UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES
PRIMER EXAMEN EXTRAORDINARIO
RESOLUCIÓN

SEMESTRE 2015 -2
TIPO 1
DURACIÓN MÁXIMA 2.0 HORAS **13 DE MARZO DE 2015**
SINODALES: **Ing. Verónica Hikra García Casanova**
Ing. Jesús Antonio Patiño Ramírez

NOMBRE____
Apellido paterno **Apellido materno** **Nombre (s)**

____
FIRMA

Instrucciones: Lee detenidamente los seis enunciados, este examen es la demostración de tu aprendizaje, trata de entender y resolver primero los que tienes seguridad en tu conocimiento. Se califica claridad y limpieza al escribir, no se califica el resultado únicamente.

1. Resolver la ecuación diferencial $x^{-1}y\,y'=\ln^{-1}y\,e^{x}$ sujeta a $y(1)=1$

Resolución:

$$x^{-1}y\,y'=\ln^{-1}y\,e^{x}$$

$$\frac{y}{x}\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\ln y}e^{x}$$

separando variables:

$$\ln y\,(y)\,dy=xe^{x}dx$$

integrando en ambos lados:

$$\int y\ln y\,dy=\int x\,e^{x}dx$$

$$\int y\,u\,y\,du=xe^{x}-e^{x}+C$$

$$\int y^{2}u\,du=e^{x}\left[x-1\right]+C$$

$$\int e^{2u}u\,du=e^{x}\left[x-1\right]+C$$

$$\frac{1}{2}u\,e^{2u}-\frac{1}{4}e^{2u}=e^{x}\left[x-1\right]+C$$
$$\frac{1}{2}\ln y\,e^{2\ln y}-\frac{1}{4}e^{2\ln y}=e^{x}\left[x-1\right]+C$$
$$\frac{1}{2}(\ln y)\,y^{2}-\frac{1}{4}y^{2}=e^{x}\left[x-1\right]+C$$
$$y^{2}\ln y^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}y^{2}=e^{x}\left[x-1\right]+C$$
$$y^{2}\left[\ln y^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\right]=e^{x}\left[x-1\right]+C$$

sustituyendo condiciones $y(1)=1$, se tiene:

$$C=-\frac{1}{4}$$

entonces la solución particular:

$$y^{2}\left[\ln y^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{4}\right]=e^{x}\left[x-1\right]-\frac{1}{4}$$

2. Resolver la ecuación diferencial por coeficientes indeterminados

$$y'''-5y''+6y'=2\,sen\,x+8$$

Resolución:

La solución general está dada por

$$y_G=y_H+y_P$$

Para y_H:

$$y'''-5y''+6y'=0$$
$$\left(D^{3}-5D^{2}+6D\right)y=0=D\left(D^{2}-5D+6\right)y$$

el polinomio auxiliar es:

$$P(m)=m^{3}-5m^{2}+6m=m\left(m^{2}-5m+6\right)=m(m-2)(m-3)=0$$

las raíces son:

$m_1=0$, $m_{2,3}=3,\ 2$

son tres raíces reales positivas:

$$y_H=C_1e^{0x}+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}$$

Para y_P:

$P_1(D)=D\left(D^2+1\right)$ (anulador)

aplicando a toda la ecuación diferencial:

$D\left(D^2+1\right)D[D-2][D-3]y=D\left(D^2+1\right)(25\,sen\,x+8)=0$

se tiene:

$$y_{NH}=\underbrace{C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{3x}}_{y_H}+\underbrace{A\,x+B\,sen\,x+C\cos x}_{y_P}$$

Por lo que la solución particular propuesta:

$y_P=Ax+B\,sen\,x+C\cos x$

y_P debe satisfacer la ecuación diferencial: $y_P'''-5y_P''+6y_P'=25\,sen\,x+8$

Derivando:

$y_P'=A+B\cos x-C\,sen\,x$

$y_P''=-B\,sen\,x-C\cos x$

$y_P'''=-B\cos x+C\,sen\,x$

Sustituyendo en la ecuación diferencial:

$$-B\cos x+C\,sen\,x+5B\,sen\,x+5C\cos x+6A+6B\cos x-6C\,sen\,x=$$

$$=25senx+8=sen\,x[5B-5C]+\cos x[5B+5C]+6A$$

Igualando los coeficientes:

$25=5B-5C\,,\quad 8=6A\,,\quad 5B+5C=0$

Resolviendo el sistema es:

$$\begin{aligned} 5B-5C&=25\\ 5B+5C&=0\\ 6A\qquad&=8 \end{aligned}$$

$A=\dfrac{4}{3}\qquad\qquad 5B-5-B=25$

$B=-C\qquad\qquad B=\dfrac{25}{10},\quad C=-\dfrac{25}{10}$

$\therefore\qquad \boxed{y_P=\dfrac{4}{3}x+\dfrac{25}{10}sen\,x-\dfrac{25}{10}\cos x}$

3. Resolver la ecuación diferencial por variación de parámetros

$$y'' + y = \sec^3 x$$

sujeta a $y(0) = 1$, $y'(0) = \frac{1}{2}$

Resolución:

Para la solución se sabe: $y_G = y_H + y_P$

Entonces y_H:

$y'' + y = 0 \qquad (D^2 + 1)y = 0 \qquad P(m) = m^2 + 1 = 0$

$m_{1,2} = \pm i$ con $a = 0$ y $b = 1$

$y_H = C_1\, sen\, x + C_2 \cos x$

Para y_P: $y_P = u_1 senx + u_2 \cos x$

El sistema que debe satisfacer:

$$\begin{bmatrix} sen\, x & \cos x \\ \cos x & -sen\, x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sec^3 x \end{bmatrix}$$

Premultiplicando toda la ecuación por la matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \frac{1}{-sen^2 x - \cos^2 x} \begin{bmatrix} -senx & -\cos x \\ -\cos x & sen\, x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sec^3 x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} -senx & -\cos x \\ -\cos x & sen\, x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \sec^3 x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos x \sec^3 x \\ -senx \sec^3 x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sec^2 x \\ -\tan x \sec^2 x \end{bmatrix}$$

Igualando:

$u_1' = \sec^2 x \qquad u_2' = -\tan x \sec^2 x$

Integrando:

$u_1 = \tan x \qquad u_2 = -\frac{1}{2}\tan^2 x$

sustituyendo en la solución particular:

$$y_P = \tan x\, sen\, x - \frac{1}{2}\tan^2 x \cos x$$

La solución general está dada por:

$$y_G = C_1 sen\, x + C_2 \cos x + \tan x\, sen\, x - \frac{1}{2}\tan^2 x \cos x$$

De las condiciones de valor inicial $y(0)=1$, $y'(0)=\frac{1}{2}$:

$C_2 = 1$

$$y'_G = C_1 \cos x - C_2 senx + \sec^2 x\, sen\, x + \tan x \cos x - \frac{1}{2}\left[2\tan x\left(\sec^2 x\right)\cos x - \tan^2 x\, sen\, x\right]$$

$C_1 = \frac{1}{2}$ y $C_2 = 1$

La solución particular es:

$$\boxed{y_P = \frac{1}{2} sen\, x + \cos x + \tan x\, sen\, x - \frac{1}{2}\tan^2 x \cos x}$$

4. Haciendo uso del operador diferencial obtener la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} x' &= \ \ x - 5y \\ y' &= 2x - y \end{aligned}$$

Resolución:

$$\left.\begin{aligned} x' - x + 5y &= 0 \\ -2x + y' + y &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} (D-1)x + 5y &= 0 \\ -2x + (D+1)y &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (D+1)(D-1)x + (D+1)(5y) &= 0 \\ -5(-2x) - 5(D+1)y &= 0 \end{aligned}$$

$$\left[(D+1)(D-1)+10\right]x = 0$$

$$\left(D^2+9\right)x = 0$$

$$\boxed{x = C_1 \cos 3x + C_2\, sen\, 3x}$$

$$5y = x - x'$$

$$5y = C_1 \cos 3x + C_2 sen\, 3x - \left(-3C_1 sen\, 3x + 3C_2 \cos 3x\right)$$

$$5y = \left(C_1 - 3C_2\right)\cos 3x + \left(C_2 + 3C_1\right) sen\, 3x$$

$$y = \frac{C_1 - 3C_2}{5}\cos 3x + \frac{C_2 + 3C_1}{5} sen\, 3x$$

$$\boxed{y = C_3 \cos 3x + C_4 \, sen \, 3x}$$

5. Haciendo uso de la transformada de Laplace, obtener la solución de la ecuación diferencial.

$$y' + 3y = f(t) \,, \qquad y(0) = 1$$

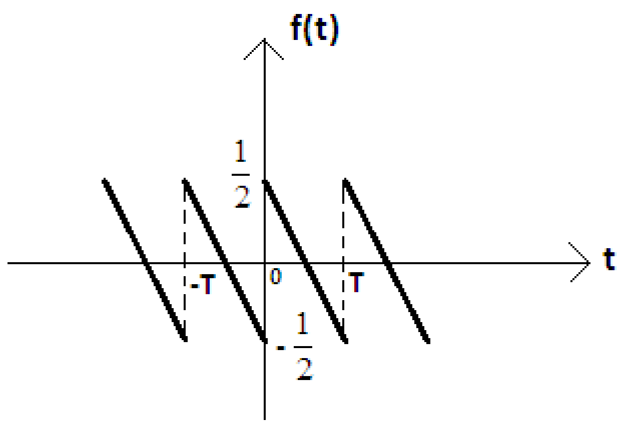
Resolución:

$$sY(s) - 1 + 3Y(s) = F(s) \qquad (s+3)Y(s) = 1 + F(s)$$

$$Y(s) = \frac{1}{s+3} + F(s)\left(\frac{1}{s+3}\right) \qquad y(t) = e^{-3t} + f(t) * e^{-3t}$$

$$y(t) = e^{-3t} + \int_0^t e^{-3u} (t-u) \, du$$

6. Obtener la serie de Fourier de $f(t)$ mostrada en la figura



Resolución:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \, sen \, n \, \omega_0 \, t \,, \qquad \text{donde} \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t) \, sen(n \, \omega_0 \, t) \, dt$$

$$b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \, sen(n \, \omega_0 \, t) \, dt : \quad f(t) = \frac{1}{2} - \frac{t}{T} \qquad 0 < t < T$$

$$b_n = \frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T}\right) sen\, n\,\omega_0\, t\, dt$$

$$b_n = \frac{4}{T}\left[-\left(\frac{1}{2} - \frac{t}{T}\right)\frac{\cos\, n\,\omega_0\, t}{n\,\omega_0} - \frac{sen\, n\,\omega_0\, t}{T\left(n\,\omega_0\right)^2}\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{1}{n\,\pi}$$

$$\boxed{f\left(t\right) = \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} sen\, n\,\omega_0\, t}$$