UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES
PRIMER EXAMEN EXTRAORDINARIO
RESOLUCIÓN

SEMESTRE 2016 -1 **TIPO 1**
DURACIÓN MÁXIMA 2.0 HORAS **21 DE SEPTIEMBRE DE 2015**
SINODALES: **Ing. Verónica Hikra García Casanova**
Ing. Andrés Basilio Ramírez y Villa

NOMBRE____
Apellido paterno **Apellido materno** **Nombre (s)**

____
FIRMA

Instrucciones: Lee detenidamente los cinco enunciados, este examen es la demostración de tu aprendizaje, trata de entender y resolver primero los que tienes seguridad en tu conocimiento. Se califica claridad y limpieza al escribir, no se califica el resultado únicamente.

1. Resolver la ecuación diferencial $\left(x^2+2y^2\right)dx = x\,y\,dy$

Resolución:

$(x^2+2y^2)dx = xydy$

$(x^2+2y^2)dx - xydy = 0$ Ecuación diferencial de coeficientes homogéneos

Realizando la sustitución $y = ux$

$dy = udx + xdu$

$(x^2+2u^2x^2)dx - ux^2(udx+xdu) = 0$

$x^2dx + 2u^2x^2dx - u^2x^2dx - ux^3du = 0$

$(x^2+u^2x^2)dx - ux^3du = 0$

$x^2(1+u^2)dx = ux^3du$

$\frac{1}{x}dx = \frac{udu}{1+u^2}$

$\ln|x| + C = \frac{1}{2}\ln(1+u^2)$

$\boxed{\ln|x| + C = \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{y^2}{x^2}\right)}$ simplificando $\frac{1}{x^2}+\frac{y^2}{x^4} = C$

2. Resolver la ecuación diferencial $y'' + y = 2\csc^3 x$

Resolución:

Resolviendo la ecuación homogénea asociada:

$$y'' + y = 0$$
$$m^2 + 1 = 0\ ; \quad m_1 = i,\ \ m_2 = -i$$
$$y_H = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x$$

Por el método de variación de parámetros:

$$y_P = u \cos x + v \operatorname{sen} x$$

de donde

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ 2\csc^3 x & \cos x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = \frac{-2\csc^3 x \operatorname{sen} x}{1}$$
$$= -\frac{2}{\operatorname{sen}^2 x} = -2\csc^2 x$$
$$u = 2\cot x$$
$$v' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & 2\csc^3 x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix}} = 2\csc^3 x \cos x$$
$$= 2\frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x}$$
$$v = 2\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^3 x} dx = -\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}$$
$$v = -\csc^2 x$$

por lo que

$$y_P = 2\cot x \cos x - \csc^2 x \operatorname{sen} x = 2\frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$
$$y_P = \frac{2\cos^2 x - 1}{\operatorname{sen} x}$$

finalmente: $\boxed{y_G = C_1 \cos x + C_2 \operatorname{sen} x + \frac{2\cos^2 x - 1}{\operatorname{sen} x}}$

3. Obtener la solución del sistema de ecuaciones diferenciales por operadores diferenciales (eliminación sistemática)

$$x_1' = x_1 + x_2$$
$$x_2' = 4x_1 - 2x_2$$

Resolución:

$$x_1' - x_1 - x_2 = 0..........(1')$$
$$x_2' - 4x_1 + 2x_2 = 0.......(2')$$
$$\begin{bmatrix} D-1 & -1 \\ -4 & D+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resolviendo para x_1

$$\begin{vmatrix} D-1 & -1 \\ -4 & D+2 \end{vmatrix} x_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & D+2 \end{vmatrix}$$

$$[(D-1)(D+2) - 4]x_1 = 0$$
$$(D^2 + D - 6)x_1 = 0$$

De aquí:

$$x_1 = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} \text{........ (3)}$$

Resolviendo para x_2

$$\begin{vmatrix} D-1 & -1 \\ -4 & D+2 \end{vmatrix} x_2 = \begin{vmatrix} D-1 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$$
$$x_2 = C_3 e^{2t} + C_4 e^{-3t} \text{........ (4)}$$

Reduciendo constantes
Derivando (3)

$$x_1' = 2C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{3t} \text{........(5)}$$

Sustituyendo (3), (4) y (5) en (1')

$$2C_1 e^{2t} - 3C_2 e^{-3t} - C_1 e^{2t} - C_2 e^{-3t} - C_3 e^{2t} - C_4 e^{-3t} = 0$$
$$(C_1 - C_3)e^{2t} + (-4C_2 - C_4)e^{-3t} = 0$$
$$C_1 - C_3 = 0; \quad \rightarrow \quad C_3 = C_1$$
$$-4C_2 - C_4 = 0: \rightarrow \quad C_4 = -4C_2;$$

Finalmente

$$\boxed{\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{2t} + C_2 e^{-3t} \\ x_2 &= C_1 e^{2t} - 4C_2 e^{-3t} \end{aligned}}$$

4. Aplicar la Transformada de Laplace en la solución de la ecuación diferencial

$$y'' - 7y' + 6y = 10\,\delta(t-2) \qquad \text{sujeta a} \qquad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

Resolución:

por Laplace

$$s^2Y(s) - 7sY(s) + 6Y(s) = 10e^{-2s}$$

de aquí:

$$\frac{10}{s^2 - 7s + 6} = \frac{A}{s-6} + \frac{B}{s-1}$$

$$10 = A(s-1) + B(s-6)$$

para $s = 1$ $\qquad B = \dfrac{10}{-5} = -2$

para $s = 6$ $\qquad A = \dfrac{10}{5} = 2$

$$Y(s) = \left(\frac{2}{s-6} - \frac{2}{s-1}\right)e^{-2s}$$

Aplicando la transformada inversa:

$$\boxed{y(t) = \left[2e^{6(t-2)} - 2e^{(t-2)}\right]\mathcal{U}(t-2)}$$

5. Obtener la solución general de la ecuación en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u$$

empleando una constante de separación positiva

Resolución:

$$u(x,y) = XY \qquad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''Y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = XY''$$

$$X''Y + XY'' = XY$$

$$\frac{X''}{X} = \frac{Y - Y''}{Y} = \lambda^2$$

de aquí:

$X''-\lambda^2 X=0$ (2)

$Y''+(\lambda^2-1)Y=0$ (3)

para (2)

$m^2-\lambda^2=0$

$m_{1,2}=\pm\lambda$

$X=C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}$

para (3)

$m^2+(\lambda^2-1)=0$

$m_{1,2}\pm\sqrt{\lambda^2-1}\,i$

$Y=C_3\cos\sqrt{\lambda^2-1}y+C_4\text{sen}\sqrt{\lambda^2-1}$

finalmente la solución general es:

$$\boxed{u(x,y)=\left(C_1e^{\lambda x}+C_2e^{-\lambda x}\right)\left(C_3\cos\sqrt{\lambda^2-1}\,y+C_4\text{sen}\sqrt{\lambda^2-1}\,y\right)}$$