UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES
SEGUNDO EXAMEN EXTRAORDINARIO
RESOLUCIÓN

SEMESTRE 2015 -2 **TIPO 1**

DURACIÓN MÁXIMA 2.0 HORAS **24 DE ABRIL DE 2015**

SINODALES: **Ing. Jesús Javier Cortés Rosas**

M.A. Miguel Eduardo González Cárdenas

NOMBRE____

Apellido paterno **Apellido materno** **Nombre (s)**

____

FIRMA

Instrucciones: Lee detenidamente los cinco enunciados, este examen es la demostración de tu aprendizaje, trata de entender y resolver primero los que tienes seguridad en tu conocimiento. Se califica claridad y limpieza al escribir, no se califica el resultado únicamente.

1. Resolver la ecuación $3x(xy-2)\,dx+\left(x^3+2y\right)dy=0$

Resolución

$$3x(xy-2)\,dx+\left(x^3+2y\right)dy=0$$

$$\left(3x^2y-6x\right)dx+\left(x^3+2y\right)dy=0$$

$$M=3x^2y-6x \qquad N=x^3+2y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=3x^2$$

Por lo tanto es una ecuación diferencial exacta. La solución está dada por: $f(x,y)=C$ donde

$$f(x,y)=\int M(x,y)\,dx=C$$ esto es:

$$f(x,y)=\int\left(3x^2y-6x\right)dx=x^3y-3x^2+f(y)=C$$

para lo cual:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=N(x,y)$$

derivando con respecto a y:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^3 + f'(y) = x^3 + 2y$$

se tiene:

$$f'(y) = 2y$$

integrando:

$$f(y) = y^2$$

sustituyendo en la solución:

$$f(x,y) = x^3 y - 3x^2 + y^2 = C$$

2. Hallar una ecuación lineal homogénea con coeficientes constantes, que tenga como solución

$$y = C_1 e^{2x} sen\, x + C_2 e^{2x} \cos x + C_3 x e^{2x} sen\, x + C_4 x e^{2x} \cos x$$

Resolución

Se tiene la solución homogénea asociada, por lo que del polinomio auxiliar:

$$y = C_1 e^{2x} sen\, x + C_2 e^{2x} \cos x + C_3 x e^{2x} sen\, x + C_4 x e^{2x} \cos x$$

con : $a = 2$, $b = 1$ dada la forma de la solución, raíces complejas con multiplicidad dos:

$$\left(m^2 - 2am + \left(a^2 + b^2\right)\right)^2 = \left(m^2 - 4m + 5\right)^2$$

por lo que la ecuación diferencial homogénea es:

$$\left(D^2 - 4D + 5\right)\left(D^2 - 4D + 5\right) y = 0$$

$$\left(D^4 - 8D^3 + 26D^2 - 40D + 25\right) y = 0$$

$$D^4 y - 8D^3 y + 26D^2 y - 40Dy + 25y = 0$$

$$y^{(IV)} - 8y''' + 26y'' - 40y' + 25 = 0$$

3. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -4x + 4y \end{aligned}$$

Resolución

$$\frac{dx}{dt} = y \qquad \frac{dx}{dt} - y = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = -4x + 4y \qquad 4x + \frac{dy}{dt} - 4y = 0$$

$$\begin{bmatrix} D & -1 \\ 4 & D-4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ sistema de Ecuaciones Diferenciales Lineales de primer orden homogéneo

Resolviendo para $x(t)$ por determinantes, se tiene:

$$\begin{bmatrix} D & -1 \\ 4 & D-4 \end{bmatrix} x=\left[D(D-4)+4\right]x=0$$

$$\left[D^2-4D+4\right]x=0$$

$$(D-2)^2 x=0$$

El polinomio auxiliar es: $(m-2)^2=0$; $m_1=2$, $m_2=2$

$$x_H=C_1 e^{2t}+C_2\, t\, e^{2t}$$

Derivando:

$$x'_H=2C_1 e^{2t}+C_2 e^{2t}+2C_2\, t\, e^{2t}$$

$$x'_H=e^{2t}\left[2C_1+C_2\right]+2C_2\, t\, e^{2t}$$

$$x'_H=\left[2C_1+C_2\right]e^{2t}+2C_2\, t\, e^{2t}$$

entonces:

$$y_H=C_3 e^{2t}+C_4\, t\, e^{2t}$$

sustituyendo en la ecuación 1:

$$y_H=(2C_1+C_2)e^{2t}+2C_2\, t\, e^{2t}$$

4. Obtener:

a) La transformada de Laplace de $f(t)=e^{2t}\delta(t-1)$

Resolución

$$f(t)=e^{2t}\delta(t-1)$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}=\mathcal{L}\left\{e^{2t}\delta(t-1)\right\}=e^{-s}\,\Big|_{s\to s-2}$$

$$=e^{-(s-2)}=F(s-a)$$

b) La transformada inversa de Laplace de $F(s)=\dfrac{1}{(s-2)^3+(s-2)^2}$

Resolución

$$F(s)=\frac{1}{(s-2)^3+(s-2)^2}$$

Aplicando la transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^3+(s-2)^2}\right\}=f(t)$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2[s-2+1]}\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2[s-1]}\right\}$$

$$=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\frac{1}{(s-2)^2}\right\}=e^t * t\,e^{2t}=\int_0^t \tau\, e^{2\tau}e^{t-\tau}d\tau$$

$$=e^t\int_0^t \tau e^{\tau}d\tau=e^t\left[\tau e^{\tau}-e^{\tau}\right]_0^t$$

$$=e^t\left[te^t-e^t\right]+e^t$$

$$=te^{2t}-e^{2t}+e^t$$

$$=e^{2t}[t-1]+e^t$$

5. Obtener los primeros tres términos de la serie trigonométrica de Fourier $f(x)=x \quad , \quad -\pi<x<\pi$

Resolución:

Dado que $f(x)=x$ es una función impar en el intervalo de $-\pi<x<\pi$, con la identificación $2p=2\pi$, $p=\pi$, $\dfrac{2}{p}=\dfrac{2}{\pi}$ se puede escribir como:

$$b_n=\frac{2}{p}\int_0^p f(x)\,sen\left(\frac{n\pi}{p}x\right)dx$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,sen(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}sen(nx)-\frac{1}{n}x\cos(nx)\right]_0^\pi$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left[\frac{1}{n}sen(nx) - x\cos(nx)\right]_0^{\pi}$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left[\frac{1}{n}sen(n\pi) - \pi\cos(n\pi)\right]$$

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\left[-\pi\cos(n\pi)\right]$$

entonces:

$$f(x) = x = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2}{n}\cos(n\pi)\,sen(nx)\right)$$

$$f(x) = x = -2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(-1)^n\, sen(nx)$$

$$f(x) = x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}sen(nx)$$

Los tres primeros términos son:

$$f(x) = 2\left[sen(x) - \frac{1}{2}sen(2x) + \frac{1}{3}sen(3x) + \ldots\right]$$