UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES
SEGUNDO EXAMEN EXTRAORDINARIO
RESOLUCIÓN

SEMESTRE 2016 -1
TIPO 1
DURACIÓN MÁXIMA 2.0 HORAS **27 DE OCTUBRE DE 2015**
SINODALES: **Ing. Joel Gómez**
Fis. Juan Velázquez Torres

NOMBRE____
Apellido paterno **Apellido materno** **Nombre (s)**

____
FIRMA

Instrucciones: Lee detenidamente los seis enunciados, este examen es la demostración de tu aprendizaje, trata de entender y resolver primero los que tienes seguridad en tu conocimiento. Se califica claridad y limpieza al escribir, no se califica el resultado únicamente.

1. Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{y}{x}dx+\left(1-\frac{y}{x}sen\,y\right)dy=0$$

Resolución:

$$\frac{y}{x}dx+\left(1-\frac{y}{x}sen\,y\right)dy=0$$

$$dx+\left(\frac{x}{y}-sen\,y\right)dy=0 \quad ... \ (1)$$

$$M(x,y)=1 \quad N(x,y)=\frac{x}{y}-sen\,y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=0 \qquad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=-\frac{1}{y} \quad \Rightarrow \frac{1}{M(x,y)}\left[\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}\right]=-\frac{1}{y}$$

$$\mu(y)=e^{-\int\left(-\frac{1}{y}\right)dy}=e^{\int\frac{1}{y}dy}=e^{\ln y}=y$$

Multiplicando por y la ecuación (1)

$$y\,dx+\left(x-y\,sen\,y\right)dy=0\ \ldots(2)$$

$$R(x,y)=y \qquad S(x,y)=x-y\,sen\,y$$

$$\frac{\partial R(x,y)}{\partial y}=1 \qquad \frac{\partial S(x,y)}{\partial x}=1$$

La ecuación (2) es exacta

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=y\Rightarrow f(x,y)=\int y\,dx\Rightarrow f(x,y)=xy+c(y)\Rightarrow\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x+\frac{dc(y)}{dy}$$

$$\frac{\partial f(,y)}{\partial y}=x-y\,sen\,y\Rightarrow x+\frac{dc(y)}{dy}=x-y\,sen\,y\Rightarrow\frac{dc(y)}{dy}=-y\,sen\,y$$

$$c(y)=-\int y\,sen\,y\,dy$$

$$u=y \quad dv=-sen\,y\,dy$$

$$du=dy \quad v=\cos y$$

$$c(y)=y\cos y-\int\cos y\,dy=y\cos y-sen\,y+C$$

$$f(x,y)=xy+c(y)=xy+y\cos y-sen\,y+A=B$$

$$xy+y\cos y-sen\,y=C$$

2. Resolver la ecuación diferencial

$$y''-4y'+8y=8\,sen\,2x$$

Resolución:

$$y''-4y'+8y=8\,sen\,2x$$

$$x^2-4x+8=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{16-4(1)(8)}}{2}=2\pm2i$$

Base del espacio solución: $\left\{e^{2x}\cos 2x,\ e^{2x}sen\,2x\right\}$

$$y_H=C_1e^{2x}\cos 2x+C_2e^{2x}sen\,2x$$

Aniquilador de $Q(x)=sen\,2x$: D^2+4

$$\left(D^2+4\right)\left(D^2-4D+8\right)=0$$

$$\left(\lambda^2+4\right)\left(\lambda^2-4\lambda+8\right)=0\ \Rightarrow\lambda=\pm2i,\ \lambda=2\pm2i$$

$$y = C_1 e^{2x}\cos 2x + C_2\, sen\, 2x + C_3\cos 2x + C_4\, sen^2 x$$

$$y_P = C_3\cos 2x + C_4 sen\, 2x$$

$$y'_P = -2C_3\, sen\, 2x + 2C_4\cos 2x$$

$$y''_P = -4C_3\cos 2x - 4C_4 sen\, 2x$$

$$y''_P - 4y'_P + 8y_P = 8\, sen\, 2x$$

$$-4C_3\cos 2x - 4C_4\, sen\, 2x + 8C_3\, sen\, 2x - 8C_4\cos 2x + 8C_3\cos 2x + 8C_4\, sen\, 2x = 8\, sen\, 2x$$

$$\left(4C_3 - 8C_4\right)\cos 2x + \left(8C_3 + 4C_4\right) sen\, 2x = 0$$

$$\left\{\begin{matrix} 4C_3 - 8C_4 = 0 \\ 8C_3 + 4C_4 = 8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 4C_3 - 8C_4 = 0 \\ 4C_3 + 2C_4 = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow -10C_4 = -4 \Rightarrow C_4 = \frac{2}{5} \Rightarrow C_3 = \frac{4}{5}$$

$$y_P = \frac{4}{5}\cos 2x + \frac{2}{5} sen\, 2x$$

$$y = C_1 e^{2x}\cos 2x + C_2 e^{2x} sen\, 2x + \frac{4}{5}\cos 2x + \frac{4}{5} sen\, 2x$$

3. Dado que x , x^2 y $\frac{1}{x}$ son soluciones de la ecuación homogénea correspondiente a

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2xy' + 2y = 2x^4$$

determinar una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea.

Resolución:

$$y_P = A(x)x + B(x)x^2 + \frac{c(x)}{x}$$

$$w\left(x, x^2, \frac{1}{x}\right) = \begin{vmatrix} 1 & x^2 & \frac{1}{x} \\ 0 & 2x & -\frac{1}{x^2} \\ 0 & 2 & \frac{2}{x^3} \end{vmatrix} = 2x\left(\frac{2}{x^3}\right) - 2\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{4}{x^2} + \frac{2}{x^2} = \frac{6}{x^2}$$

$$A'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x^2 & \frac{1}{x} \\ 0 & 2x & -\frac{1}{x^2} \\ 2x & 2 & \frac{2}{x^3} \end{vmatrix}}{\frac{6}{x^2}} = \frac{2x(-1-2)}{\frac{6}{x^2}} = \frac{-6x}{\frac{6}{x^2}} = -\frac{6x^3}{6} = -x^3$$

$$A(x) = -\int x^3 dx = -\frac{x^4}{4} + C_1$$

$$B'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{x} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{x^2} \\ 0 & 2x & \frac{2}{x^3} \end{vmatrix}}{\frac{6}{x^2}} = \frac{\frac{2}{x}}{\frac{6}{x^2}} = \frac{1}{3}x$$

$$B(x) = \frac{1}{3}\int x\,dx = \frac{1}{6}x^2 + C_2$$

$$C'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x^2 & 0 \\ 0 & 2x & 0 \\ 0 & 2 & 2x \end{vmatrix}}{\frac{6}{x^2}} = \frac{4x}{\frac{6}{x^2}} = \frac{4x^3}{6} = \frac{2}{3}x^3$$

$$C(x) = \frac{2}{3}\int x^3 dx = \frac{x^4}{6} + C_3$$

$$y_P = \left(-\frac{x^4}{4}\right)x + \left(\frac{1}{6}x^2\right)x^2 + \frac{\frac{x^4}{6}}{x} = -\frac{1}{4}x^5 + \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{6}x^3$$

4. Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales

$$x' - y' - y = -e^t$$
$$x + y' - y = e^{2t}$$

Resolución:

$x' - y' - y = -e^t \quad ...(1)$

$x + y' - y = e^{2t} \quad ...(2)$

$de(2):\ x = -y' + y + e^{2\tau} \quad ...(3)$

$de(3):\ x' = -y'' + y' + 2e^{2\tau} \quad ...(4)$

sustituyendo (4) en (1)

$-y'' + y' + 2e^{2\tau} - y' - y = -e^{\tau}$

$y'' + y = e^{\tau} + 2e^{2\tau}$

$$y'' + y = 0$$
$$\lambda^2 + 1 = 0 \qquad \lambda = \pm i$$
$$y_H = C_1 \cos\tau + C_2\, sen\,\tau$$
$$y'' + y = e^{\tau}$$
$$y_{P_1} = Ae^{\tau} \Rightarrow y'_{P_1} = Ae^{\tau} \Rightarrow y''_{P_1} = Ae^{\tau}$$
$$y''_{P_1} + y_{P_1} = e^{\tau} \Rightarrow Ae^{\tau} + Ae^{\tau} = e^{\tau} \Rightarrow A = \frac{1}{2}$$
$$y_{P_1} = \frac{1}{2}e^{\tau}$$
$$y'' + y = 2e^{2\tau}$$
$$y_{P_2} = Ae^{2\tau} \Rightarrow y'_{P_2} = 2Ae^{2\tau} \Rightarrow y''_{P_2} = 4Ae^{2\tau}$$
$$y''_{P_2} + y_{P_2} = 2e^{2\tau} \Rightarrow 4Ae^{2\tau} + Ae^{2\tau} = 2e^{2\tau} \Rightarrow A = \frac{2}{5}e^{2\tau}$$
$$y = C_1 \cos\,\tau + C_2\, sen\,\tau + \frac{1}{2}e^{\tau} + \frac{2}{5}e^{2\tau}$$

De (3)

$$x = -y' + y + e^{2\tau} = 4\, sen\,\tau - C_2 \cos\,\tau - \frac{1}{2}e^{\tau} - \frac{4}{5}e^{2\tau} + C_1 \cos\,\tau + C_2 sen\,\tau + \frac{1}{2}e^{\tau} + \frac{2}{5}e^{2\tau} + e^{2\tau}$$
$$x = (C_1 + C_2)\, sen\,\tau + (C_1 + C_2)\cos\,\tau + \frac{3}{5}e^{2\tau}$$

5. Obtener la transformada de Laplace y la inversa de la transformada de Laplace indicadas.

a) $\mathcal{L}\left\{t\, r(t-1) * \frac{d}{dt}\left[\delta(t-2)\right]\right\}$

Resolución:

$$-\frac{d}{ds}\left(\frac{e^{-s}}{s^2}\right)\left[se^{-2s} - \delta(\tau-2)_{\tau=0}\right]$$
$$\frac{se^{-s} + 2e^{-s}}{s^3}\, se^{-2s} = \frac{(s+2)e^{-3s}}{s^2}$$

b) $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s\, e^{-s}}{s^2 - 3s + 2}\right\}$

Resolución:

$$\frac{s}{s^2 - 3s + 2} = \frac{s}{(s-1)(s-2)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-1} = \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s-1}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s\,e^{-s}}{s^2-3s+2}\right\}=\left(2e^{2(\tau-1)}-e^{(\tau-1)}\right)u(\tau-1)$$

6. Resolver la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=u$$

para una constante de separación nula.

Resolución:

$$u(x,y)=F(x)G(y)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}=G(y)\frac{d^2F(x)}{dx^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=F(x)\frac{d^2G(y)}{dy^2}$$

$$G(y)\frac{d^2F(x)}{dx^2}+F(x)\frac{d^2G(y)}{dy^2}=F(x)G(y)$$

$$\frac{1}{F(x)}\frac{d^2F(x)}{dx^2}+\frac{1}{G(y)}\frac{d^2G(y)}{dy^2}=1$$

$$\frac{1}{F(x)}\frac{d^2F(x)}{dx^2}=1-\frac{1}{G(y)}\frac{d^2G(y)}{dy^2}=0$$

$$\frac{1}{F(x)}\frac{d^2F(x)}{dx^2}=0\Rightarrow F(x)=Ax+B$$

$$1-\frac{1}{G(y)}\frac{d^2G(y)}{dy^2}=0\Rightarrow\frac{1}{G(y)}\frac{d^2G(y)}{dy^2}=1\Rightarrow\frac{d^2G(y)}{dy^2}-G(y)=0$$

$$\lambda^2-1=0\Rightarrow\lambda=\pm 1$$

$$G(y)=Ce^{y}+De^{-y}$$

$$u(x,y)=(Ax+B)\left(Ce^{y}+De^{-y}\right)$$