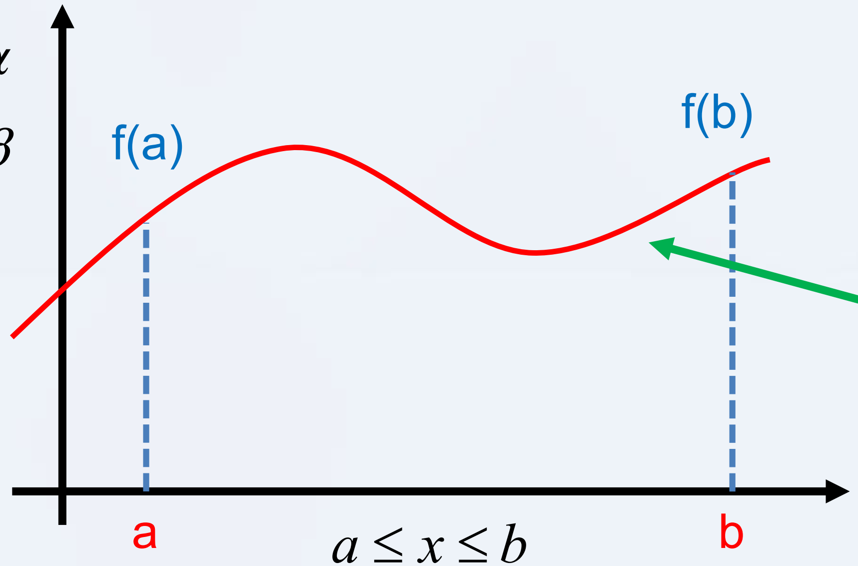
Ejemplo: Gráfica



Método de diferencias finitas

Se utiliza principalmente para resolver ecuaciones de orden mayor a 2 sin necesidad de una transformación a orden uno.

$$f(a)=\alpha$$
$$f(a)=\beta$$



$$a \le x \le b$$

$$y'' = f(x, y, y')$$

Pero se requieren de más de una condición de frontera para poder ser resueltas.

Método de diferencias finitas

La solución para este tipo de problemas se puede realizar en dos pasos:

Primer Paso: Aplicar el método de las diferencias finitas.

Segundo Paso: Elegir entre aplicar el método del disparo (también conocido como del artillero) o establecer un sistema de ecuaciones lineales producto del pivoteo de la ecuación de recurrencia.

Ejemplo:

$$y'' = 2y' - 5$$

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 2 \quad \Rightarrow \quad x \in [0,1]$$

$$h = 0.2$$

Método de diferencias finitas

El método de diferencias finitas consiste en sustituir en la ecuación diferencial las formulas de derivación numérica (obtenidas en las tablas de diferencias vistas en el capítulo anterior).

Por ejemplo se muestran las formulas de las primeras derivadas por diferencias (Se puede tomar cualquiera de ellas):

Hacia adelante

$$y'_{\mathrm{i}} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Hacia atrás

$$y'_{\mathrm{i}} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h}$$

$$\text{Con } h = \Delta x$$

Central o centrada

$$y'_{\mathrm{i}} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$$

Método de diferencias finitas

Tabla de diferencias finitas hacia adelante

y_{i-2}

y_{i-1}

En lugar de valores se manejan literales, pero es la misma lógica del capítulo anterior

y_i

y_{i+1}

y_{i+2}

$$y'_{\mathrm{i}} = \left(y_{i+1} - y_i \right) / h$$

$$y'_{\mathrm{i+1}} = \left(y_{i+2} - y_{i+1} \right) / h$$

$$y''_{\mathrm{i}} = \left(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \right) / h^2$$

Método de diferencias finitas

Cálculo de la segunda hacia adelante por diferencias finitas

$$y''_{\mathrm{i}} = \frac{\dfrac{y_{i+2} - y_{i+1}}{h} - \dfrac{y_{i+1} - y_i}{h}}{h} = \frac{y_{i+2} - y_{i+1} - y_{i+1} + y_i}{h^2}$$

$$y''_{\mathrm{i}} = \frac{y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i}{h^2}$$

