UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
PRIMER EXAMEN FINAL
ECUACIONES DIFERENCIALES

Semestre: 2009 – 1 ***TIPO "A"***

1 de diciembre de 2008

INSTRUCCIONES: Lea cuidadosamente los enunciados de los 7 reactivos que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2.5 horas**.

---

1) Resuelva la ecuación diferencial

$$x\,y^3\,dy - \left(2y^4 + x^4\right)dx = 0$$

15 PUNTOS

---

2) Obtenga la solución general de la ecuación diferencial

$$y''' + y' = \sec\theta\tan\theta$$

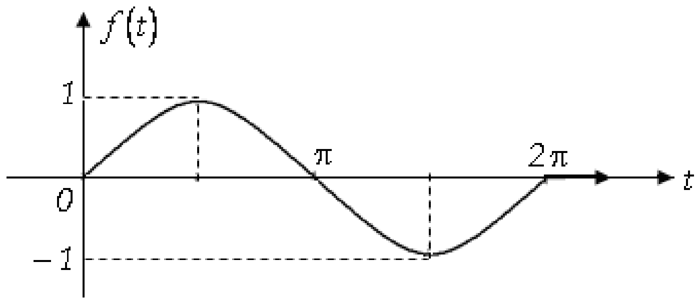
15 PUNTOS

---

3) Obtenga la corriente $I(t)$ que circula en un circuito LC serie, modelado mediante el problema de valores iniciales

$$I(t)'' + 4I(t) = f(t) \quad ; \quad I(0) = 1 \quad ; \quad I'(0) = 3$$

donde la gráfica de $f(t)$ es



15 PUNTOS

4) Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales

$$D^2 x + 2y = 0$$
$$Dx + (D - 1)y = 0$$

15 PUNTOS

---

5) Resuelva la ecuación integral de Volterra

$$f(t) = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t f(\tau)\, e^{t-\tau}\, d\tau$$

15 PUNTOS

---

6) Resuelva la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad ; \quad a \in \mathbb{R}$$

para una constante de separación positiva.

10 PUNTOS

---

7) Obtenga la serie trigonométrica de Fourier de la función

$$f(x) = |x| + 1 \quad ; \quad -2 \le x \le 2$$

15 PUNTOS

0

$>$

ECUACIONES DIFERENCIALES
PRIMER EXAMEN FINAL
SEMESTRE 2009-1
PROFRA:ING JACQUELYN MARTÍNEZ ALAVEZ

15 DE JUNIO 2012

$>$ *restart*

1) Resuelva la ecuacion diferencial

$>$ *Ecuacion* := x·y(x)··3·diff(y(x), x) − (2·y(x)··4 + x··4) = 0

$$Ecuacion := x\, y(x)^3 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x)\right) - 2\, y(x)^4 - x^4 = 0 \quad \textbf{(1)}$$

RESPUESTA 1)

$>$ *restart*

$>$ *Ecuacion* := x·y(x)··3·diff(y(x), x) − (2·y(x)··4 + x··4) = 0

$$Ecuacion := x\, y(x)^3 \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, y(x)\right) - 2\, y(x)^4 - x^4 = 0 \quad \textbf{(2)}$$

$>$ *with(DEtools)* :

$>$ *odeadvisor(Ecuacion)*

$$[[\_homogeneous, class\ A], \_rational, \_Bernoulli] \quad \textbf{(3)}$$

$>$ *EcuacionSeparable* := eval(subs(y(x) = u(x)·x, Ecuacion))

$$EcuacionSeparable := x^4\, u(x)^3 \left(\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, u(x)\right) x + u(x)\right) - 2\, u(x)^4\, x^4 - x^4 = 0 \quad \textbf{(4)}$$

$>$ *EcuacionSeparada* := simplify(isolate(EcuacionSeparable, diff(u(x), x)));

$$EcuacionSeparada := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, u(x) = \frac{u(x)^4 + 1}{x\, u(x)^3} \quad \textbf{(5)}$$

$>$

$>$ *odeadvisor(EcuacionSeparada)*

$$[\_separable] \quad \textbf{(6)}$$

$>$

$>$ $P(u) := u^4 + 1;\ S(u) := u^3;\ Q(x) := 1;\ R(x) := x;$

$$P(u) := u^4 + 1$$
$$S(u) := u^3$$
$$Q(x) := 1$$
$$R(x) := x \quad \textbf{(7)}$$

