Capítulo VI:

Solución numérica de ecuaciones en derivadas parciales

M.I. Víctor Manuel Durán Campos

Solución Numérica de derivadas parciales

Clasificación de ecuaciones segundo orden lineales

Una ecuación en derivadas parciales (o ecuación diferencial parcial) es una ecuación que expresa una relación entre una función de varias variables y todas o algunas de sus derivadas parciales.

Su representación general es:

$$f\left(X, Y, \ldots, \frac{\partial U}{\partial X}, \frac{\partial U}{\partial Y}, \ldots, \frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y}, \ldots., \frac{\partial^3 U}{\partial X \partial Y \partial Y}, \ldots\right) = 0$$

Solución Numérica de derivadas parciales

Clasificación de ecuaciones segundo orden lineales

Las ecuaciones en derivadas parciales es común clasificarlas a partir de su orden que corresponde al orden de la derivada mayor que aparece en ella.

$$A\frac{\partial^3 U}{\partial X^3}+B\frac{\partial^2 U}{\partial X \partial Y}+F=0$$

Orden 3

Solución Numérica de derivadas parciales

Clasificación de ecuaciones segundo orden lineales

En particular, una clasificación importante es la que se refiere a las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden que tienen la forma:

$$A\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+B\frac{\partial^2 U}{\partial X\partial Y}+C\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}+D\frac{\partial U}{\partial X}+E\frac{\partial U}{\partial Y}+F=0$$

De acuerdo con los valores de los coeficientes A,B,C la ecuación diferencial parcial de segundo orden se clasifican en:

Elíptica => cuando **B^2-4AC<0**. Ejemplos ecuaciones de Laplace y de Poisson

Parabólica=> cuando **B^2-4AC=0**. Ejemplo la Ecuación de la transferencia de calor

Hiperbólica=> cuando **B^2-4AC>0**. Ejemplo la ecuación de onda.

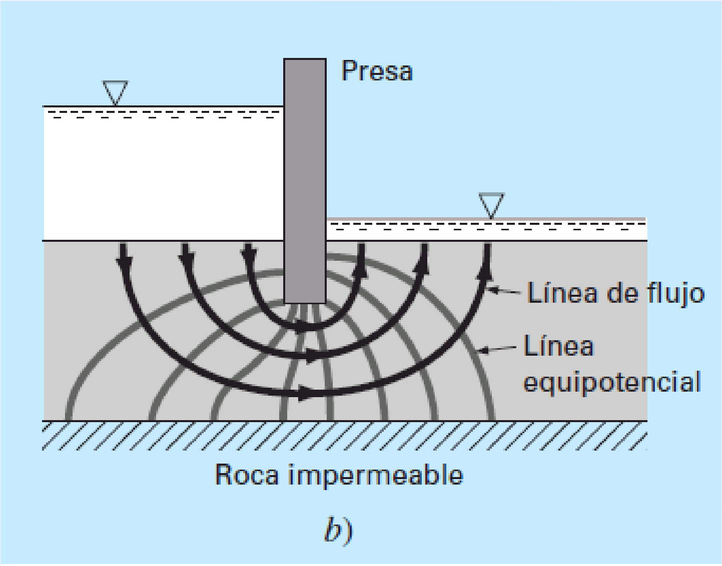
Solución Numérica de derivadas parciales

Derivadas parciales Elípticas

Ejemplo: Ecuaciones elípticas, Comúnmente, las ecuaciones elípticas se utilizan para caracterizar sistemas en estado estacionario con dos variables espaciales.

Ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} = 0$$



b)

Filtración de Agua

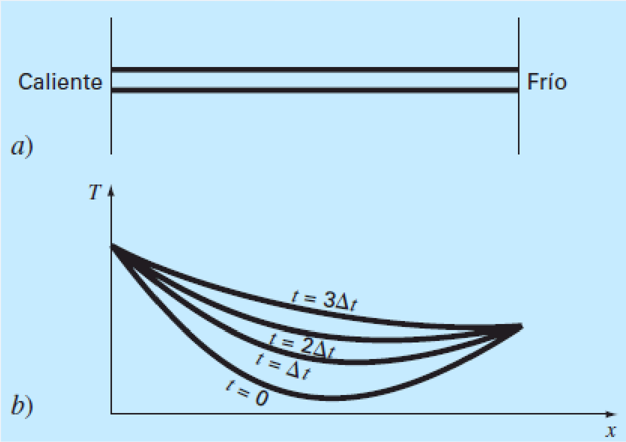
Solución Numérica de derivadas parciales

Derivadas parciales parabólicas

A diferencia de la categoría elíptica, las ecuaciones parabólicas determinan cómo una incógnita varía tanto en el espacio como en el tiempo, lo cual se manifiesta por la presencia de las derivadas espacial (x) y temporal (t).

Ecuación de conducción de calor

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k \frac{\partial^2 U}{\partial X^2}$$



Propagación de la temperatura con respecto al tiempo

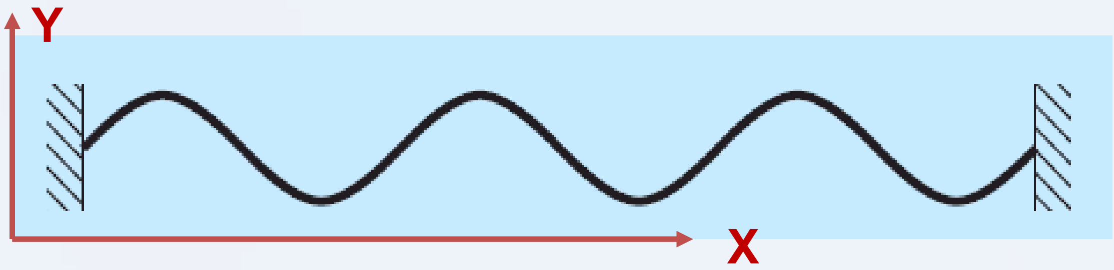
Solución Numérica de derivadas parciales

Derivadas parciales hiperbólicas

Las ecuaciones hiperbólicas, también tiene que ver con problemas de propagación. Sin embargo, una importante diferencia es que existen dos variable espaciales y una temporal. Lo que se analiza es por ejemplo como varia en este caso Y en un determinado tiempo.