Diferencias finitas centrales

Orden de la derivada	Orden de precisión	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4
1	2				−1/2	0	1/2			
	4			1/12	−2/3	0	2/3	−1/12		
	6		−1/60	3/20	−3/4	0	3/4	−3/20	1/60	
	8	1/280	−4/105	1/5	−4/5	0	4/5	−1/5	4/105	−1/280
2	2				1	−2	1			
	4			−1/12	4/3	−5/2	4/3	−1/12		
	6		1/90	−3/20	3/2	−49/18	3/2	−3/20	1/90	
	8	−1/560	8/315	−1/5	8/5	−205/72	8/5	−1/5	8/315	−1/560
3	2			−1/2	1	0	−1	1/2		
	4		1/8	−1	13/8	0	−13/8	1	−1/8	
	6	−7/240	3/10	−169/120	61/30	0	−61/30	169/120	−3/10	7/240
4	2			1	−4	6	−4	1		
	4		−1/6	2	−13/2	28/3	−13/2	2	−1/6	
	6	7/240	−2/5	169/60	−122/15	91/8	−122/15	169/60	−2/5	7/240
5	2		−1/2	2	−5/2	0	5/2	−2	1/2	
6	2		1	−6	15	−20	15	−6	1	

Ejemplo: Tercera derivada de grado o precisión dos:

$$y'''_{\mathrm{i}} = \left(-0.5y_{i-2} + y_{i-1} - y_{i+1} + 0.5y_{i+2}\right) / h^3$$

Solución numérica de ecuaciones y sistemas de ecuaciones diferenciales

Diferencias finitas hacia adelante

Orden de la derivada	Orden de precisión	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	−1	1							
	2	−3/2	2	−1/2						
	3	−11/6	3	−3/2	1/3					
	4	−25/12	4	−3	4/3	−1/4				
	5	−137/60	5	−5	10/3	−5/4	1/5			
	6	−49/20	6	−15/2	20/3	−15/4	6/5	−1/6		
2	1	1	−2	1						
	2	2	−5	4	−1					
	3	35/12	−26/3	19/2	−14/3	11/12				
	4	15/4	−77/6	107/6	−13	61/12	−5/6			
	5	203/45	−87/5	117/4	−254/9	33/2	−27/5	137/180		
	6	469/90	−223/10	879/20	−949/18	41	−201/10	1019/180	−7/10	
3	1	−1	3	−3	1					
	2	−5/2	9	−12	7	−3/2				
	3	−17/4	71/4	−59/2	49/2	−41/4	7/4			
	4	−49/8	29	−461/8	62	−307/8	13	−15/8		
	5	−967/120	638/15	−3929/40	389/3	−2545/24	268/5	−1849/120	29/15	
	6	−801/80	349/6	−18353/120	2391/10	−1457/6	4891/30	−561/8	527/30	−469/240
4	1	1	−4	6	−4	1				
	2	3	−14	26	−24	11	−2			
	3	35/6	−31	137/2	−242/3	107/2	−19	17/6		
	4	28/3	−111/2	142	−1219/6	176	−185/2	82/3	−7/2	
	5	1069/80	−1316/15	15289/60	−2144/5	10993/24	−4772/15	2803/20	−536/15	967/240

Precisión 1: $y''_i = \left(y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i \right) / h^2$

Diferencias finitas hacia atrás

En general, conseguir los coeficientes de la aproximación hacia atrás es muy simple. Para las derivadas de orden par (n = 2, 4, 6...) son los mismos que para la aproximación hacia delante. Por otro lado, para las derivadas de orden impar (n = 1, 3, 5...) basta con cambiar el signo de los coeficientes listados en la tabla anterior.

La tabla siguiente ilustra esto de manera resumida:

Orden de la derivada	Orden de precisión	−8	−7	−6	−5	−4	−3	−2	−1	0
1	1								−1	1
	2							1/2	−2	3/2
2	1							1	−2	1
	2						−1	4	−5	2
3	1						−1	3	−3	1
	2					3/2	−7	12	−9	5/2
4	1					1	−4	6	−4	1
	2				−2	11	−24	26	−14	3

Método de diferencias finitas por serie de Taylor

Las diferencias finitas también pueden ser deducidas aplicando las siguientes series de Taylor:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)+\frac{h^3}{6}f'''(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^n(x)$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)-\frac{h^3}{6}f'''(x)+\ldots+\frac{h^n}{n!}f^n(x)$$

Método de diferencias finitas por serie de Taylor

Por ejemplo para la primera derivada:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x)$$

Despejando la derivada:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

Método de diferencias finitas por serie de Taylor

Por ejemplo para la segunda derivada central, se sumarian las dos series ,hasta el tercer término:

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)$$

+

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)$$

$$f(x+h)+f(x-h)=f(x)+f(x)+hf'(x)-hf'(x)+\frac{h^2}{2}f''(x)\frac{h^2}{2}f''(x)$$

$$\Downarrow$$

$$f(x+h)+f(x-h)=2f(x)+h^2f''(x)$$

Método de diferencias finitas por serie de Taylor

Al despejar la segunda derivada tendríamos:

$$f''(x)=\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}$$

$$\Downarrow$$

$$f''(x)=\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}$$

Método de diferencias finitas

Ejemplo resolver la siguiente ecuación diferencial por medio de diferencias finitas:

$$y'' = 2y' - 5$$

Bajo las siguientes condiciones:

$$h = 0.2$$

$$x \in [0,1]$$

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 2$$

Método de diferencias finitas

Sustituyendo en la ecuación diferencial original y acomodando términos (Se utilizaron las diferencias centrales):

$$y'' = 2y' - 5$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\left(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}\right)/h^2\right) = 2\left(\left(y_{i+1} - y_{i-1}\right)/\left(2h\right)\right) - 5$$

$$\Downarrow$$

$$\left(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}\right)/\left(1/5\right)^2 = \left(y_{i+1} - y_{i-1}\right)/\left(1/5\right) - 5$$

Método de diferencias finitas

Ejemplo:

$$25\left(y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}\right)=5\left(y_{i+1}-y_{i-1}\right)-5$$

$$20y_{i+1}-50y_i+30y_{i-1}+5=0$$

$$4y_{i+1}-10y_i+6y_{i-1}+1=0$$

Será la ecuación de recurrencia del sistema con 3 incógnitas que tiene muchas soluciones.

Método de diferencias finitas

Ejemplo: Lo que se esta buscando es completar la siguiente tabla al pivotear la ecuación de recurrencia para encontrar los datos faltantes:

i	x	Y	
0	0.0	0	Y_0
1	0.2		Y_1
2	0.4		Y_2
3	0.6		Y_3
4	0.8		Y_4
5	1.0	2	Y_5

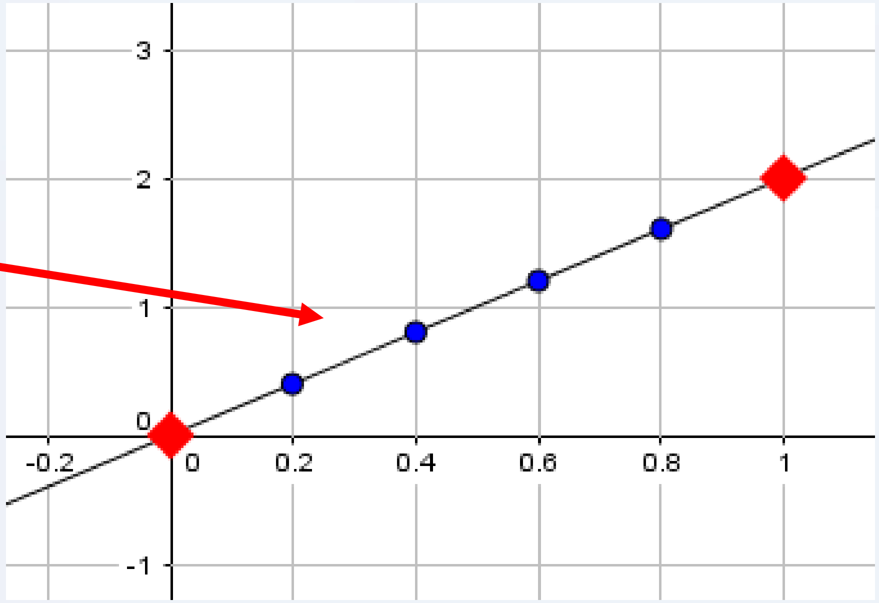
Método de diferencias finitas

Paso 2: Aplicar el método del artillero o la creación de un sistema de ecuaciones.

Partiremos de analizar el método del artillero el cual parte del supuesto de que la solución inicial es una recta que une los dos puntos proporcionados.

$$y = 2x$$

Se deduce por los dos puntos



$$y_0 = y(0) = 0$$
$$y_5 = y(1) = 2$$
$$h = 0.2$$

Y los valores faltantes se encuentran sobre dicha recta

Método de diferencias finitas

Se conoce Y_0 y de la ecuación de la recta podemos suponer el Y_1, (tomando como base la ecuación de la recta) y se deja libre Y_2 para determinar su valor tomando como base la ecuación de recurrencia:

i	x	y
0	0.0	0
1	0.2	0.4
2	0.4	
3	0.6	
4	0.8	
5	1.0	

$$y = 2x$$

$$y = 2(0.2) = 0.4$$

Para i=1

$$4y_2 - 10y_1 + 6y_0 + 1 = 0$$

$$4y_2 - 10(0.4) + 6(0) + 1 = 0$$

$$y_2 = 3/4 = 0.75$$

Método de diferencias finitas

Al conocer Y_2 se procede a calcular Y_3:

i	x	y
0	0.0	0
1	0.2	0.4
2	0.4	0.75
3	0.6	
4	0.8	
5	1.0	

Para i=2

$$4y_3 - 10y_2 + 6y_1 + 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$4y_3 - 10(3/4) + 6(2/5) + 1 = 0$$

$$y_3 = (30/4 - 12/5)/4 = 1.025$$

Método de diferencias finitas

Repitiendo el procedimiento para encontrar el siguiente valor de Y:

i	x	y
0	0.0	0
1	0.2	0.4
2	0.4	0.75
3	0.6	1.025
4	0.8	
5	1.0	

Para i=3

$$4y_4 - 10y_3 + 6y_2 + 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$4y_4 - 10(1.025) + 6(0.75) + 1 = 0$$

$$y_4 = 1.1875$$

Método de diferencias finitas

Repitiendo el procedimiento para encontrar el siguiente valor de Y:

i	x	y
0	0.0	0
1	0.2	0.4
2	0.4	0.75
3	0.6	1.025
4	0.8	1.1875
5	1.0	

Para i=4

$$4y_5 - 10y_4 + 6y_3 + 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

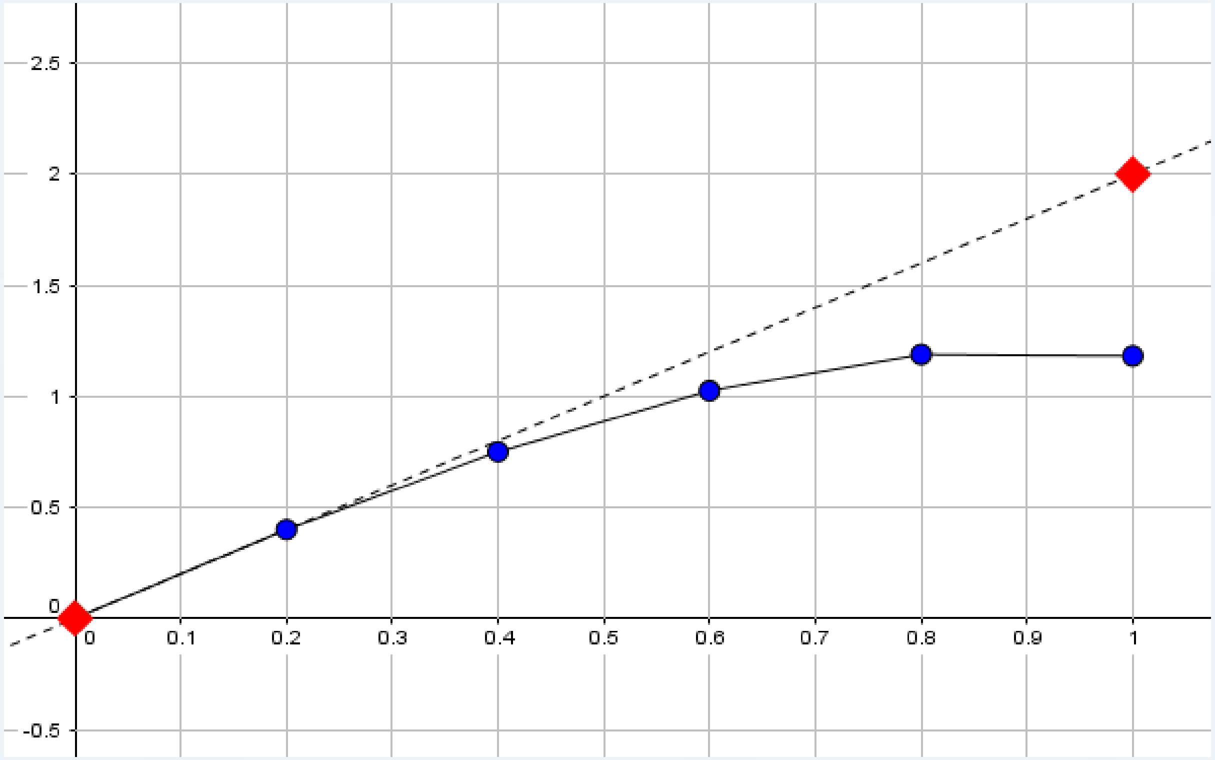
$$4y_5 - 10(1.1875) + 6(1.025) + 1 = 0$$

$$y_5 = 1.18125$$

Método de diferencias finitas

Al suponer que era una recta la ecuación no pasa por el segundo punto frontera. Por lo cual se debe realizar un ajuste modificando el primer punto de análisis. Para por así decirlo ajustar el cañón.

