UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
ECUACIONES DIFERENCIALES
PRIMER EXAMEN FINAL COLEGIADO
RESOLUCIONES

SEMESTRE 2016 -2 **Tipo A**

30 de mayo de 2016

1. **Resolver la siguiente ecuación diferencial.**

$$\left(x^2+2x\right)y'=x^2y$$

Resolución:

$$\frac{y'}{y}=\frac{x^2}{\left(x^2+2x\right)}$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{x^2}{x\left(x+2\right)}dx$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{x}{x+2}dx$$

$$\int\frac{dy}{y}=\int\frac{x}{x+2}dx$$

Por la división entre polinomios se tiene.

$$\int\frac{dy}{y}=\int dx-2\int\frac{dx}{x+2}$$

$$\ln y=x-2\ln\left(x+2\right)+C$$

$$\boxed{ln\, y\left(x+2\right)^2-x=C}$$

2. **Aplicar el método de coeficientes indeterminados para resolver la ecuación diferencial.**

$$y''+y=sen\,x$$

Resolución:

Para la Ecuación Diferencial homogénea asociada

$$\left(D^2+1\right)y=0$$

Ecuación auxiliar:

$$m^2+1=0$$

$$m_{1,2}=\pm i$$

$$y_c=C_1\cos x+C_2\,sen\,x$$

Operador anulador de $F\left(x\right)=sen\,x$ es D^2+1

Aplicando el operador anulador a la Ecuación Diferencial:

$$\left(D^2+1\right)^2 y=0$$

$$y_G=C_1\cos x+C_2 sen\,x+C_3 x\cos x+C_4 x\,sen\,x$$

Solución particular:

$$y_P=C_3 x\cos x+C_4 x\,sen\,x$$

$$y_P'=C_3\cos x-C_3 x\,sen\,x+C_4 sen\,x+C_4 x\cos x$$

$$y_P''=-2C_3 sen\,x+2C_4\cos x-C_3 x\cos x-C_4 x\,sen\,x$$

Sustituyendo la solución particular en la Ecuación Diferencial:

$$y_P''+y_P=sen\,x$$

Se obtiene:

$$-2C_3 sen\,x+2C_4\cos x=sen\,x$$

$$C_3=-\frac{1}{2},\quad C_4=0$$

$$y_P=-\frac{1}{2}x\cos x$$

$$\boxed{y=C_1\cos x+C_2 sen\,x-\frac{1}{2}x\cos x}$$ Solución General

3. Obtener la solución general del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales.

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Resolución:

$$x_1'-x_2=0 \quad \ldots (1)$$

$$x_2'-x_1=0 \quad \ldots (2)$$

$$Dx_1-x_2=0$$

$$-x_1+Dx_2=0$$

$$\begin{bmatrix} D & -1 \\ -1 & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta=D^2-1$$

Por lo que

$$\left(D^2-1\right)x_1=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & D \end{bmatrix}$$

Es decir

$$\left(D^2-1\right)x_1=0$$

Resolviendo la Ecuación Diferencial:

$$m^2-1=0$$

$$m_1=1\ ;\ \ m_2=-1$$

Entonces

$$x_1=C_1e^t+C_2e^{-t}$$

Sustituyendo x_1 en (1)

$$x_2=x_1'\ \ derivando\ a\,x_1\ \ se\ tiene$$

$$x_2=C_1e^t-C_2e^{-t}$$

Finalmente tenemos que la solución general es:

$$x_1=C_1e^t+C_2e^{-t}$$

$$x_2=C_1e^t-C_2e^{-t}$$

4. Resolver la ecuación integro-diferencial, donde u es una función escalón unitario.

$$y'+\int_0^t y(v)\,dv=u(t-\pi)\ \ ,\ \ y(0)=0$$

Resolución:

$$sY(s)-\cancel{y(0)}^{\,0}+\frac{Y(s)}{s}=\frac{e^{-\pi s}}{s}$$

$$\left(s+\frac{1}{s}\right)Y(s)=\frac{e^{-\pi s}}{s}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{Y(s)=\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}\right\}$$

$$y(t)=f(t-\pi)\,u(t-\pi)$$

Donde

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+1}\right\}=sen\,t$$

$$\therefore\ \boxed{y(t)=sen(t-\pi)\,u(t-\pi)}$$

5. Obtener el desarrollo de la serie de Fourier de la función: $f(t)=t$ en el intervalo $[-2,2]$.

Resolución:

La función $f(t)=t$ es una función impar por lo tanto:

$$a_0=0$$

$$a_n=0$$

$$b_n\neq 0$$

Obteniendo el término b_n :

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\, sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt \qquad \begin{aligned} T &= 4 \\ L &= 2 \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\, sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt = \frac{2}{2}\int_{0}^{2} t\, sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right) dt = \int_{0}^{2} t\, sen\left(\frac{n\pi t}{2}\right) dt$$

Resolviendo la integral

$\frac{d}{dt}$	$\int dt$
t	$sen\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$
1	$+$ $-\frac{2}{n\pi} cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$
0	$-$ $-\frac{4}{n^2\pi^2} sen\left(\frac{n\pi t}{2}\right)$

$$b_n = \left[-\frac{2t}{n\pi}\cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) + \frac{4}{n^2\pi^2} sen\left(\frac{n\pi t}{2}\right)\right]_0^2$$

$$b_n = \left[-\frac{4}{n\pi}\cos(n\pi) + \cancelto{0}{\frac{4}{n^2\pi^2} sen(n\pi)} - 0\right]$$

$$b_n = \left[-\frac{4}{n\pi}\cos(n\pi)\right]$$

$$b_n = \left[-\frac{4}{n\pi}(-1)^n\right]$$

El desarrollo de la serie de Fourier es: $\boxed{f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{4}{n\pi}(-1)^n\, sen\left(\frac{n\pi t}{2}\right)}$