Ecuación de onda $\Rightarrow$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

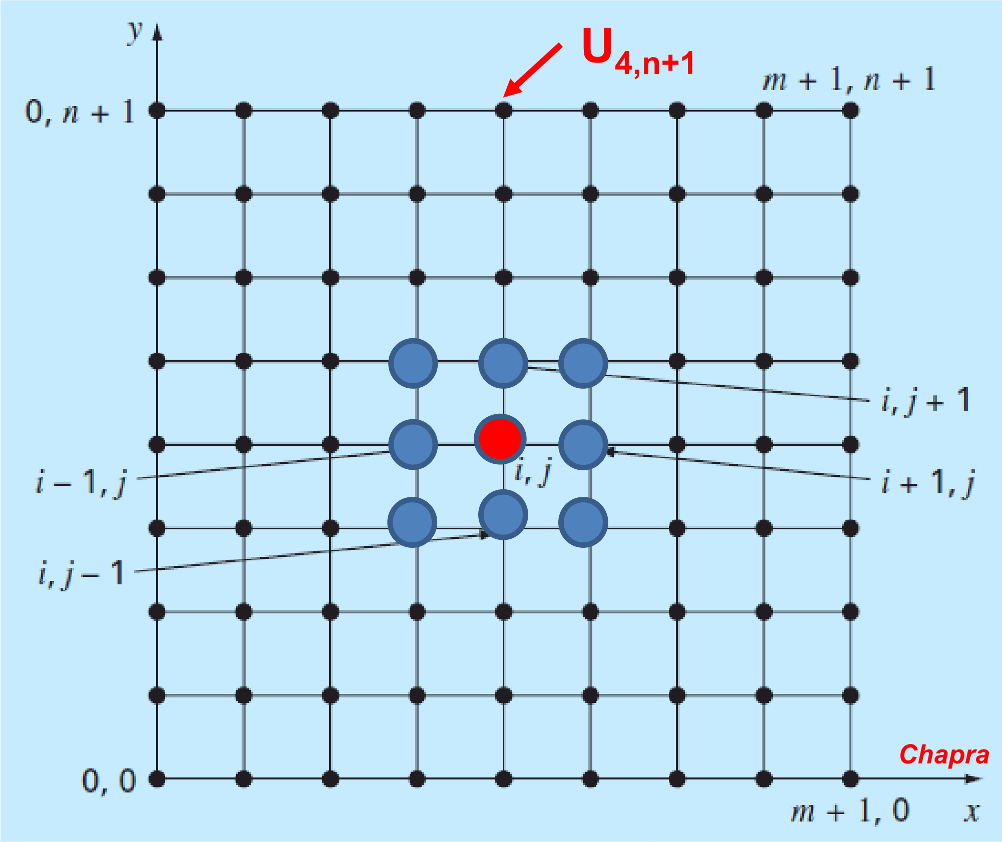


Una cuerda tensa que vibra a baja amplitud

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales

Para resolver este tipo de ecuaciones se utilizan las diferencias finitas, pero manejando más de una variable independiente.



Para este caso se manejan dos variables en el cálculo con espaciamientos Δx y Δy

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas

Para el caso de las derivadas parciales debemos tomar en cuentas la siguientes consideraciones:

Se requiere de una función del tipo U(X,Y); esto implica que deberán tener pasos contantes para la variable X (Δx) y otro constante para Y (Δy) y que no necesariamente deben ser iguales.

La solución de la ecuaciones en derivadas parciales es una matriz, es decir, un arreglo de dos dimensiones.

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas- Ecuación de Laplace

Las diferencias centrales basadas en el esquema de la malla antes presentada son:

$$y''_i = \left(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}\right) / h^2$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{x+1}^{y} - 2U_{x}^{y} + U_{x-1}^{y}}{\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{U_{x}^{y+1} - 2U_{x}^{y} + U_{x}^{y-1}}{\Delta y^2}$$

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas- Ecuación de Laplace

Al sustituirla en la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}=\frac{U_{x+1}^{y}-2U_{x}^{y}+U_{x-1}^{y}}{\Delta x^2}+\frac{U_{x}^{y+1}-2U_{x}^{y}+U_{x}^{y-1}}{\Delta y^2}=0$$

Si los espaciamientos Δx y Δy fueran fuera iguales:

$$\Delta x=\Delta y=h$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial Y^2}=\frac{1}{h^2}\left(U_{x+1}^{y}+U_{x}^{y+1}-4U_{x}^{y}+U_{x-1}^{y}+U_{x}^{y-1}\right)=0$$

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas

Finalmente tendriamos:

$$U_{x+1}^{y} + U_{x}^{y+1} - 4U_{x}^{y} + U_{x-1}^{y} + U_{x}^{y-1} = 0$$

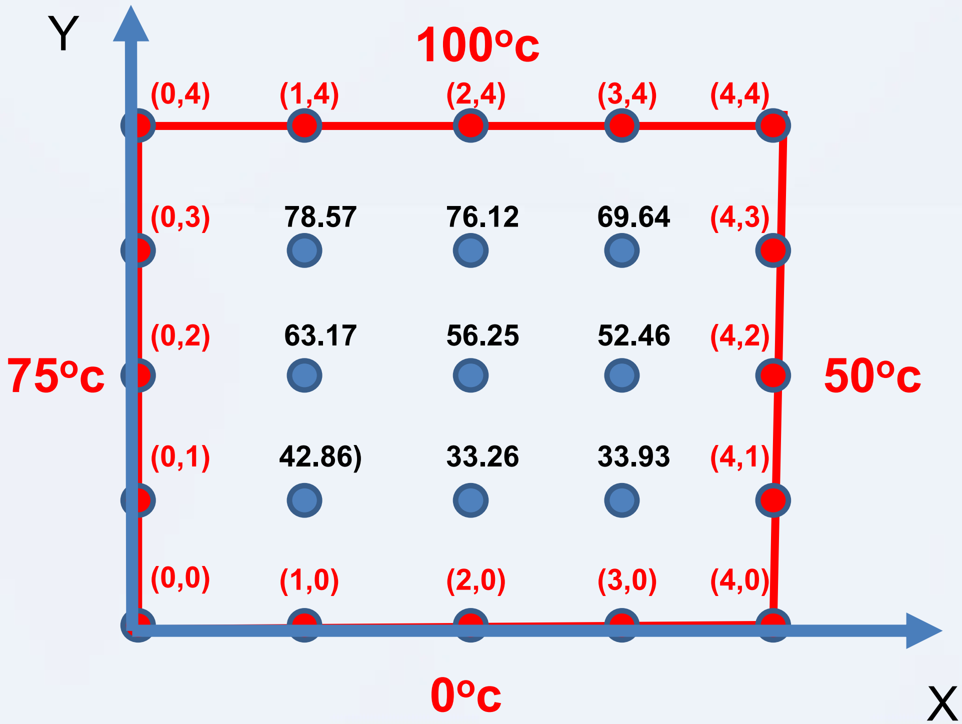
Ecuación Laplaciana de diferencias con separaciones constantes