i	x	y
0	0.0	0
1	0.2	0.4
2	0.4	0.75
3	0.6	1.025
4	0.8	1.1875
5	1.0	1.18125



Método de diferencias finitas

Al estar el último punto por debajo de la altura objetivo se debe incrementar el valor de Y_1 para levantar la bala. Por ejemplo suponiendo un valor de 0.5

i	x	y
0	0.0	0
1	0.2	0.5
2	0.4	
3	0.6	
4	0.8	
5	1.0	

Para i=1

$$4y_2 - 10y_1 + 6y_0 + 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

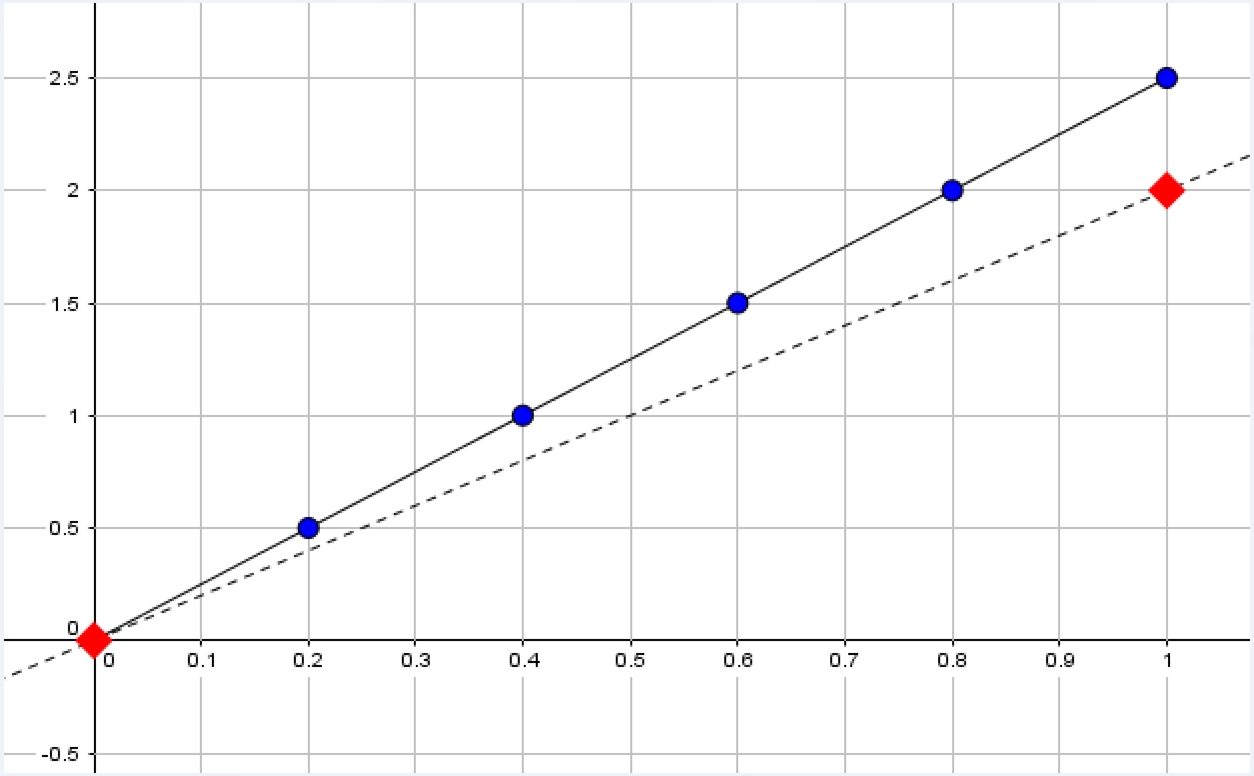
$$4y_2 - 10(1/2) + 6(0) + 1 = 0$$

$$y_2 = 1$$

Método de diferencias finitas

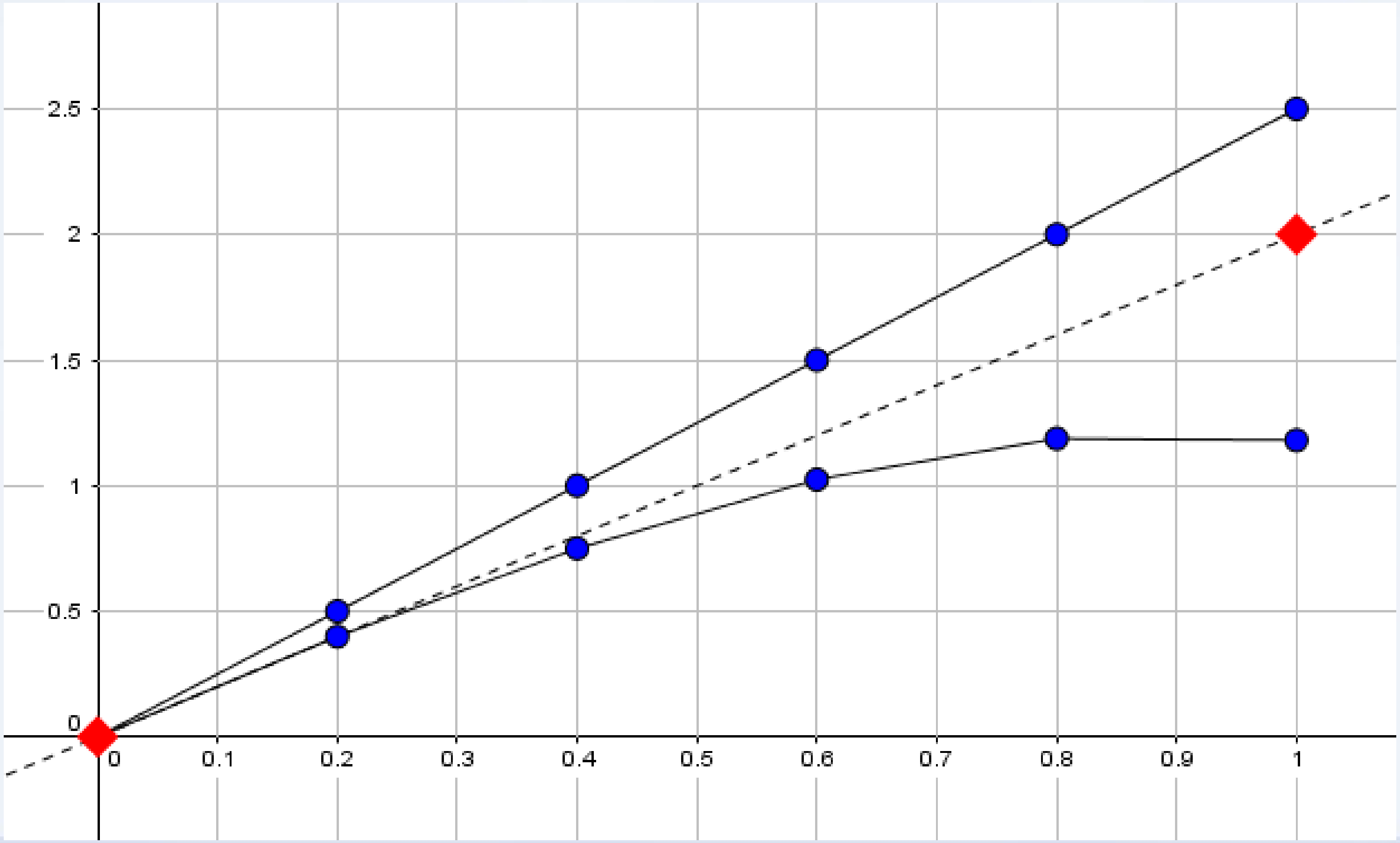
Repitiendo el procedimiento hasta llenar la tabla tenemos:

i	x	y
0	0.0	0
1	0.2	0.5
2	0.4	1
3	0.6	1.5
4	0.8	2.0
5	1.0	2.5



Método de diferencias finitas

Esta vez la bala se fue por encima del objetivo



Método de diferencias finitas

Se podría seguir tanteando hasta encontrar el valor exacto, pero es más prpacticoaplicar una regla de 3 (interpolación lineal) para encontrar un valor aproximado más cercano al real:

i	x	Y_{abajo}	Y_{arriba}
0	0.0	0	0
1	**0.2**	**0.4**	**0.5**
2	0.4	0.75	1
3	0.6	1.025	1.5
4	0.8	1.1875	2.0
5	**1.0**	**1.18125**	**2.5**

$$\frac{0.5-0.4}{2.5-1.18125}=\frac{Y1_{aproximado}-0.4}{2-1.18125}$$

$$Y1_{aproximado}=0.462085$$

X_5=1.0	$Y_{5Real=}$2

Método de diferencias finitas

La otra forma de realizar el análisis del paso 2, sin estar tanteando es utilizando un sistema de ecuaciones que tome como punto de partida la ecuación de recurrencia.