$>$ $SolucionIntermedia := int\left(\frac{S(u)}{P(u)}, u\right) - int\left(\frac{Q(x)}{R(x)}, x\right) = C1$

$$SolucionIntermedia := \frac{1}{4}\ln\left(u^4 + 1\right) - \ln(x) = C1 \quad \textbf{(8)}$$

$>$ $SolucionFinal := subs\left(u = \frac{y}{x}, SolucionIntermedia\right)$

$$SolucionFinal := \frac{1}{4}\ln\left(\frac{y^4}{x^4} + 1\right) - \ln(x) = C1 \quad \textbf{(9)}$$

FIN DE RESPUESTA 1

> $restart$

2) Obtenga la solucion general de la ecuacion diferencial

> $Ecuacion := diff(y(x), x\$3) + diff(y(x), x) = \sec(x)\tan(x)$

$$Ecuacion := \frac{d^3}{dx^3}\, y(x) + \frac{d}{dx}\, y(x) = \sec(x)\, \tan(x) \qquad \textbf{(10)}$$

RESPUESTA 2

> $Q(x) := (\sec(x) \cdot \tan(x))$

$$Q(x) := \sec(x)\, \tan(x) \qquad \textbf{(11)}$$

> $Ecuacion := diff(y(x), x\$3) + diff(y(x), x) = Q(x)$

$$Ecuacion := \frac{d^3}{dx^3}\, y(x) + \frac{d}{dx}\, y(x) = \sec(x)\, \tan(x) \qquad \textbf{(12)}$$

> $EcuacionHomogenea := lhs(Ecuacion) = 0$

$$EcuacionHomogenea := \frac{d^3}{dx^3}\, y(x) + \frac{d}{dx}\, y(x) = 0 \qquad \textbf{(13)}$$

> $EcuacionCaracteristica := m \cdot \cdot 3 + m = 0;$

$$EcuacionCaracteristica := m^3 + m = 0 \qquad \textbf{(14)}$$

> $Raiz := solve(EcuacionCaracteristica)$

$$Raiz := 0, \mathrm{I}, -\mathrm{I} \qquad \textbf{(15)}$$

> $Sol_1 := y(x) = \exp(Raiz_1 \cdot x); Sol_2 := y(x) = cosx; Sol_3 := y(x) = sinx$

$$Sol_1 := y(x) = 1$$

$$Sol_2 := y(x) = cosx$$

$$Sol_3 := y(x) = sinx \qquad \textbf{(16)}$$

> $SolucionHomogenea := y(x) = C1 \cdot rhs(Sol_1) + C2 \cdot rhs(Sol_2) + C3 \cdot rhs(Sol_3)$

$$SolucionHomogenea := y(x) = C1 + C2\ cosx + C3\ sinx \qquad \textbf{(17)}$$

> $Solucion_1 := y(x) = 1; Solucion_2 := y(x) = \cos(x); Solucion_3 := y(x) = \sin(x)$

$$Solucion_1 := y(x) = 1$$

$$Solucion_2 := y(x) = \cos(x)$$

$$Solucion_3 := y(x) = \sin(x) \qquad \textbf{(18)}$$

> $with(linalg):$

> $WW := wronskian([rhs(Solucion_1), rhs(Solucion_2), rhs(Solucion_3)], x)$

$$WW := \begin{bmatrix} 1 & \cos(x) & \sin(x) \\ 0 & -\sin(x) & \cos(x) \\ 0 & -\cos(x) & -\sin(x) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(19)}$$

> $BB := array([0, 0, Q(x)])$

$$BB := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sec(x)\, \tan(x) \end{bmatrix} \qquad \textbf{(20)}$$

> $SOL := simplify(linsolve(WW, BB)) : SOL_1; SOL_2; SOL_3;$

$$\frac{\sin(x)}{\cos(x)^2}$$

$$-\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$-\frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} \quad (21)$$

> $A(t) := int(SOL_1, x) + C1; B(t) := int(SOL_2, x) + C2; C(t) := int(SOL_3, x) + C3$

$$A(t) := \frac{1}{\cos(x)} + C1$$

$$B(t) := \ln(\cos(x)) + C2$$

$$C(t) := -\tan(x) + x + C3 \quad (22)$$

> $SolucionGeneral := y(x) = (A(t) \cdot rhs(Solucion_1) + B(t) \cdot rhs(Solucion_2) + C(t) \cdot rhs(Solucion_3))$

$$SolucionGeneral := y(x) = \frac{1}{\cos(x)} + C1 + (\ln(\cos(x)) + C2)\cos(x) + (-\tan(x) + x + C3)\sin(x) \quad (23)$$