Además, se deben especificar las condiciones de frontera en los extremos de la placa para obtener una solución única. El caso más simple es aquel donde la temperatura en la frontera es un valor fijo. Ésta se conoce como ***condición de frontera de Dirichlet*** .

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas
Ecuación de la transferencia de calor(parabólicas)

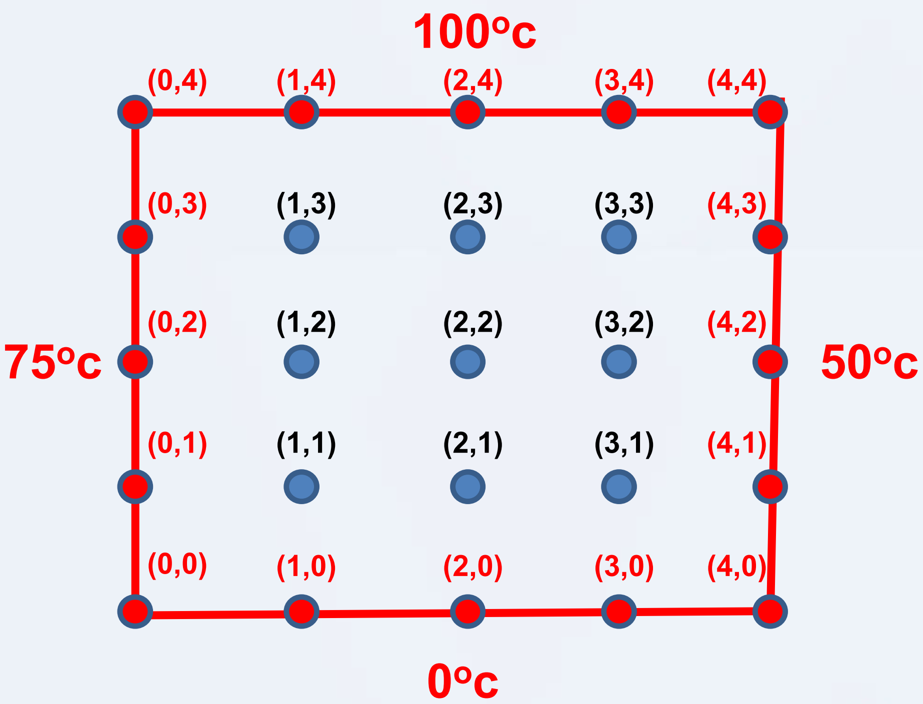
La solución de este tipo de derivadas parciales es una matriz donde para distintos puntos (X,Y) existe un valor de asociado a él que tiene un comportamiento dictado por la ecuación Laplaciana. Dicho valor puede ser temperatura, viscosidad, filtración, etc.



Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas

Ejemplo: Para el siguiente ejemplo si suponemos que todos los puntos en los extremos se mantienen con valores constantes.



Analizando el nodo (1,1) tendríamos

$$U_2^1 + U_1^2 - 4U_1^1 + U_0^1 + U_1^0 = 0$$

Pero sabemos los valores de algunos elementos

$$U_0^1 = 75 \quad \text{y} \quad U_1^0 = 0$$

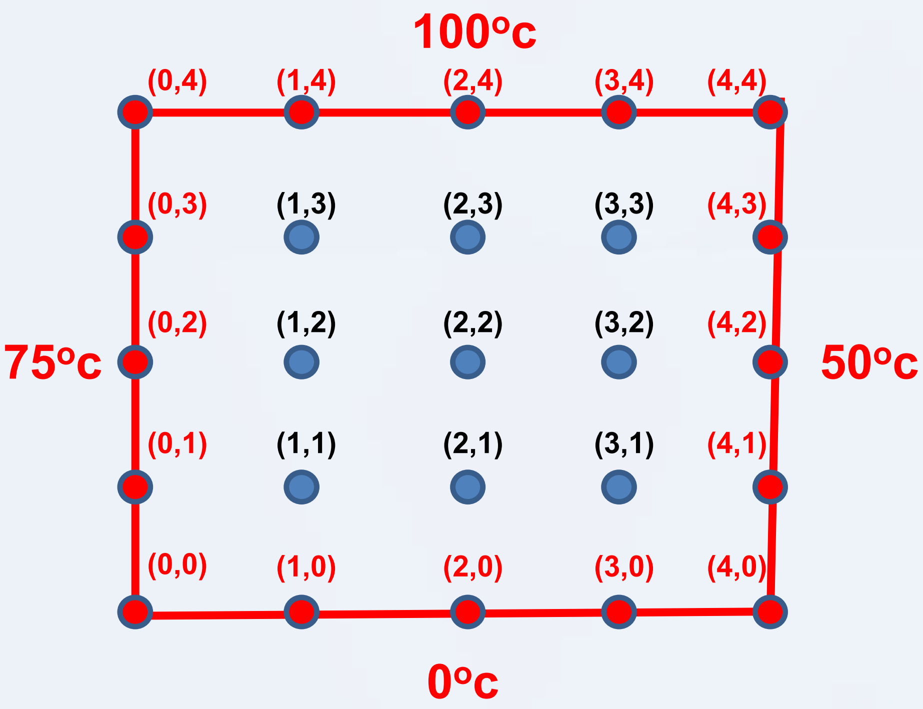
Sustituyendo valores

$$U_2^1 + U_1^2 - 4U_1^1 + 75 + 0 = 0$$

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas

Ecuaciones similares se pueden calcular para otros puntos interiores



Analizando el nodo (3,3) tendríamos

$$U_4^3 + U_3^4 - 4U_3^3 + U_2^3 + U_3^2 = 0$$

$$U_3^4 = 100 \quad \text{y} \quad U_4^3 = 50$$

$$100 + 50 - 4U_3^3 + U_2^3 + U_3^2 = 0$$

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas

Repitiendo el proceso otras 7 veces, al final el sistema quedaría:

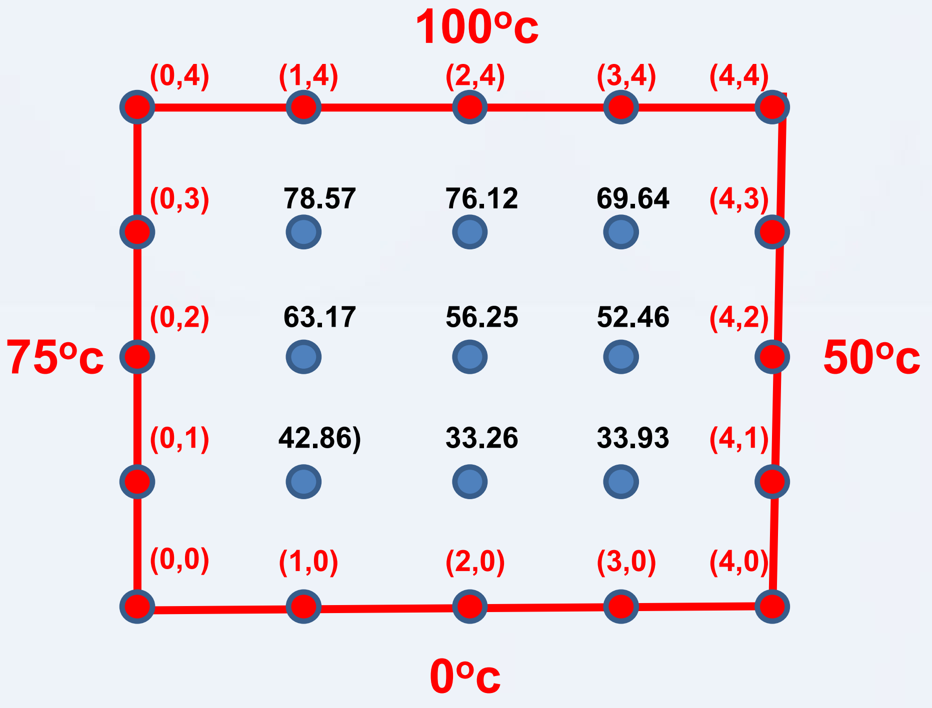
U_{11}	U_{21}	U_{31}	U_{12}	U_{22}	U_{32}	U_{13}	U_{23}	U_{33}	
-4	1	0	1	0	0	0	0	0	-75
1	-4	-1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	-4	0	0	1	0	0	0	-50
1	0	0	-4	1	0	1	0	0	-75
0	1	0	1	-4	1	0	1	0	0
0	0	1	0	1	-4	0	0	1	-50
0	0	0	1	0	0	-4	1	0	-175
0	0	0	0	1	0	1	4	1	-100
0	0	0	0	0	1	0	1	-4	-150

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas

Al resolver el sistema tendríamos los siguientes valores:

U11	42.8571
U21	33.2589
U31	33.9286
U12	63.1696
U22	56.2500
U32	52.4554
U13	78.5714
U23	76.1161
U33	69.6429



Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas

El método anterior requiere de un alto requerimiento computacional y existen métodos que dan valores aproximados y que más ligeros en cuanto a requerimiento técnico.

El método comúnmente empleado es el de *Gauss-Seidel también conocido como* el *método de Liebmann*.

$$U_{x+1}^{y} + U_{x}^{y+1} - 4U_{x}^{y} + U_{x-1}^{y} + U_{x}^{y-1} = 0$$

Despejando U_x^y :

$$U_x^y = \frac{U_{x+1}^{y} + U_{x}^{y+1} + U_{x-1}^{y} + U_{x}^{y-1}}{4}$$

y se resuelve de manera iterativa para x = 1 hasta *n* y y = 1 hasta *m*. Como la matriz de soluciones es diagonalmente dominante, este procedimiento al final convergerá a una solución estable.

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas

Algunas veces se utiliza un paso extra llamado sobrerelajación para acelerar la velocidad de convergencia, aplicando la siguiente formula:

$$U_{x\ nuevo}^{y} = \lambda U_{x\ nuevo}^{y} + \left(1-\lambda\right) U_{x\ anterior}^{y}$$

$$\lambda = \text{Factor de ponderación (dato proporcionado en el problema)} \qquad \lambda \in \left[1,2\right]$$

$$\left|\left(\varepsilon_s\right)_{x,\mathrm{y}}\right| = \left|\frac{U_{x\ nuevo}^{y} - U_{x\ anterior}^{y}}{U_{x\ nuevo}^{y}}\right| 100\%$$

Nota: Los ***$U_{x,y}$*** desconocidos se consideran inicialmente ceros.

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas

Aplicando el método de Liebmann calcular la temperatura tomando como base los datos del ejemplo anterior con un factor de sobrerelajación de ***1.5*** y un error máximo permitido (ε_s) igual al 1%.

Analizando en el nodo (1,1):

$$U_1^1 = \frac{U_2^1 + U_1^2 + U_0^1 + U_1^0}{4} = \frac{0 + 75 + 0 + 0}{4} = \frac{75}{4} = 18.75$$

Aplicando la sobrerelajación:

$$U_1^1 = (1.5)(18.75) + (1 - 1.5)(0) = 28.125$$

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas

Ejemplo:

Analizando en el nodo (2,1);

$$U_2^1 = \frac{U_3^1 + U_2^2 + U_1^1 + U_2^0}{4} = \frac{0+0+28.125+0}{4} = 7.03125$$

Aplicando la sobrerelajación:

$$U_2^1 = (1.5)(7.03125) + (1-1.5)(0) = 10.544688$$

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas

Ejemplo:

Analizando en el nodo (3,1):

$$U_3^1 = \frac{U_4^1 + U_3^2 + U_2^1 + U_3^0}{4} = \frac{50 + 10.54688 + 0 + 0}{4} = 15.544688$$

Aplicando la sobrerelajación:

$$U_3^1 = (1.5)(15.544688) + (1 + 1.5)(0) = 22.70508$$

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas

Repitiendo el cálculo para los otros renglones tenemos:

$$U_1^3 = 80.12696 \qquad U_2^3 = 74.46900 \qquad U_3^3 = 96.99554$$

$$U_1^2 = 38.67188 \qquad U_2^2 = 18.45703 \qquad U_3^2 = 34.18579$$

$$U_1^1 = 28.12500 \qquad U_2^1 = 10.5469 \qquad U_2^1 = 22.70508$$

donde el error máximo es 13.5%.

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas

En la segunda iteración tenemos:

$$U_1^3 = 32.51953 \qquad U_2^3 = 22.35718 \qquad U_3^3 = 28.60108$$

$$U_1^2 = 57.95288 \qquad U_2^2 = 61.63333 \qquad U_3^2 = 71.86833$$

$$U_1^1 = 75.21973 \qquad U_2^1 = 87.95872 \qquad U_2^1 = 67.68736$$

donde el error máximo es 6.5%.

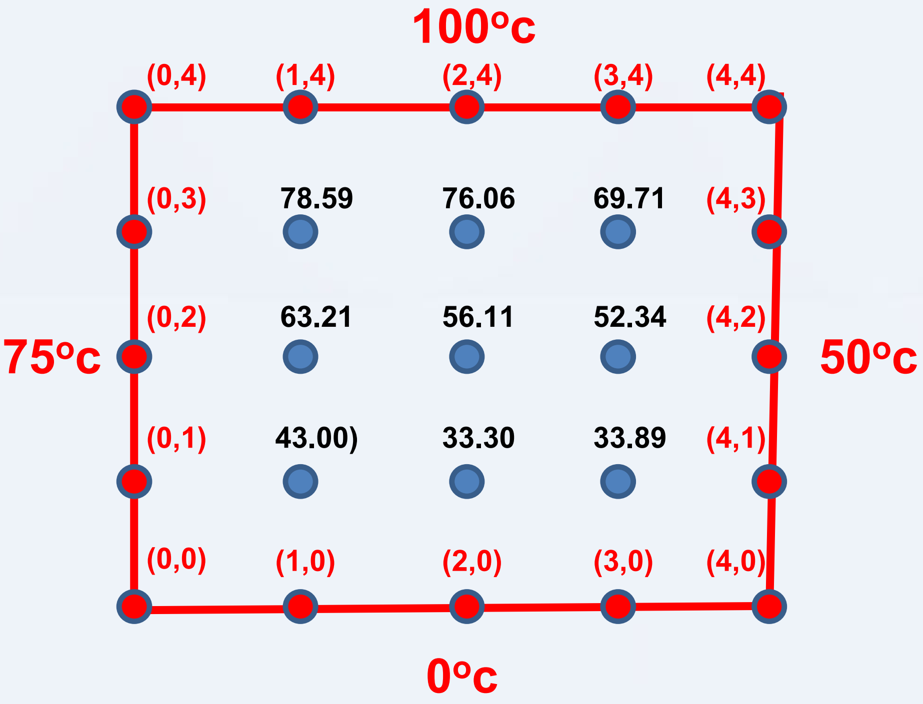
Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas

Finalmente después de 9 iteraciones obtenemos el error máximo permitido:

$$U_1^1 = 43.00061$$
$$U_2^1 = 33.29755$$
$$U_{31}^1 = 33.88506$$
$$U_1^2 = 63.21152$$
$$U_2^2 = 56.11238$$
$$U_3^2 = 52.33999$$
$$U_1^3 = 78.58718$$
$$U_2^3 = 76.06402$$
$$U_3^3 = 69.71050$$

donde el error máximo es 0.71%.



Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas
Ecuación de transferencia de calor(parabólicas)

EL razonamiento es parecido al utilizado en la ecuación de Laplace, pero en este caso se utilizan dos tipos de diferencias finitas.

Diferencias centrales para la derivada de orden 2 espacial (como se realizó en el caso de las elípticas).

La diferencias hacia adelante para la derivada de orden 1 temporal.

Para ejemplificar la solución de este tipo de derivadas parciales
Se desarrollará el método explicito

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas
Ecuación de transferencia de calor(parabólicas)

De esta manera tenemos:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

U_d^t tiempo distancia

$$\frac{U_d^{t+1} - U_d^t}{\Delta t} = k\left(\frac{U_{d+1}^t - 2U_d^t + U_{d-1}^t}{\Delta x^2}\right)$$

$$U_d^{t+1} = U_d^t + \lambda\left(U_{d+1}^t - 2U_d^t + U_{d-1}^t\right) \quad \text{donde} \quad \lambda = k\left(\Delta t / \left(\Delta x\right)^2\right)$$

K es una constante que depende del material analizado

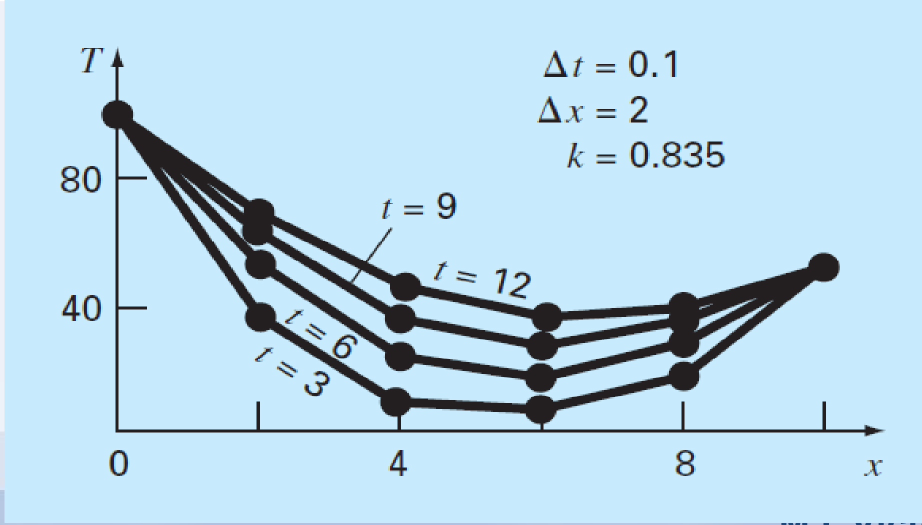
Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas
Ecuación de transferencia de calor(parabólicas)

La solución de este tipo de derivadas parciales es una tabla donde, se ponen para cada tiempo (t) y una posición (d), se presenta un determinada temperatura:

	T=0	T=1	T=2	T=3	T=
X0	***Temp11***	Temp12	Temp13	Temp14	Temp15
X1	***Temp21***	Temp22	Temp23	Temp24	Temp25
X2	***Temp31***	Temp32	Temp33	Temp34	Temp35
X3	***Temp41***	Temp42	Temp43	Temp44	Temp45
X4	***Temp51***	Temp52	Temp53	Temp54	Temp55

Datos iniciales conocidos



Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas
Ecuación de transferencia de calor(parabólicas)

Ejemplo: calcular la distribución de temperatura en una barra larga y delgada que tiene una longitud de 10 unidades y los siguientes valores para su análisis:

$$\Delta x = 2 \text{ cm} \qquad \Delta t = 0.1 \text{ seg}$$

$$k = 0.835 \ (\text{cm})^2 / (\text{seg}) \qquad \lambda = (0.835)(0.1)/(2)^2 = 0.020875$$

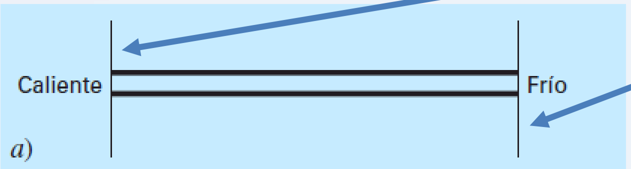
$$t_{\text{inicial}} = 0 \qquad x_{\text{inicial}} = 0$$

$$\text{en t=0 la temperatura es igual} \quad \Rightarrow U^0_{d=0,1,2,3,4} = 0 \ ^{\circ}\text{C}$$

Las condiciones de frontera se fijan para todos los tiempos en

$$U^t_0 = 100 \ ^{\circ}\text{C} \quad \text{y} = \quad U^t_5 = 50 \ ^{\circ}\text{C}$$

Temperatura de la pared



Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas
Ecuación de transferencia de calor(parabólicas)

Condiciones iniciales:

	T=0	T=1	T=2	T=3	T=4
X0	***100***	100	100	100	100
X1	***0***	U11			
X2	***0***	U12			
X3	***0***	U13			
X4	***0***	U14			
X5	***50***	50	50	50	50

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas
Ecuación de transferencia de calor(parabólicas)

Para t=0 y d=1:

$$U_1^1 = U_1^0 + \lambda\left(U_2^0 - 2U_1^0 + U_0^0\right) = 0 + \left(0.020875\right)\left(0 - 2\left(0\right) + 100\right) = 2.0875$$

Para t=0 y d=2:

$$U_2^1 = U_2^0 + \lambda\left(U_3^0 - 2U_2^0 + U_1^0\right) = 0 + \left(0.020875\right)\left(0 - 2\left(0\right) + 0\right) = 0$$

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas
Ecuación de transferencia de calor(parabólicas)

Para t=0 y d=3:

$$U_3^1 = U_3^0 + \lambda\left(U_4^0 - 2U_3^0 + U_2^0\right) = 0 + \left(0.020875\right)\left(0 - 2\left(0\right) + 0\right) = 0$$

Para t=0 y d=4:

$$U_4^1 = U_4^0 + \lambda\left(U_5^0 - 2U_4^0 + U_3^0\right) = 0 + \left(0.020875\right)/2\left(50 - 2\left(0\right) + 100\right) = 1.0438$$

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas
Ecuación de transferencia de calor(parabólicas)

Los datos para T=1 son:

	T=0	T=1	T=2	T=3	T=4
X0	***100***	100	100	100	100
X1	***0***	2.0875			
X2	***0***	0			
X3	***0***	0			
X4	***0***	1.0438			
X5	***50***	50	50	50	50

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas
Ecuación de transferencia de calor(parabólicas)

Para t=1 los valores son:

$$U_1^2 = U_1^1 + \lambda\left(U_2^1 - 2U_1^1 + U_0^1\right) = 2.0875 + (0.020875)\left(0 - 2(2.0875) + 100\right) = 4.0878$$

$$U_2^2 = U_2^1 + \lambda\left(U_3^1 - 2U_2^1 + U_1^1\right) = 0 + (0.020875)\left(0 - 2(0) + 2.0875\right) = 0.043577$$

$$U_3^2 = U_3^1 + \lambda\left(U_4^1 - 2U_3^1 + U_2^1\right) = 0 + (0.020875)\left(1.0438 - 2(0) + 0\right) = 0.021788$$

$$U_4^2 = U_4^1 + \lambda\left(U_5^1 - 2U_4^1 + U_3^1\right) = 1.0438 + (0.020875)\left(50 - 2(1.0438) + 0\right) = 2.404390$$

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas
Ecuación de transferencia de calor(parabólicas)

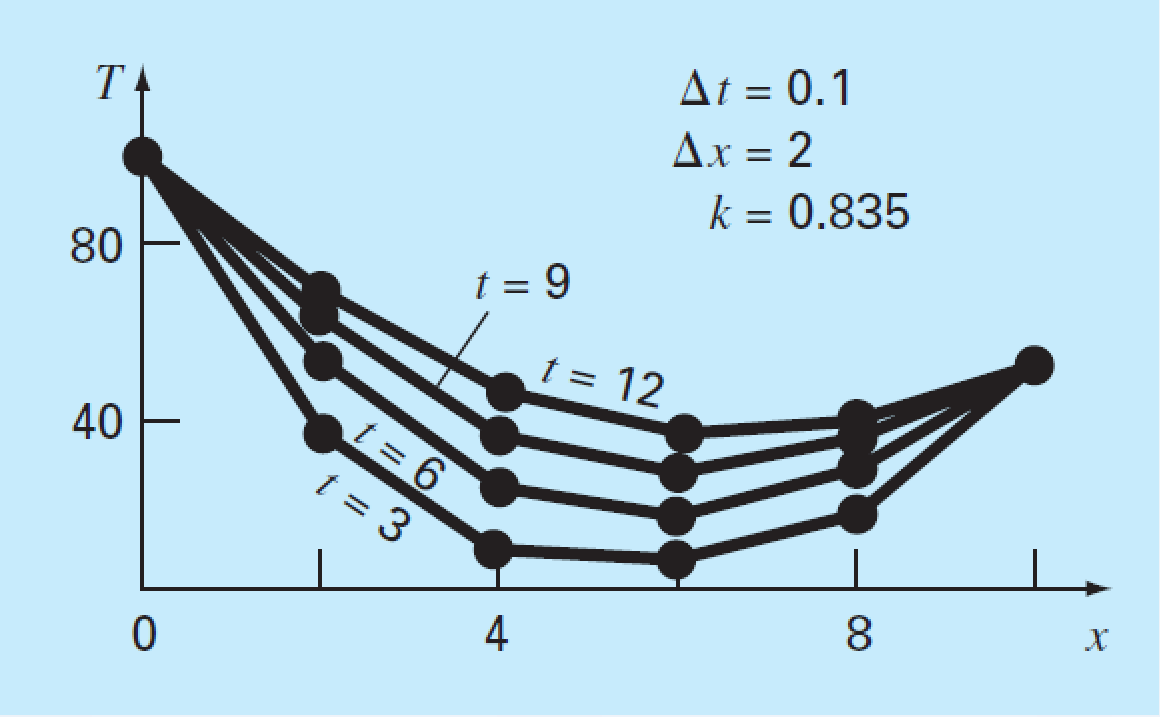
Los datos para T=2 son:

	T=0	T=1	T=2	T=3	T=4
X0	***100***	100	100	100	100
X1	***0***	2.0875	4.087800		
X2	***0***	0	0.043577		
X3	***0***	0	0.021788		
X4	***0***	1.0438	2.404390		
X5	***50***	50	50	50	50

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas
Ecuación de transferencia de calor(parabólicas)

En la siguiente tabla se muestran los resultados para varios tiempos:



Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas
Ecuación de onda (Hiperbólicas)

El análisis es parecido al de las ecuaciones parabólicas, la diferencia en este caso es que la derivada con respecto al tiempo es de segundo orden en lugar de uno.

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

U_d^t — ***tiempo*** (t), ***distancia*** (d)

$$\frac{U_{d+1}^{t} - 2U_{d}^{t} + U_{d-1}^{t}}{\Delta x^2} = \frac{1}{c^2}\left(\frac{U_{d}^{t+1} - 2U_{d}^{t} + U_{d}^{t-1}}{\Delta t^2}\right)$$

$$U_d^{t+1} = \lambda\left(U_{d+1}^{t} - 2U_{d}^{t} + U_{d-1}^{t}\right) + 2U_d^t - U_d^{t-1} \qquad \text{donde} \qquad \lambda = \left(c\,\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2$$

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas
Ecuación de onda (Hiperbólicas)

La solución de este tipo de derivadas parciales es una tabla donde, se ponen para cada tiempo (t) y una posición (x), se busca obtener la posición de una partícula con respecto a al eje Y.

	T=0	T=1	T=2	T=3	T=4
X_1	Y_{11}	Y_{12}	Y_{13}	Y_{14}	Y_{15}
X_2	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	Y_{24}	Y_{25}
X_3	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	Y_{24}	Y_{25}
X_4	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	Y_{24}	Y_{25}
X_5	Y_{21}	Y_{22}	Y_{23}	Y_{24}	Y_{25}

Datos conocidos

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas
Ecuación de onda (Hiperbólicas)

Además para eliminar los puntos imaginarios ocasionados en un tiempo negativo, se considera lo siguiente:

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial U^{t}}{\partial t}_{d} = \frac{1}{\Delta t}\left(U_d^{t+1} - U_d^{t-1}\right) = 0 \Rightarrow U_d^{t-1} = U_d^{t+1}$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación de recurrencia calculada anteriormente y acomodando los elementos tenemos:

$$U_d^{t+1} = \lambda\left(U_{d+1}^{t} - 2U_d^{t} + U_{d-1}^{t}\right) + 2U_d^{t} - U_d^{t-1}$$

$$\Downarrow$$

$$U_d^{t+1} = \frac{\lambda}{2}\left(U_{d+1}^{t} - 2U_d^{t} + U_{d-1}^{t}\right) + U_d^{t}$$

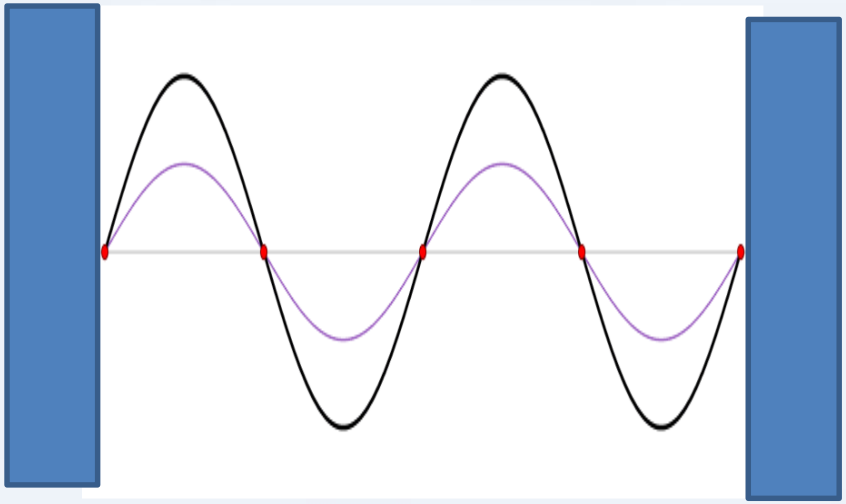
Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas
Ecuación de onda (Hiperbólicas)

Ejemplo: Calcular el comportamiento de la onda que se presenta al estirar una cuerda elástica que se encuentra empotrada entre dos bases separadas por un 0.5 cm. Los datos para analizar el problema son:

$$\Delta x = 0.1 \text{ cm} \qquad \Delta t = 0.1 \text{ seg}$$

$$c = 98.24 \; (\text{cm})^2 / (\text{seg})^2 \qquad \lambda = \left((98.24)(0.1)/(0.1)\right)^2 = 982.4000$$



Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas
Ecuación de onda (Hiperbólicas)

En t=0 la posición de la cuerda con respecto a y esta dada por la siguiente ecuación.

$$y(x,t) = t\sin\left(2\pi x\right)$$

Las condiciones de frontera para el tiempo t=0.1 son:

	T=0.1	T=0.2	T=0.3	T=0.4	T=0.5
X_0	0.0000	U_{02}			
X_1	0.0588	U_{12}			
X_2	0.0951	U_{22}			
X_3	0.0588	U_{32}			
X_4	0.0588	U_{42}			
X_5	0.0000	U_{52}			

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas
Ecuación de onda (Hiperbólicas)

Para t=0 y d=0: $\Rightarrow$ $U_0^t = 0 \quad \Rightarrow \quad U_0^1 = 0$

Para t=0 y d=1:

$$U_1^1 = \frac{\lambda}{2}\left(U_2^0 - 2U_1^0 + U_0^0\right) + U_1^0 \quad \Leftarrow \quad \begin{aligned} U_2^0 &= 0.0951 \\ U_1^0 &= 0.0588 \\ U_0^0 &= 0 \end{aligned}$$

$$U_1^1 = \frac{982.4}{2}\left(\left(0.0951\right) - 2\left(0.0588\right) + 0\right) + \left(0.0588\right) = \text{-}0.0588$$

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas
Ecuación de onda (Hiperbólicas)

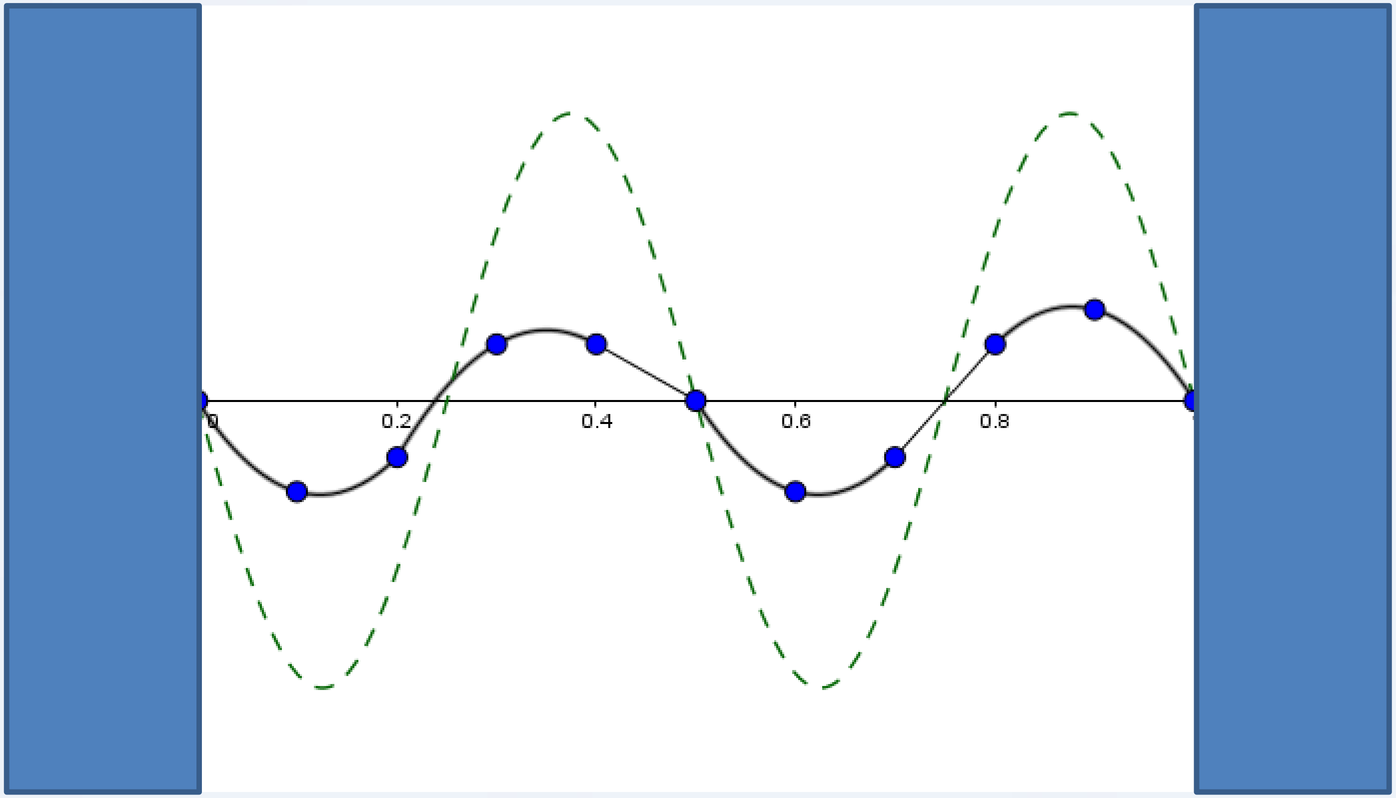
Las iteraciones para t=1 las apreciar en la siguiente tabla:

d	x	$U_{d,1}$
0	0	0
1	0.1	-0.0588
2	0.2	-0.1518
3	0.3	-0.2416
4	0.4	-0.2920
5	0.5	0

Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas
Ecuación de onda (Hiperbólicas)

Graficando las ondas para t=0 y t=1



Solución Numérica de derivadas parciales

Solución Numérica de derivadas parciales por diferencias finitas
Ecuación de onda (Hiperbólicas)

Si graficáramos para t=1 y t=2