$$4y_{i+1} - 10y_i + 6y_{i-1} + 1 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$i = 1 \quad \Rightarrow \quad 4y_2 - 10y_1 + 6y_0 + 1 = 0$$

$$i = 2 \quad \Rightarrow \quad 4y_3 - 10y_2 + 6y_1 + 1 = 0$$

$$i = 3 \quad \Rightarrow \quad 4y_4 - 10y_3 + 6y_2 + 1 = 0$$

$$i = 4 \quad \Rightarrow \quad 4y_5 - 10y_4 + 6y_3 + 1 = 0$$

Método de diferencias finitas

Al conocerse los valores de $Y_0=0$ y $Y_5=2$ el sistema acomodado en formato matricial nos queda:

Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
-10	4		
6	-10	4	
	6	-10	4
		6	-10

=

-1
-1
-1
9

Método de diferencias finitas

Resolviendo el sistema encontramos los siguientes valores:

Y_0	0
Y_1	0.462
Y_2	0.905
Y_3	1.320
Y_4	1.692
Y_5	2

Método de diferencias finitas

Resolver la ecuación diferencial analizada en el ejemplo de disminución de orden por sustitución de variables con el método de diferencias finitas centrales.

$$y'' = 18x$$

Bajo las siguientes condiciones:

$$y(0) = 0$$

$$y(1) = 1$$

$$\text{Intervalo en } \ x \in [0,1]$$

$$h = 0.2$$

Método de diferencias finitas

Sustituyendo datos por diferencias finitas centrales.

$$y'' = 18x$$

$$\downarrow$$

$$\frac{y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2}}{h^2} = 18x$$

$$\downarrow$$

$$y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2} = 18xh^2$$

Método de diferencias finitas

Ecuación de recurrencia: $y_i - 2y_{i-1} + y_{i-2} = 18xh^2$

$$i = 2, \quad x = 0.4 \quad \Rightarrow \quad y_2 - 2y_1 + y_0 = 18xh^2$$

$$i = 3, \quad x = 0.6 \quad \Rightarrow \quad y_3 - 2y_2 + y_1 = 18xh^2$$

$$i = 4 \quad x = 0.8 \quad \Rightarrow \quad y_4 - 2y_3 + y_2 = 18xh^2$$

$$i = 5 \quad x = 1.0 \quad \Rightarrow \quad y_5 - 2y_4 + y_3 = 18xh^2$$

Método de diferencias finitas

Sustituyendo valores conocidos Yo=0 y1=1 h=1/5 y x=0,0.2,0.4,0.6:

$$i=2 \quad \Rightarrow \quad y_2-2y_1+0=18(2/5)(1/5)^2$$

$$i=3 \quad \Rightarrow \quad y_3-2y_2+y_1=18(3/5)(1/5)^2$$

$$i=4 \quad \Rightarrow \quad y_4-2y_3+y_2=18(4/5)(1/5)^2$$

$$i=5 \quad \Rightarrow \quad 1-2y_4+y_3=18(5/5)(1/5)^2$$

Método de diferencias finitas

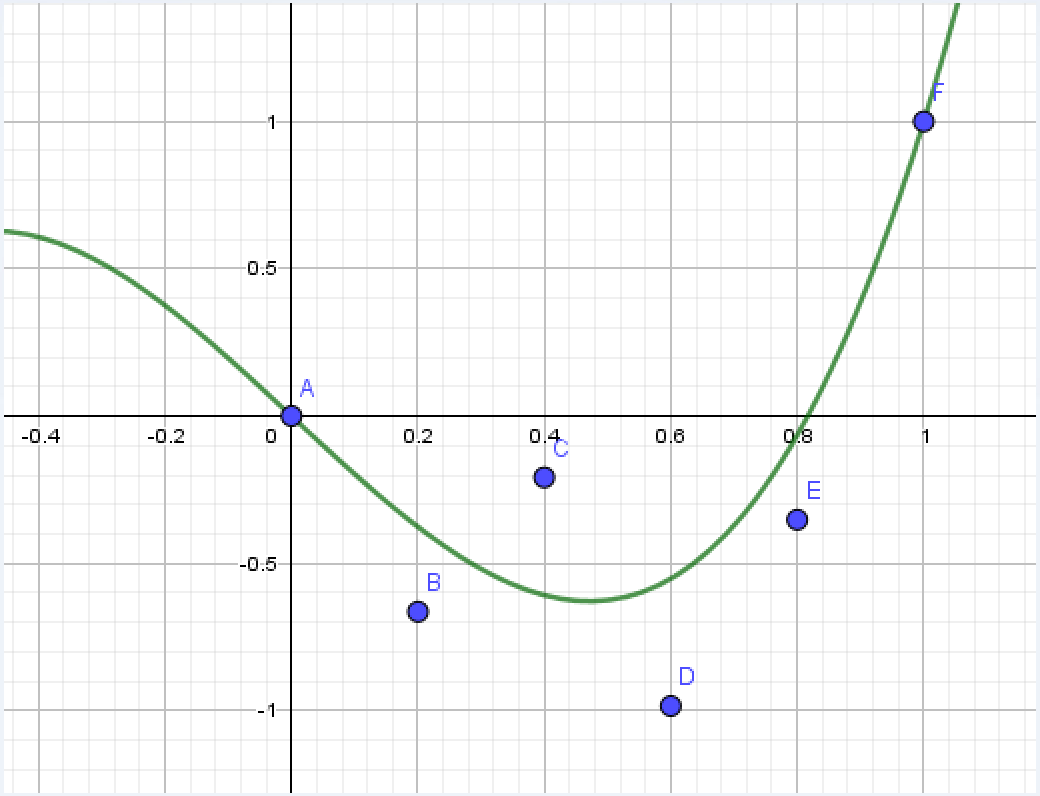
Sustituyendo valores conocidos:

Y1	Y2	Y3	Y4	B
-2	1	0	0	36/125
1	-2	1	0	54/125
0	1	-2	1	72/125
0	0	1	-2	18/25-1

Método de diferencias finitas

La solución es:

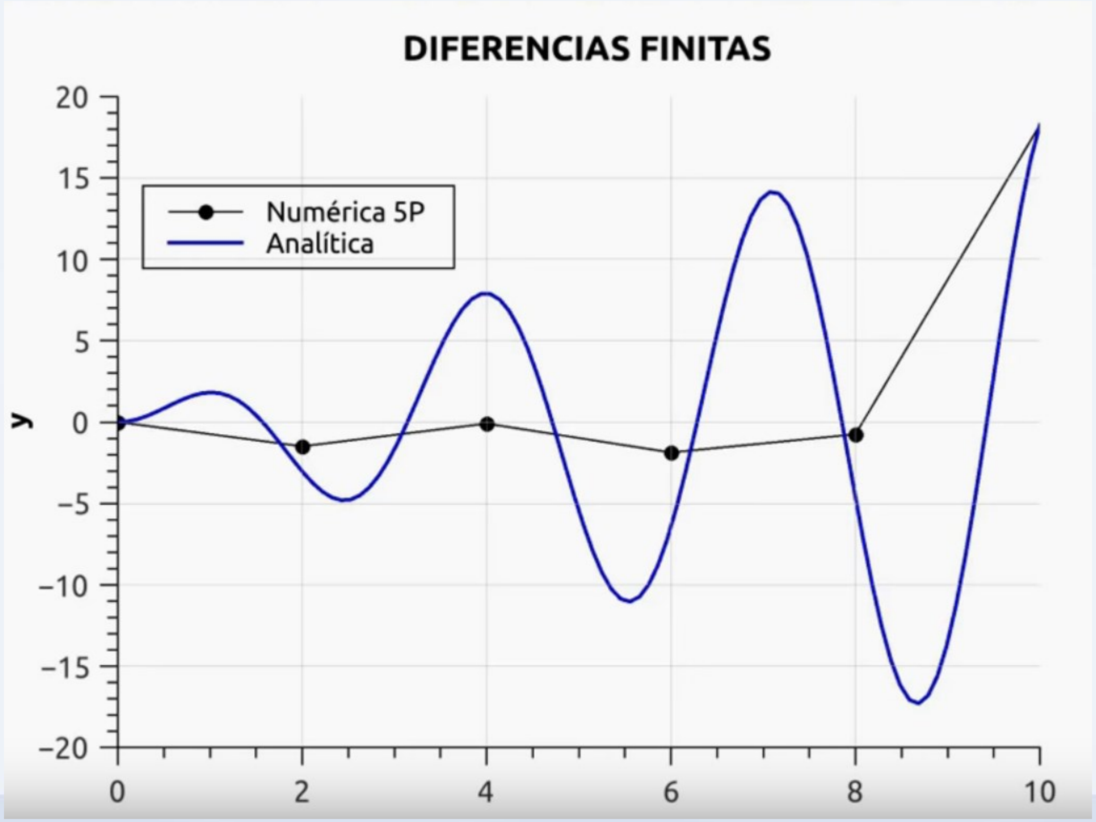
X	Y Diferencias finitas	Y real
0	0	0
0.2	-0.664	-0.376
0.4	-0.208	-0.608
0.6	-0.984	-0.552
0.8	-0.352	-0.06
1	1	1



Método de diferencias finitas

Ejemplo gráfico:

$$y'' = 8\cos(x)-4$$



Método de diferencias finitas

Utilizando varios iteraciones para n puntos distintos: