UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE ECUACIONES DIFERENCIALES
SEGUNDO EXAMEN FINAL
RESOLUCIÓN

SEMESTRE 2015 -1 **TIPO 1**
DURACIÓN MÁXIMA 2.0 HORAS **4 DE DICIEMBRE DE 2014**

NOMBRE____
Apellido paterno **Apellido materno** **Nombre (s)** **Grupo**

1. Obtener una función $N(x,y)$ de modo que la siguiente ecuación diferencial sea exacta

$$\left(ye^{xy} + y^2 - \frac{1}{x^2}y \right)dx + N(x,y)\,dy = 0$$

2 PUNTOS

Resolución

Para obtener $N(x,y)$ que haga una ecuación exacta: $f(x,y)=C$ en donde:

$$f(x,y)=\int M(x,y)\,dx+h(y)$$

además:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\int M(x,y)\,dx+h(y)\right]=N(x,y)$$

calculando:

$$f(x,y)=\int\left(y\,e^{xy}+y^2-\frac{1}{x^2}y\right)dx+h(y) \quad ; \quad \begin{cases} u=xy \\ du=ydx \\ dx=\dfrac{du}{y} \end{cases}$$

$$f(x,y)=e^{xy}+x\,y^2+\frac{y}{x}+h(y)$$

$$\frac{\partial\left(e^{xy}+xy^2+\frac{y}{x}+h(y)\right)}{\partial y}=N(x,y)$$

$$xe^{xy}+2xy+\frac{1}{x}+h'(y)=N(x,y)$$

$$\boxed{N(x,y)=xe^{xy}+2xy+\frac{1}{x}}$$

para que se cumpla la igualdad:

$h'(y)=0 \qquad h(y)=C_1$

por lo que:

$$f(x,y)=e^{xy}+xy^2+\frac{y}{x}+C_1$$

entonces:

$$f(x,y)=C$$

$$e^{xy}+xy^2+\frac{y}{x}=C$$

comprobando:

$$M(x,y)=ye^{xy}+y^2-\frac{y}{x^2}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=e^{xy}+x\,y\,e^{xy}+2y-\frac{1}{x^2}$$

$$N(x,y)=xe^{xy}+2xy+\frac{1}{x}$$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=e^{xy}+xye^{xy}+2y-\frac{1}{x^2}$$

se comprueba que cumplen, las derivadas parciales son iguales.

2. Determinar la ecuación diferencial que tiene por solución general a la función

$$y(t)=Ae^{-t}\cos t+Be^{-t}sen\ t+3\ sen\ t-\cos t$$

2 PUNTOS

Resolución

Para obtener la ecuación diferencial a partir de la solución general dada $(y_G=y_H+y_P)$ igualando con la ecuación dada:

$$y_H=Ae^{-t}\cos\ t+Be^{-t}sen\ t$$

en términos del operador diferencial es:

$$a=-1 \qquad \therefore \qquad (D^2+2D+2)y=0$$
$$b=\pm 1$$

que es igual a: $y''+2y'+2y=0$

el complemento es la solución particular, entonces:

$$y_p=3\ sen\ t-\cos t$$

$$y_p'=3\cos t+sent$$

$$y_p''=-3sent+\cos t$$

La solución particular debe satisfacer a la ecuación diferencial, por tanto:

$$y_p'' + 2y_p' + 2y_p = q(t)$$

$$-3sent + \cos t + 2\left(3\cos t + sent\right) + 2\left(3\ sen\ t - \cos t\right) = q(t)$$

desarrollando:

$$-3sent + \cos t + 6\cos t + 2sent + 6\ sen\ t - 2\cos t = q(t)$$

$$5\ sen\ t + 5\cos t = q(t)$$

por lo tanto la ecuación diferencial es:

$$\boxed{y'' + 2y' + 2y = 5\sin t + 5\cos t}$$

También se pueden obtener sus derivas sucesivas, dos veces, de acuerdo con el número de constantes arbitrarias, entre y, y' y y'' se anulan dichas constantes con manejos algebraicos.

3. Determinar la solución del sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = -y + t$$

$$\frac{dy}{dt} = x - t$$

2 PUNTOS

Resolución

El sistema de ecuaciones se puede resolver por eliminación sistemática o por regla de Cramer.

$$Dx + y = t$$

$$-x + Dy = -t$$

$$\begin{bmatrix} D & 1 \\ -1 & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{cc|c} D & 1 & t \\ -1 & D & -t \end{array}\right]$$

Por regal de Cramer para $x(t)$:

$$\begin{bmatrix} D & 1 \\ -1 & D \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} t & 1 \\ -t & D \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \left(D^2+1\right)x = Dt + t \\ \left(D^2+1\right)x = 1 + t \end{array}$$

y para $y(t)$:

$$\begin{bmatrix} D & 1 \\ -1 & D \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} D & t \\ -1 & -t \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \left(D^2+1\right)y = D(-t) + t \\ \left(D^2+1\right)y = -1 + t \end{array}$$

resolviendo las ecuaciones diferenciales $x(t)$ y $y(t)$, se tiene:

$\left(D^2+1\right)x = 1 + t$ se sabe que: $x_G = x_H + x_P$

para x_H :

$$\left(D^2+1\right)x=0$$

$$P\left(D\right)=D^2+1$$

$$0=m^2+1 \quad ; \quad m^2=-1 \quad , \quad m_{1,2}=\pm i \Rightarrow \begin{matrix} a=0 \\ b=1 \end{matrix}$$

por lo tanto:

$$x_H=C_1\cos t+C_2 sen\,t$$

para x_P se puede proceder por coeficientes indeterminados o por variación de parámetros, resolviendo por variación de parámetros, se tiene:

$$x_P=u\cos t+v\,sen\,t \;\; ; \quad u=u\left(t\right) \;,\; v=v\left(t\right)$$

entonces:

$$\begin{bmatrix} \cos t & sen\,t \\ -sen\,t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 1+t \end{bmatrix}$$

premultiplicando por la matriz inversa:

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix}=\frac{1}{\cos^2 t+sen^2 t}\begin{bmatrix} \cos t & -sen\,t \\ sen\,t & \cos t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1+t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -sen\,t\left(1+t\right) \\ \cos t\left(1+t\right) \end{bmatrix}$$

igualando:

$$u'=-sen\,t\left(1+t\right)$$

$$v'=\cos t\left(1+t\right)$$

integrando:

$$u=\int\left(-sen\,t\right)\left(1+t\right)dt=\cos t-sen\,t+t\cos t$$

$$v=\int\cos t\left(1+t\right)dt=sen\,t+t\,sen\,t+\cos t$$

Sustituyendo en la solución propuesta:

$$x_P=\left[\cos t+t\cos t-sen\,t\right]\cos t+\left[sen\,t+t\,sen\,t+\cos t\right]sen\,t$$

desarrollando y simplificando:

$$x_P=\cos^2 t+t\cos^2 t-sen\,t\cos t+sen^2 t+t\,sen^2 t+sen\,t\cos t$$

$$x_P=1+t$$

por lo tanto:

$$x_G=C_1\cos t+C_2 sen\,t+1+t$$

Ahora para $y_G=y_H+y_P$, resolviendo por regla de Cramer, se tiene:

para y_H si $\left(D^2+1\right)y=-1+t$

$\left(D^2+1\right)y=0$

$m^2+1=0$

$m=\pm i$

por lo tanto: $y_H=C_3\cos t+C_4 sen\,t$

para y_P se propone por variación de parámetros:

$y_P=u\cos t+v\,sen\,t$; $u=u(t)$, $v=v(t)$

$$\begin{bmatrix}\cos t & sen\,t\\ -sen\,t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u'\\ v'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ -1+t\end{bmatrix}$$

premultiplicando por la matriz inversa:

$$\begin{bmatrix}u'\\ v'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos t & -sen\,t\\ sen\,t & \cos t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ -1+t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-sen\,t)(-1+t)\\ (\cos t)(-1+t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(sen\,t)(1-t)\\ \cos t(t-1)\end{bmatrix}$$

igualando:

$u'=sen\,t(1-t)$

$v'=\cos t(t-1)$

integrando:

$u=\int sen\,t(1-t)\,dt=-\cos t(1-t)-sen\,t$

$v=\int \cos t(t-1)\,dt=(sen\,t)(t-1)+\cos t$

Sustituyendo en la solución particular propuesta:

$y_P=-\left[\cos t(1-t)+sen\,t\right]\cos t+\left[(sen\,t)(t-1)+\cos t\right]sen\,t$

desarrollando y sumando términos semejantes:

$y_P=-\left[\cos^2 t-t\cos^2 t+sen\,t\cos t\right]+sen^2 t(t)-sen^2 t+sen\,t\cos t$

$y_P=-\cos^2 t+t\cos^2 t-sen\,t\cos t+sen^2 t(t)-sen^2 t+sen\,t\cos t$

$y_P=-1+t$

por lo tanto:

$y_G=C_3\cos t+C_4 sen\,t+t-1$

para relacionar las constantes, es decir, para que se satisfaga el sistema de ecuaciones diferenciales, sustituyendo en la ecuación uno:

$x_G'=-C_1 sen\,t+C_2\cos t+1$

$y_G=C_3\cos t+C_4 sen\,t+t-1$

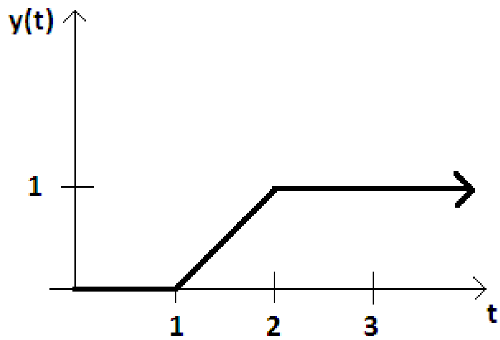
$-C_1\,sen\,t+C_2\cos t+1+C_3\cos t+C_4 sen\,t+t-1=t$

$$sen\,t(-C_1+C_4)+\cos t(C_2+C_3)=0$$
$$-C_1+C_4=0 \qquad C_1=C_4$$
$$C_2+C_3=0 \qquad C_2=-C_3$$

por lo tanto:

$$\boxed{x_G=C_1\cos t+C_2 sen\,t+t+1}$$
$$\boxed{y_G=C_1 sen\,t-C_2\cos t+t-1}$$

4. La función $y(t)$ está representada por



calcular $\mathcal{L}\{y(t)\}$

2 PUNTOS

Resolución

$$f(t)=\begin{cases} 0 & ; \quad 0<t\le 1 \\ t-1 & ; \quad 1<t\le 2 \\ 1 & ; \quad t>2 \end{cases} \qquad y-y_0=-(x-x_0)\ ,\ y-1=1(x-2)\ ,\ y=x-2+1=x-1,\ y(t)=t-1$$

$$f(t)=(t-1)u(t-1)-(t-1)u(t-2)+u(t-2)=(t-1)u(t-1)-(t-2)u(t-2)$$

haciendo la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\mathcal{L}\{(t-1)u(t-1)-(t-2)u(t-2)\}$$

dado que es una transformación lineal:

$$Y(s)=\mathcal{L}\{(t-1)u(t-1)\}-\mathcal{L}\{(t-2)u(t-2)\}$$

$$\boxed{Y(s)=\frac{e^{-s}}{s^2}-\frac{e^{-2s}}{s^2}=\frac{e^{-s}-e^{-2s}}{s^2}=\frac{e^{-s}}{s^2}\left[1-e^{-s}\right]}$$

5. Determinar la solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=u(x,y)-\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$$

considérese una constante de separación positiva.

2 PUNTOS

Resolución

Se propone $u(x,y)=X(x)Y(y)$

por simplicidad se usará: $U=X\,Y$

derivando:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=X\,Y' \quad , \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=X\,Y''$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=X'\,Y$$

sustituyendo en la ecuación diferencial parcial, se tiene:

$$X\,Y''=X\,Y-X'\,Y$$

multiplicando toda la ecuación por $\frac{1}{x}$ se tiene:

$$\frac{x\,y''}{x}=\frac{x\,y}{x}-\frac{x'\,y}{x}$$

$$y''-y=-\frac{x'y}{x}$$

separando variables:

$$y''-y=-\frac{x'\,y}{x}=\alpha^2 \quad ; \quad \alpha^2>0$$

$$\frac{y''-y}{y}=-\frac{x'}{x}=\alpha^2$$

para y:

$$\frac{y''-y}{y}=\alpha^2 \quad , \quad y''-y=\alpha^2 y \quad , \quad y''-y-\alpha^2 y=0$$

$$y''+\left(-1-\alpha^2\right)y=0 \quad , \quad \left[D^2+\left(-1-\alpha^2\right)\right]y=0 \quad \text{E.D.O.L.H.}$$

$$P(m)=0=m^2-1-\alpha^2 \quad , \quad m^2=1+\alpha^2 \quad , \quad m_{1,2}=\pm\sqrt{1+\alpha^2}$$

$$y_H=Ae^{-\sqrt{1+\alpha^2}\,y}+Be^{\sqrt{1+\alpha^2}\,y}$$

para x:

$$-\frac{x'}{x}=\alpha^2 \quad , \quad -x'=\alpha^2 x \quad , \quad -x'-\alpha^2 x=0$$

$$x'+\alpha^2 x=0 \quad , \quad \left(D+\alpha^2\right)x=0 \quad \text{E.D.O.L.H.}$$

$$0=m+\alpha^2 \quad , \quad m=-\alpha^2$$

$$x_H = Ce^{-\alpha^2 x}$$

sustituyendo en la multiplicación se tiene:

$$U = XY \quad \Rightarrow U = Ce^{-\alpha^2 x}\left(Ae^{-\sqrt{1+\alpha^2}\,y} + Be^{\sqrt{1+\alpha^2}\,y}\right)$$

desarrollando:

$$U = AC\,e^{-\alpha^2 x - \sqrt{1+\alpha^2}\,y} + BC\,e^{-\alpha^2 x + \sqrt{1+\alpha^2}\,y}$$

$$U = D\,e^{-\alpha^2 x - \sqrt{1+\alpha^2}\,y} + E\,e^{-\alpha^2 x + \sqrt{1+\alpha^2}\,y}$$