UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN ACADÉMICA DE CIENCIAS APLICADAS
ECUACIONES DIFERENCIALES
SEGUNDO EXAMEN FINAL
RESOLUCIÓN

SEMESTRE 2019-1 **4 DE DICIEMBRE DE 2018**

1. **Encuentre la solución general de la siguiente ecuación diferencial**

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{xy}}$$

Resolución

Se procederá a verificar si la ecuación diferencial es homogénea de grado cero.

$$f(tx, ty) = \frac{yt}{xt + \sqrt{(tx)(ty)}} = \frac{y}{x + \sqrt{xy}} = f(x, y)$$

Se procede a usar un cambio de variable $y = ux$, la cual se sustituye en la ecuación diferencial.

$$y = ux$$

$$\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$$

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{ux}{x + \sqrt{x^2 u}} \Rightarrow u + x\frac{du}{dx} = \frac{ux}{x + x\sqrt{u}} \Rightarrow u + x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1 + \sqrt{u}}$$

$$x\frac{du}{dx} = \frac{u}{1 + \sqrt{u}} - u = \frac{u - u(1 + \sqrt{u})}{1 + \sqrt{u}} = \frac{-u\sqrt{u}}{1 + \sqrt{u}}$$

Resulta una Ecuación Diferencial separable

$$x\frac{du}{dx} = \frac{-u\sqrt{u}}{1 + \sqrt{u}}$$

$$-\frac{1 + \sqrt{u}}{u^{\frac{3}{2}}}du = \frac{1}{x}dx$$

$$-\left(u^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{u}\right) du = \frac{1}{x}dx$$

Integrando ambos lados

$$-\int \left(u^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{u}\right) du = \int \left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$2u^{-\frac{1}{2}} - ln(u) = ln(x) + C$$

$$2u^{-\frac{1}{2}} = ln(xu) + C$$

sutituyendo $u = \frac{y}{x}$ implica

$$\boxed{2\sqrt{\frac{x}{y}} = ln(y) + C}$$

20 puntos

2. **Encuentre la solución general de la siguiente ecuación diferencial**

$$D(xD - I)y = x + xsen(x)$$

Nota: I denota el operador identidad y D el operador derivada.

Resolución

$$D\left(xD - I\right)y = x + xsen\left(x\right)$$

$$D(xDy - y) = x + xsen\left(x\right)$$

Entonces

$$xD^2y + Dy - Dy = x + xsen\left(x\right)$$

$$xD^2y = x + xsen\left(x\right)$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)\left[xD^2y\right] = \left[x + xsen\left(x\right)\right]\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$D^2y = 1 + sen\left(x\right)$$

$$y'' = 1 + sen\left(x\right)$$

Resolvemos por Coeficientes Indeterminados

$$Y_G = Y_H + Y_P$$

Resolviendo la ecuación homogénea asociada.

$$y'' = 0$$

$$\lambda^2 = 0$$

Las raices del polinomio

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

dan lugar a la solución de la ecuación homogénea asociada dada por

$$y_H = c_1 + c_2x$$

Aplicando el anulador

$$D\left(D^2 + 1\right)D^2y = D\left(D^2 + 1\right)\left(1 + sen\left(x\right)\right)$$

$$D\left(D^2 + 1\right)D^2y = 0$$

$$\lambda\left(\lambda^2 + 1\right)\lambda^2 = 0$$

Las raices del polinomio característico $\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = i \\ \lambda_5 = -i \end{cases}$

dan lugar a la solución

$$y_G = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 cos\left(x\right) + c_5 sen\left(x\right)$$

Obtenemos Coeficientes Indeterminados

$$c_3 = \frac{1}{2} \quad ; \quad c_4 = 0 \quad ; \quad c_5 = -1$$

$$y_p = \frac{1}{2}x^2 - sen\left(x\right)$$

Finalmente tenemos:

$$\boxed{y_G = c_1 + c_2 x + \frac{1}{2}x^2 - sen\left(x\right)}$$

20 puntos

---

3. **Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias mediante la Transformada de Laplace**

$$x^{'} - x - y^{'} + y = 0; \quad x(0) = 0$$
$$x^{'} + y^{'} + 2y = 0; \quad y(0) = 1$$

Resolución

$$sX\left(s\right) - 0 - X\left(s\right) - \left(sY\left(s\right) - 1\right) + Y\left(s\right) = 0$$

$$sX\left(s\right) - 0 + sY\left(s\right) - 1 + 2Y\left(s\right) = 0$$

Reescribiendo el sistema se tiene:

$$sX\left(s\right) - X\left(s\right) - sY\left(s\right) + Y\left(s\right) = -1$$

$$sX\left(s\right) + sY\left(s\right) + 2Y\left(s\right) = 1$$

Resolviendo el sistema

$$(s-1)\,X\,(s)+(1-s)\,Y\,(s)=-1$$

$$sX\,(s)+(s+2)\,Y\,(s)=1$$

$$\begin{gathered}(s-1)\,X\,(s)+(-s+1)\,Y\,(s)=-1\\ sX\,(s)+(s+2)\,Y\,(s)=1\end{gathered}$$

$$W_T=\begin{vmatrix} s-1 & 1-s\\ s & s+2\end{vmatrix}=2s^2-2$$

$$W_1=\begin{vmatrix} -1 & 1-s\\ 1 & s+2\end{vmatrix}=-3$$

$$W_2=\begin{vmatrix} s-1 & -1\\ s & 1\end{vmatrix}=2s-1$$

$$X(s)=\frac{-3}{2s^2-2}$$

$$Y(s)=\frac{2s-1}{2s^2-2}$$

Usando fracciones parciales, obtenemos

$$\boxed{\begin{array}{lcl} X\,(s)=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{s+1}\right)-\frac{3}{4}\left(\frac{1}{s-1}\right) & \text{por lo tanto se tiene} & x\,(t)=\frac{3}{4}e^{-t}-\frac{3}{4}e^{t}\\ Y\,(s)=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{s+1}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{s-1}\right) & \text{por lo tanto se tiene} & y\,(t)=\frac{3}{4}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{t}\end{array}}$$

20 puntos

4. **Encuentre la solución de la ecuación diferencial**

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} + 2y = \delta(t-5)$$

que satisface la condición inicial $y(0) = -1 \;\; , \;\; y^{'}(0) = 3$.

Resolución

Aplicando la transformada de Laplace en ambos lados de la igualdad, obtenemos:

$$\begin{aligned} s^2Y(s) + s - 3 + 2(sY(s) + 1) + 2Y(s) &= e^{-5s} \\ \Rightarrow \left(s^2 + 2s + 2\right) Y(s) &= e^{-5s} + 1 - s \\ \Rightarrow Y(s) &= \frac{e^{-5s}}{s^2 + 2s + 2} + \frac{1-s}{s^2 + 2s + 2} \\ \Rightarrow Y(s) &= \frac{e^{-5s}}{(s+1)^2 + 1} + \frac{2-(s+1)}{(s+1)^2 + 1} \end{aligned}$$

Finalmente, al aplicar los teoremas de traslación, se obtiene:

$$\boxed{y = 2e^{-t}sen(t) - e^{-t}cos(t) + e^{5-t}sen(t-5)\, U(t-5)}$$

donde $U()$ denota la función escalón.

20 puntos

---

5. **Resuelva la ecuación diferencial en derivadas parciales**

$$x\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} + y = 0$$

para una constante de separación positiva y que satisfaga la condición en la frontera dada por$y(x,0) = 4x^9$**.**

Resolución:

$$y(x,t) = F(x)\,G(t)$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial t} = F'G'$$

$$xF'G' + FG = 0$$

$$xF'G' = -FG$$

$$\frac{xF'}{F} = -\frac{G}{G'} \qquad -\frac{G}{G'} = \lambda^2$$

$$xF' = \lambda^2 F \qquad \lambda^2 G' + G = 0$$

$$x\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \lambda^2 F \qquad G' + \frac{G}{\lambda^2} = 0$$

$$\int \frac{dF}{F} = \int \frac{\lambda^2}{x}dx \qquad \left[D + \frac{1}{\lambda^2}\right]G = 0$$

$$lnF = \lambda^2 ln(x) + c \qquad m = -\frac{1}{\lambda^2}$$

$$c = ln(k)^{\lambda^2} \qquad G = C_1 e^{-\frac{1}{\lambda^2}t}$$

$$lnF = ln(kx)^{\lambda^2}$$

$$F = kx^{\lambda^2}$$

$$y(x,t) = kx^{\lambda^2} \cdot C_1 e^{-\frac{1}{\lambda^2}t}$$

$$y(x,t) = Ax^{\lambda^2} e^{-\frac{1}{\lambda^2}t}$$

Sustituyendo:

$$y(x,0) = 4x^9$$

$$y(x,0) = Ax^{\lambda^2} = 4x^9$$

Por lo tanto

$$A = 4 \qquad \lambda^2 = 9$$

$$\boxed{y(x,t) = 4x^9 e^{-\frac{t}{9}}}$$

20puntos