> $SolucionGeneralSimplificada := y(x) = simplify(A(t) \cdot rhs(Solucion_1) + B(t) \cdot rhs(Solucion_2) + C(t) \cdot rhs(Solucion_3))$

$$SolucionGeneralSimplificada := y(x) = C1 + \cos(x)\ln(\cos(x)) + \cos(x)\,C2 + \cos(x) + \sin(x)\,x + \sin(x)\,C3 \quad (24)$$

FIN DE RESPUESTA 2

> *restart*

3) Obtenga la corriente S(t) que circula en un circuito LC en serie, modelado mediante el problema de valores iniciales

> $Ecuacion := diff(s(t), t\$2) + 4 \cdot diff(s(t), t) = \sin(t) - \mathrm{Heaviside}(t - 2 \cdot \mathrm{Pi})\sin(t)$

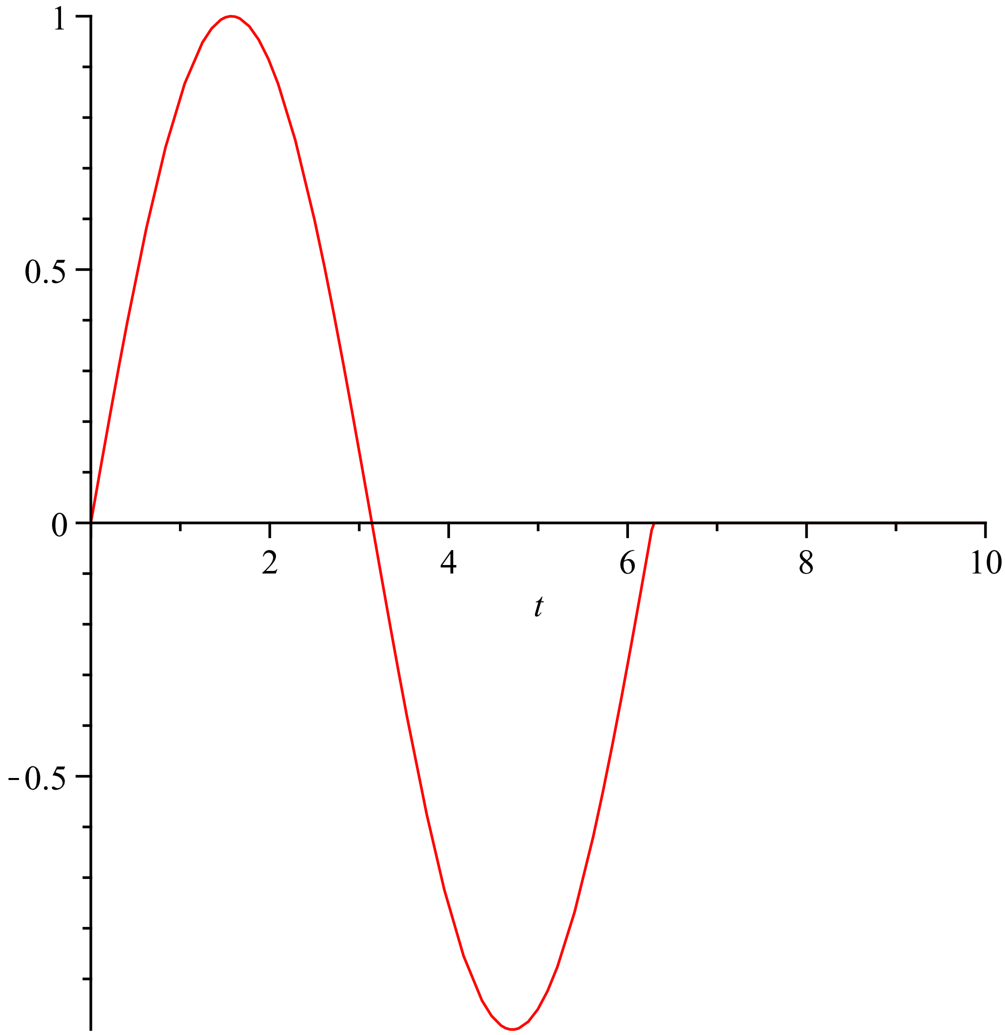
$$Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2} s(t) + 4\left(\frac{d}{dt} s(t)\right) = \sin(t) - \mathrm{Heaviside}(t - 2\pi)\sin(t) \quad (25)$$

> $Condiciones := s(0) = 1, \mathrm{D}(s)(0) = 3$

$$Condiciones := s(0) = 1, \mathrm{D}(s)(0) = 3 \quad (26)$$

donde la grafica de f(t) es

> $plot(rhs(Ecuacion), t = 0..10)$



RESPUESTA 3

> *restart*

> *with*(*inttrans*)

[*addtable*, *fourier*, *fouriercos*, *fouriersin*, *hankel*, *hilbert*, *invfourier*, *invhilbert*, *invlaplace*, *invmellin*, *laplace*, *mellin*, *savetable*] **(27)**

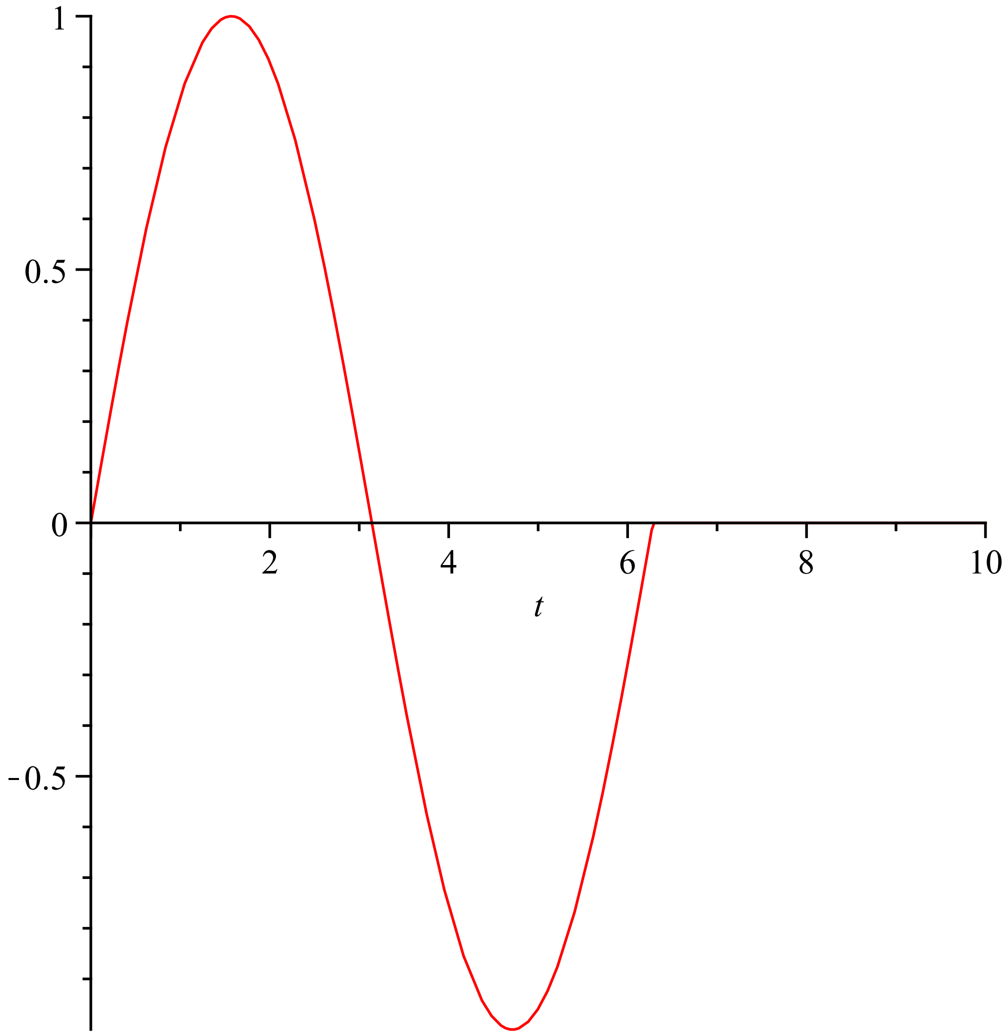
> *Ecuacion* := *diff*(*s*(*t*), *t*\$2) + 4· *diff*(*s*(*t*), *t*) = sin(*t*) − Heaviside(*t* − 2·Pi)sin(*t*)

$$Ecuacion := \frac{d^2}{dt^2}\, s(t) + 4\left(\frac{d}{dt}\, s(t)\right) = \sin(t) - \mathrm{Heaviside}(t - 2\pi)\, \sin(t) \quad \textbf{(28)}$$

> *Condiciones* := *s*(0) = 1, D(*s*)(0) = 3

$$Condiciones := s(0) = 1, \mathrm{D}(s)(0) = 3 \quad \textbf{(29)}$$

> *plot*(*rhs*(*Ecuacion*), *t* = 0 ..10)



> $TransLapEcuacion := subs(Condiciones, laplace(Ecuacion, t, s))$

$$TransLapEcuacion := s^2\, laplace(s(t), t, s) - 7 - s + 4\, s\, laplace(s(t), t, s) = \frac{1 - e^{-2 s \pi}}{s^2 + 1} \quad \textbf{(30)}$$

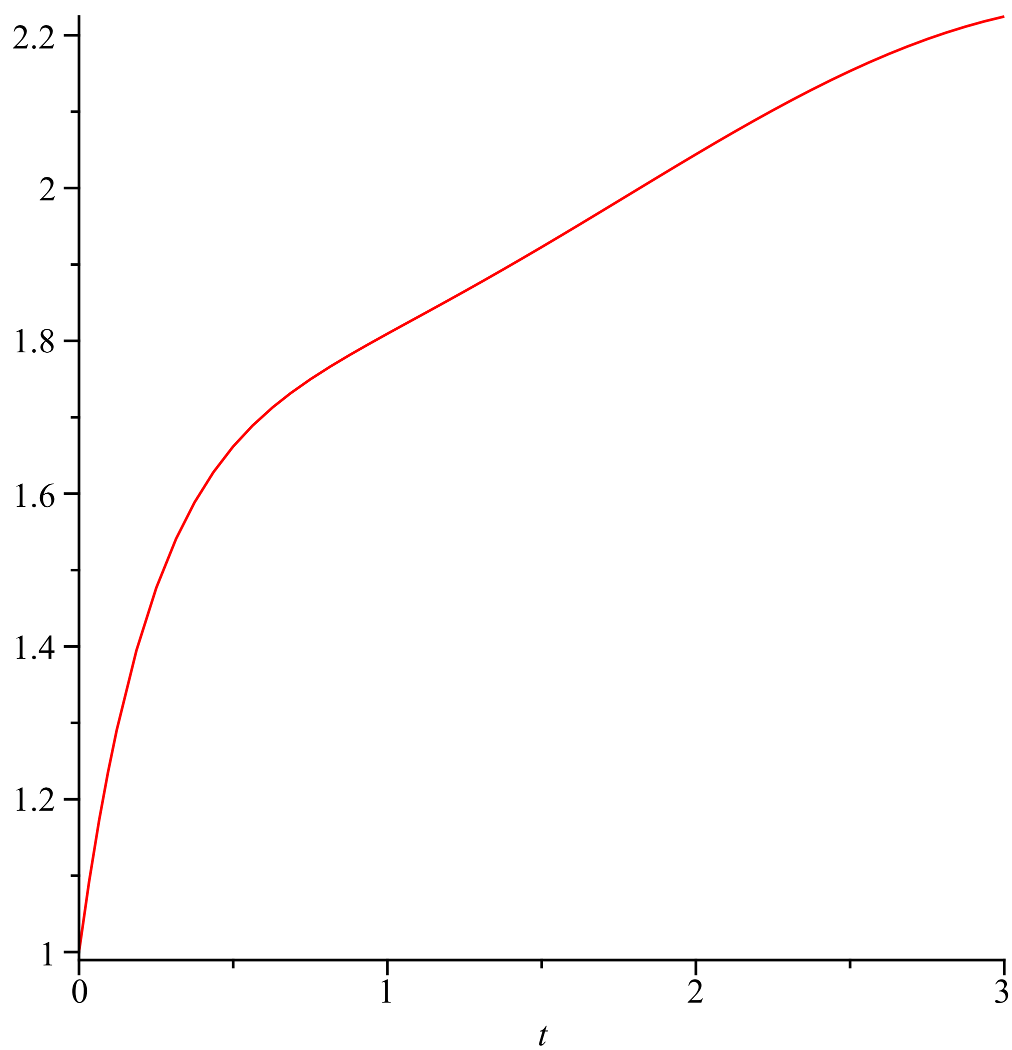
> $TransLapSolucion := simplify(isolate(TransLapEcuacion, laplace(s(t), t, s)))$

$$TransLapSolucion := laplace(s(t), t, s) = -\frac{-8 + e^{-2 s \pi} - 7 s^2 - s^3 - s}{(s^2 + 1)\, s\, (s + 4)} \quad \textbf{(31)}$$

> $SolucionParticular := invlaplace(TransLapSolucion, s, t)$

$$SolucionParticular := s(t) = 2 - \frac{13}{17}\, e^{-4 t} - \frac{1}{17}\, \mathrm{Heaviside}(-t + 2\pi)\, (4 \cos(t) + \sin(t)) - \frac{1}{68}\, \mathrm{Heaviside}(t - 2\pi)\, \left(17 - e^{-4 t + 8\pi}\right) \quad \textbf{(32)}$$

> $plot(rhs(SolucionParticular), t = 0 ..3)$



>

FIN DE RESPUESTA 3

4)Resuelva el sistema de ecuaciones diferenciales

> *Sistema* := diff(x(t), t\$2) + 2·y(t) = 0, diff(x(t), t) + diff(y(t), t) − y(t) = 0 : *Sistema*$_1$; *Sistema*$_2$;

$$\frac{d^2}{dt^2}\,x(t) + 2\,y(t) = 0$$

$$\frac{d}{dt}\,x(t) + \frac{d}{dt}\,y(t) - y(t) = 0 \qquad \textbf{(33)}$$

RESPUESTA 4

> *restart*

> *Sistema* := diff(x(t), t\$2) + 2·y(t) = 0, diff(x(t), t) + diff(y(t), t) − y(t) = 0 : *Sistema*$_1$; *Sistema*$_2$;

$$\frac{d^2}{dt^2}\,x(t) + 2\,y(t) = 0$$

(34)

$$\frac{d}{dt} x(t) + \frac{d}{dt} y(t) - y(t) = 0 \quad (34)$$

> *Solucion* := *dsolve*({*Sistema*}) : *Solucion*$_1$; *Solucion*$_2$;

$$x(t) = \_C1 + \_C2\, e^{2t} + \_C3\, e^{-t}$$

$$y(t) = -2\, \_C2\, e^{2t} - \frac{1}{2}\, \_C3\, e^{-t} \quad (35)$$

FIN DE RESPUESTA 4

5)Resuelva la ecuación integral de Volterra

> *Ecuacion* := $y(t) = 3\cdot t\cdot\cdot 2 - \exp(-t) - int(y(\text{tau})\exp(t - \text{tau}), \text{tau} = 0..t)$

$$Ecuacion := y(t) = 3\, t^2 - e^{-t} - \left(\int_0^t y(\tau)\, e^{t-\tau}\, d\tau \right) \quad (36)$$

RESPUESTA 5

> *restart*

> *Ecuacion* := $y(t) = 3\cdot t\cdot\cdot 2 - \exp(-t) - int(y(\text{tau})\exp(t - \text{tau}), \text{tau} = 0..t)$

$$Ecuacion := y(t) = 3\, t^2 - e^{-t} - \left(\int_0^t y(\tau)\, e^{t-\tau}\, d\tau \right) \quad (37)$$

> *with*(*inttrans*)

[*addtable, fourier, fouriercos, fouriersin, hankel, hilbert, invfourier, invhilbert, invlaplace, invmellin, laplace, mellin, savetable*] (38)

> *TransLapEcuacion* := *laplace*(*Ecuacion*, *t*, *s*)

$$TransLapEcuacion := laplace(y(t), t, s) = \frac{6}{s^3} - \frac{1}{1+s} - \frac{laplace(y(t), t, s)}{s-1} \quad (39)$$

> *TransLapSolucion* := *simplify*(*isolate*(*TransLapEcuacion*, *laplace*(*y*(*t*), *t*, *s*)))

$$TransLapSolucion := laplace(y(t), t, s) = -\frac{(-6 - 6\, s + s^3)\,(s-1)}{s^4\,(1+s)} \quad (40)$$

> *SolucionParticular* := *invlaplace*(*TransLapSolucion*, *s*, *t*)

$$SolucionParticular := y(t) = -t^3 + 1 - 2\, e^{-t} + 3\, t^2 \quad (41)$$

FIN DE RESPUESTA 5

6)Resuelva la ecuacion diferencial en derivadas parciales

> *Ecuacion* := *a*·*diff*(*u*(*x*, *y*), *x*\$2) = *diff*(*u*(*x*, *y*), *y*)

$$Ecuacion := a \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \quad (42)$$

donde a es número real , para una constante de separación positiva.

RESPUESTA 6

> *restart*

> *Ecuacion* := *a*·*diff*(*u*(*x*, *y*), *x*\$2) = *diff*(*u*(*x*, *y*), *y*)

$$Ecuacion := a \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) \quad (43)$$

> *EcuacionSeparable* := *simplify*(*eval*(*subs*(*u*(*x*, *y*) = *F*(*x*)·*G*(*y*), *Ecuacion*)))

(44)

$$EcuacionSeparable := a\left(\frac{d^2}{dx^2}F(x)\right)G(y) = F(x)\left(\frac{d}{dy}G(y)\right) \quad (44)$$

> $EcuacionSeparada := \left(\frac{lhs(EcuacionSeparable)}{G(y)}\right)\cdot\left(\frac{1}{F(x)}\right) = \left(\frac{rhs(EcuacionSeparable)}{F(x)}\right)\cdot\left(\frac{1}{G(y)}\right)$

$$EcuacionSeparada := \frac{a\left(\frac{d^2}{dx^2}F(x)\right)}{F(x)} = \frac{\frac{d}{dy}G(y)}{G(y)} \quad (45)$$

> $EcuacionEnX := lhs(EcuacionSeparada) = \text{alpha}; EcuacionEnY := rhs(EcuacionSeparada) = \text{alpha}$

$$EcuacionEnX := \frac{a\left(\frac{d^2}{dx^2}F(x)\right)}{F(x)} = \alpha$$

$$EcuacionEnY := \frac{\frac{d}{dy}G(y)}{G(y)} = \alpha \quad (46)$$

> $SolucionEnX := dsolve(EcuacionEnX)$

$$SolucionEnX := F(x) = \_C1\, e^{\frac{\sqrt{\alpha}\, x}{\sqrt{a}}} + \_C2\, e^{-\frac{\sqrt{\alpha}\, x}{\sqrt{a}}} \quad (47)$$

> $SolucionEnX := dsolve(subs(\text{alpha} = k\cdot k, EcuacionEnX))$

$$SolucionEnX := F(x) = \_C1\, e^{\frac{k x}{\sqrt{a}}} + \_C2\, e^{-\frac{k x}{\sqrt{a}}} \quad (48)$$

> $SolucionEnY := dsolve(EcuacionEnY)$

$$SolucionEnY := G(y) = \_C1\, e^{\alpha y} \quad (49)$$

> $SolucionEnY := dsolve(subs(\text{alpha} = k\cdot k, EcuacionEnY))$

$$SolucionEnY := G(y) = \_C1\, e^{k^2 y} \quad (50)$$

> $SolucionGeneral := u(x, y) = simplify(rhs(SolucionEnX)\cdot rhs(SolucionEnY))$

$$SolucionGeneral := u(x, y) = \left(\_C1\, e^{\frac{k x}{\sqrt{a}}} + \_C2\, e^{-\frac{k x}{\sqrt{a}}}\right)\_C1\, e^{k^2 y} \quad (51)$$

FIN DE RESPUESTA 6

7) Obtenga la serie trigonométrica de Fourier de la función

> $f := \text{abs}(x) + 1$

$$f := |x| + 1 \quad (52)$$

$-2 \leq x \leq 2$

RESPUESTA 7

> *restart*

> $f := \text{abs}(x) + 1$

$$f := |x| + 1 \quad (53)$$

>

> $L := 2$

$$L := 2 \tag{54}$$

> $a_0 := \left(\frac{1}{L}\right) \cdot int(f, x = -L..L)$

$$a_0 := 4 \tag{55}$$

> $C := \frac{a_0}{2}$

$$C := 2 \tag{56}$$

> $a_n := simplify\left(subs\left(\sin(n \cdot \mathrm{Pi}) = 0, \cos(n \cdot \mathrm{Pi}) = (-1) \cdot \cdot n, \left(\frac{1}{L}\right) \cdot int\left(f \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi} \cdot x}{L}\right), x = -L ..L\right)\right)\right)$

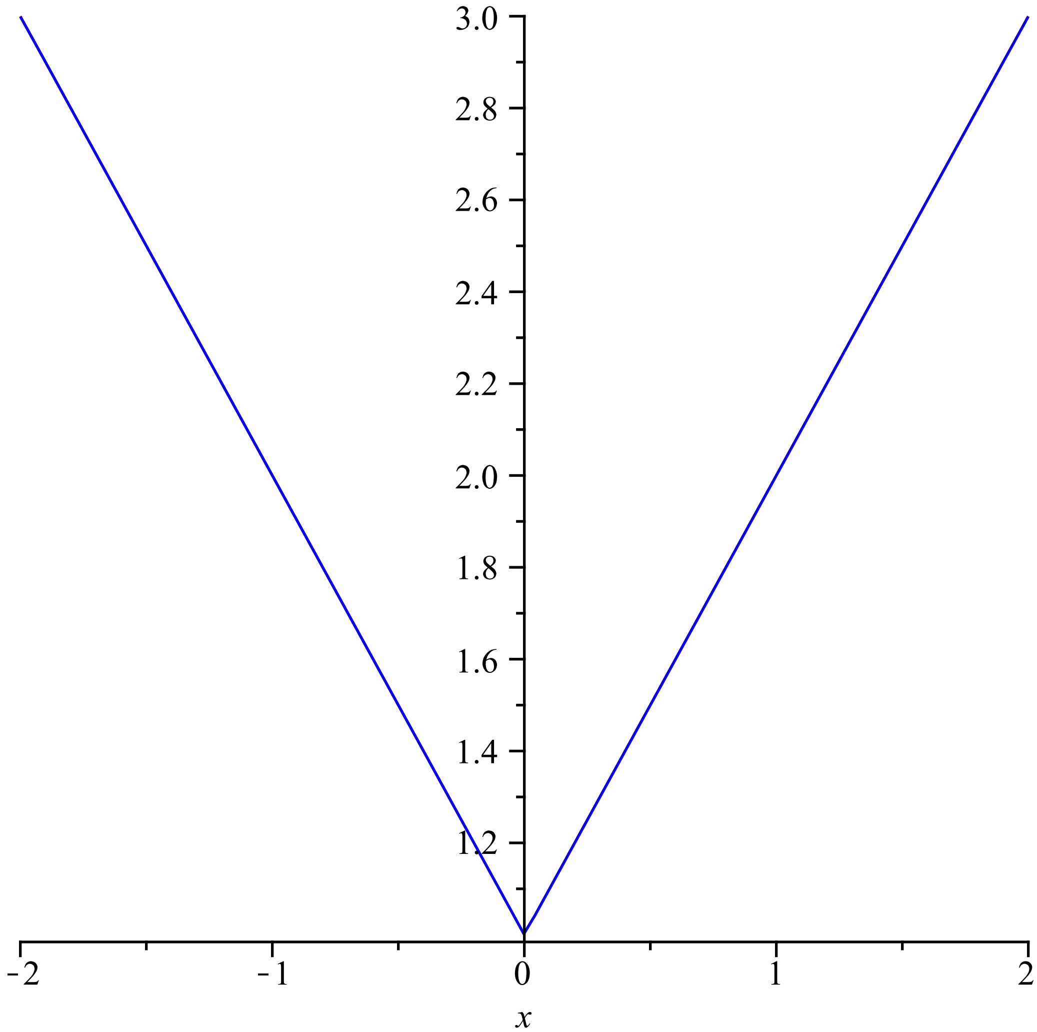
$$a_n := \frac{4\,(-1 + (-1)^n)}{n^2 \pi^2} \tag{57}$$

> $b_n := \left(\frac{1}{L}\right) \cdot int\left(f \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi} \cdot x}{L}\right), x = -L..L\right)$

$$b_n := 0 \tag{58}$$

> $STF_{500} := C + sum\left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \mathrm{Pi} \cdot x}{L}\right), n = 1..500\right) :$

> $plot([f, STF_{500}], x = -L..L, color = [red, blue])$



>

FIN DE RESPUESTA 7

> *restart*

FIN DEL EXAMEN

>