Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ingeniería
División de Ciencias Básicas

Ecuaciones Diferenciales

Solución al Primer Examen Extraordinario

Semestre: **2015 – 1** Sinodales: M.C. Roberto Guzmán González **TIPO "A"**
22 de septiembre de 2014 M. en E. Evelyn Salazar Guerrero

1) Resuelva la ecuación diferencial $\left(\sec^2 x+\cos x\ \cos y\right)dx-\left(e^{-y}+sen\,x\ sen\,y\right)dy=0$

Solución:

$$M=\sec^2 x+\cos x\ \cos y$$
$$N=-\left(e^{-y}+sen\,x\ sen\,y\right)$$
$$\frac{\partial M}{\partial y}=-\cos x\,sen\,y\equiv\frac{\partial N}{\partial x}=-sen\,y\cos x\quad\therefore exacta$$
$$elijo\,M$$
$$f\left(x,y\right)=\int\left(\sec^2 x+\cos x\cos y\right)dx$$
$$C=\tan x+\cos y\ sen\,x+h\left(y\right)$$
$$igualo\,con\,N$$
$$-e^{-y}-sen\,x\ sen\,y=-sen\,x\ sen\,y+h'\left(y\right)$$
$$\int\left(h'\left(y\right)=-e^{-y}\right)dy$$
$$h\left(y\right)=e^{-y}$$
$$Solución\,General:$$
$$\boxed{C=\tan x+\cos y\,sen\,x+e^{-y}}$$

2) Determine la solución particular de la ecuación diferencial $y'-5y=\left(\cos x\right)e^{sen\,x+5x}$

Solución:

$$EDL\ 1er.\ Orden$$
$$y_G=y_h+y_p$$
$$y_G=Ce^{-\int P(x)dx}+e^{-\int P(x)dx}\int Q\left(x\right)e^{\int P(x)dx}$$
$$P\left(x\right)=-5$$
$$Q\left(x\right)=\cos x\ e^{sen\,x+5x}$$
$$y_p=e^{-\int -5dx}\int\cos x\ e^{sen\,x+5x}\ e^{\int -5dx}dx$$
$$y_p=e^{5x}\int\cos\ e^{sen\,x}e^{5x}e^{-5x}dx$$
$$\boxed{y_p=e^{5x}e^{sen\,x}}$$

3) Utilice el método de coeficientes indeterminados para obtener la forma de una solución particular de la ecuación diferencial

$$\left(D^2+D-2\right)y = x\ sen\ 2x + x^2\, e^x$$

Solución:

Obteniendo y_h

$\lambda^2+\lambda-2=0$

$(\lambda+2)(\lambda-1)=0$

$\lambda_1=-2\ ,\ \lambda_2=1$

$y_h = C_1e^{-2x}+C_2e^x$

Operador anulador

$x\ sen\,2x \Rightarrow \left(D^2+4\right)^2$

$x^2e^x \Rightarrow (D-1)^3$

raíces para y_p

$\lambda_3,\lambda_4=2i,\quad \lambda_5,\lambda_6=-2i$

$\lambda_7=\lambda_8=\lambda_9=1$

$$\boxed{y_p = C_3\cos 2x + C_4\, sen\, 2x + C_5\cos 2x + C_6 sen^2 x + C_7xe^x + C_8x^2e^x + C_9x^3e^x}$$

---

4) Dado el sistema

$$x' - 4x + y'' = t^2$$
$$x' + x + y' = 0$$

Obtenga una solución particular para la función $x(t)$.

Solución:

En términos del operador

$(D-4)x + D^2y = t^2$

$(D+1)x + D_y = 0$

resolviendo para x

$$\begin{vmatrix} D-4 & D^2 \\ D+1 & D \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} t^2 & D^2 \\ 0 & D \end{vmatrix}$$

$\left[(D-4)D - D^2(D+1)\right]x = D\left(t^2\right)$

$\left(D^3+4D\right)x = -2t$

$\lambda^3+4\lambda=0$

$\lambda\left(\lambda^2+4\right)=0$

$\lambda_1=0\quad \lambda^2=-4$

$\lambda=\pm 2i$

$x_c = C_1 + C_2\cos\ 2t + C_3\, sen\, 2t$

$x_p = C_4 + C_5 t^2$

$x''' + 4x' = -2t$

$x_p' = C_4 + 2C_5 t$

$x_p'' = 2C_5$

$x''' = 0$

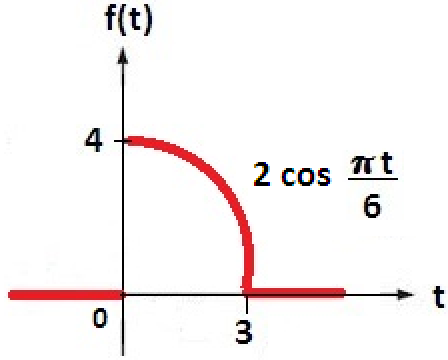
$4(C_4 + 2C_5 t) = -2t$

$4C_4 + 8C_5 t = -2t$

$C_4 = 0\qquad C_5 = -\dfrac{2}{8}$

$$\boxed{x_p = -\frac{1}{4}t^2}$$

5) Calcule la transformada de Laplace de la función f cuya gráfica se muestra en la figura



Solución:

$f(t)$ *está dada por la multiplicación de las funciones dadas*

$$f(t)=\left[4u(t)-4u(t-3)\right]2\cos\frac{\pi t}{6}$$

$$=8u(t)\cos\frac{\pi t}{6}-8u(t-3)\cos\frac{\pi}{6}(t-3+3)$$

$$=8u(t)\cos\frac{\pi t}{6}-8u(t-3)\left[\cos\frac{\pi}{6}(t-3)\cos\frac{\pi}{2}-sen\frac{\pi}{6}(t-3)\,sen\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\mathscr{L}\left\{f(t)=8u(t)\cos\frac{\pi t}{6}+8u(t-3)\,sen\frac{\pi}{6}(t-3)\right\}$$

$$F(s)=8\mathscr{L}\left\{u(t)\cos\frac{\pi t}{6}\right\}+8\mathscr{L}\left\{u(t-3)\,sen\frac{\pi}{6}(t-3)\right\}$$

$$F(s)=\frac{8s}{s^2+\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}+\frac{8e^{-3s}\left(\frac{\pi}{6}\right)}{s^2+\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}$$

$$\boxed{F(s)=\frac{8s}{s^2+\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}+\frac{\frac{4}{3}\pi e^{-3s}}{s^2+\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}}$$

6) Con una constante de separación $\alpha=-1$, determine la solución completa de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

Solución:

$$u(x,y)=F(x)G(y)$$

$$F''G+G''F=0$$

$$\frac{F''}{F}=-\frac{G''}{G}=-1$$

$$F''+F=0$$

$$\lambda^2+1=0$$

$$\lambda_{1,2}=\pm i$$

$$F(x)=C_1\cos x+C_2\,sen\,x$$

$$G''-G=0$$

$$\lambda^2-1=0$$

$$\lambda_{3,4}=\pm 1$$

$$G(y)=C_3e^{y}+C_4e^{-y}$$

$$\boxed{u(x,y)=\left(C_1\cos x+C_2 senx\right)\left(C_3e^{y}+C_4e^{-y}\right)}$$