UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

ECUACIONES DIFERENCIALES
PRIMER EXAMEN FINAL
TIPO "A"

Semestre: 2012 –1
05 de diciembre de 2011

Nombre del alumno:

INSTRUCCIONES: Lea cuidadosamente los enunciados de los 7 reactivos que componen el examen antes de empezar a resolverlos. La duración máxima del examen es de **2.5 horas**.

1) Resuelva la ecuación diferencial

$$\left(y^4 + x^4\right) dx + \left(2y^3x\right) dy = 0$$

15 PUNTOS

2) Resuelva la ecuación diferencial

$$D\left(xD - 1\right) y = x^{-2}$$

15 PUNTOS

3) Resuelva la ecuación diferencial

$$3y'' - 24y' + 48y = 3e^{4x}$$

15 PUNTOS

4) Resuelva el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} x' &= -5x - y \\ y' &= 4x - y \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} x(0) &= 1 \\ y(1) &= 1 \end{aligned}$$

15 PUNTOS

5) Resuelva el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dt} = -3y + e^{-t+3}u(t-3) \quad ; \quad y(0) = 4$$

15 PUNTOS

6) Obtener

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s-2e^{-s}}{s^2+4s+12}\right\}$$

10 PUNTOS

7) Resuelva la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

para una constante de separación negativa

15 PUNTOS

ECUACIONES DIFERENCIALES
PRIMER EXAMEN FINAL
SEMESTRE 2012-1 TIPO A
PROFR: ING. ROBERTO HERNÁNDEZ VARGAS

Problema Núm 1.

> *restart*

> $Ecuacion := 2 \cdot x \cdot \cdot 3 \cdot y(x) + (x \cdot \cdot 4 + y(x) \cdot \cdot 4) \cdot diff(y(x), x) = 0$

$$Ecuacion := 2\, x^3\, y(x) + \left(x^4 + y(x)^4\right) \left(\frac{d}{dx}\, y(x)\right) = 0 \qquad \textbf{(1)}$$

> *with(DEtools)* :

> *odeadvisor(Ecuacion)*

[[_homogeneous, class A], _rational, _dAlembert] **(2)**

> $EcuacionDespejada := isolate(Ecuacion, diff(y(x), x))$

$$EcuacionDespejada := \frac{d}{dx}\, y(x) = -\frac{2\, x^3\, y(x)}{x^4 + y(x)^4} \qquad \textbf{(3)}$$

> $EcuacionSeparable := eval(subs(y(x) = u(x) \cdot x, EcuacionDespejada))$

$$EcuacionSeparable := \left(\frac{d}{dx}\, u(x)\right) x + u(x) = -\frac{2\, x^4\, u(x)}{x^4 + u(x)^4\, x^4} \qquad \textbf{(4)}$$

> $\mathrm{EcuacionSimplificada} := simplify(EcuacionSeparable)$

$$EcuacionSimplificada := \left(\frac{d}{dx}\, u(x)\right) x + u(x) = -\frac{2\, u(x)}{1 + u(x)^4} \qquad \textbf{(5)}$$

> $EcuacionSeparada := isolate(EcuacionSimplificada, diff(u(x), x))$

$$EcuacionSeparada := \frac{d}{dx}\, u(x) = \frac{-\frac{2\, u(x)}{1 + u(x)^4} - u(x)}{x} \qquad \textbf{(6)}$$

> $\mathrm{P}(\mathrm{u}) := simplify\left(-\frac{2\, u}{1 + u^4} - u\right)$

$$P(u) := -\frac{u\left(3 + u^4\right)}{1 + u^4} \qquad \textbf{(7)}$$

> $R(x) := x$

$$R(x) := x \qquad \textbf{(8)}$$

> $SolucionIntermedia := int\left(\frac{1}{P(u)}, u\right) = int\left(\frac{1}{R(x)}, x\right) + C1$

$$SolucionIntermedia := -\frac{1}{3}\ln(u) - \frac{1}{6}\ln\left(3 + u^4\right) = \ln(x) + C1 \qquad \textbf{(9)}$$

> $SolucionFinal := simplify\left(subs\left(u = \frac{y}{x}, SolucionIntermedia\right)\right)$

$$SolucionFinal := -\frac{1}{3}\ln\left(\frac{y}{x}\right) - \frac{1}{6}\ln\left(\frac{3\, x^4 + y^4}{x^4}\right) = \ln(x) + C1 \qquad \textbf{(10)}$$

> $SolFin2 := simplify(-6 \cdot lhs(SolucionFinal)) = simplify(-6 \cdot rhs(SolucionFinal))$

(11)

$$SolFin2 := 2\ln\left(\frac{y}{x}\right) + \ln\left(\frac{3x^4+y^4}{x^4}\right) = -6\ln(x) - 6\,C1 \tag{11}$$

> $SolFin3 := simplify(\exp(lhs(SolFin2))) = simplify(\exp(rhs(SolFin2)))$

$$SolFin3 := \frac{y^2\,(3x^4+y^4)}{x^6} = \frac{e^{-6\,C1}}{x^6} \tag{12}$$

> $SolFin4 := simplify(x\cdot\cdot 6\cdot lhs(SolFin3)) = simplify(x\cdot\cdot 6\cdot rhs(SolFin3))$

$$SolFin4 := y^2\,(3x^4+y^4) = e^{-6\,C1} \tag{13}$$

> $SolFin5 := lhs(SolFin4) = C2$

$$SolFin5 := y^2\,(3x^4+y^4) = C2 \tag{14}$$

>

Problema Núm 2.

> $restart$

> $Ecuacion := diff(y(x), x\$2) = \frac{1}{x\cdot\cdot 2}$

$$Ecuacion := \frac{d^2}{dx^2}\,y(x) = \frac{1}{x^2} \tag{15}$$

> $with(DEtools):$

> $odeadvisor(Ecuacion)$

$$[[\_2nd\_order, \_quadrature]] \tag{16}$$

>

Primero la resolveremos con dsolve de manera inmediata:

> $SolucionFinal1 := dsolve(Ecuacion)$

$$SolucionFinal1 := y(x) = -\ln(x) + \_C1\,x + \_C2 \tag{17}$$

>

Problema Núm 3.

> $restart$

> $Ecuacion := 2\cdot diff(y(x), x\$2) - 12\cdot diff(y(x), x) + 18\cdot y(x) = 2\cdot\exp(3\cdot x)$

$$Ecuacion := 2\left(\frac{d^2}{dx^2}\,y(x)\right) - 12\left(\frac{d}{dx}\,y(x)\right) + 18\,y(x) = 2\,e^{3x} \tag{18}$$

> $with(DEtools):$

> $odeadvisor(Ecuacion)$

$$[[\_2nd\_order, \_with\_linear\_symmetries]] \tag{19}$$

>

Primero la resolveremos con dsolve de manera inmediata:

> $SolucionFinal1 := dsolve(Ecuacion)$

$$SolucionFinal1 := y(x) = e^{3x}\,\_C2 + e^{3x}\,x\,\_C1 + \frac{1}{2}\,x^2\,e^{3x} \tag{20}$$

>

Problema Núm 4.

> *restart*

>

Sistemas de ecuaciopnes diferenciales

> $Sistema := diff(x_1(t), t) = -5 \cdot x_1(t) - x_2(t), diff(x_2(t), t) = 4 \cdot x_1(t) - x_2(t) : Sistema_1;$
$Sistema_2;$

$$\frac{d}{dt} x_1(t) = -5\, x_1(t) - x_2(t)$$

$$\frac{d}{dt} x_2(t) = 4\, x_1(t) - x_2(t) \tag{21}$$

>

> $Condiciones := x_1(1) = 0, x_2(1) = 1 : Condiciones_1; Condiciones_2;$

$$x_1(1) = 0$$

$$x_2(1) = 1 \tag{22}$$

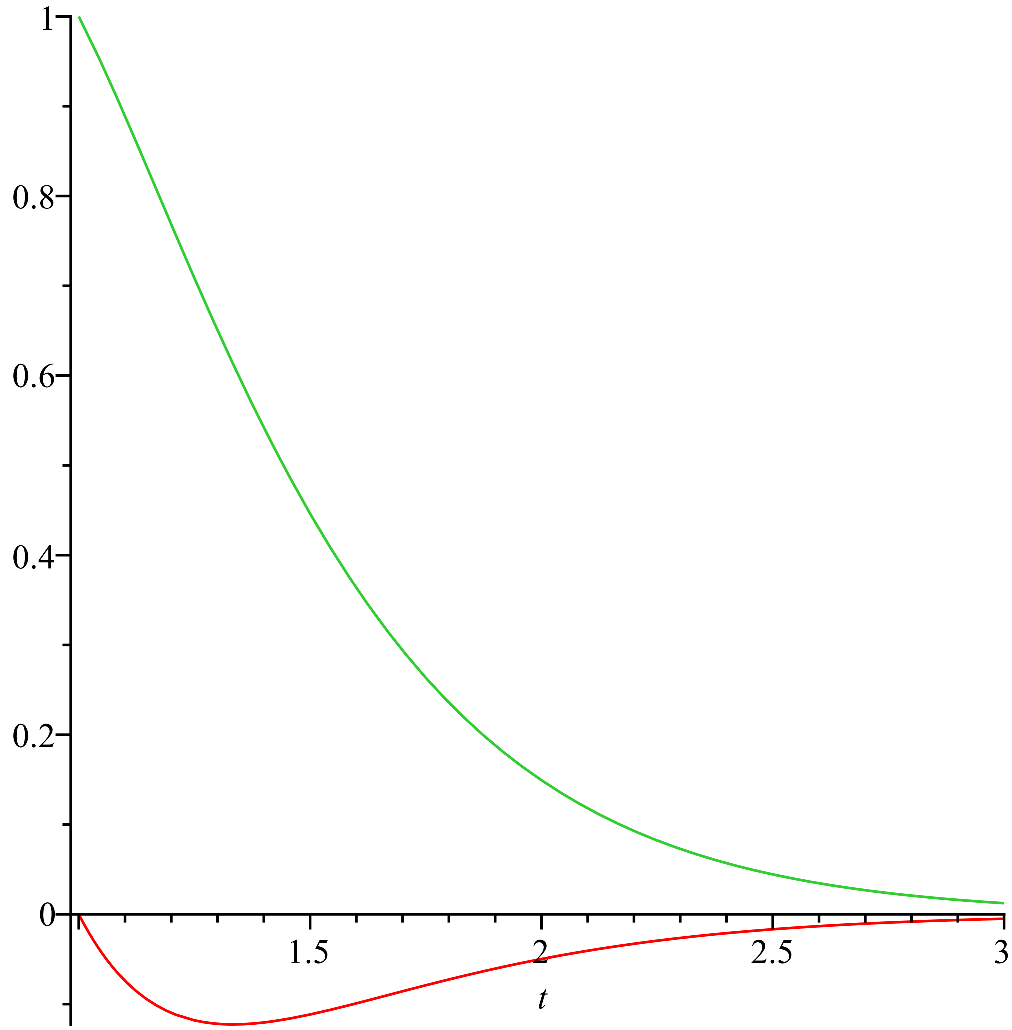
Primero la resolveremos con dsolve de manera inmediata:

> $SolucionCondInic := dsolve(\{Sistema, Condiciones\}) : SolucionCondInic_1;$
$SolucionCondInic_2;$

$$x_1(t) = e^{-3t}\left(\frac{1}{e^{-3}} - \frac{t}{e^{-3}}\right)$$

$$x_2(t) = -e^{-3t}\left(\frac{1}{e^{-3}} - \frac{2\,t}{e^{-3}}\right) \tag{23}$$

> $plot([rhs(SolucionCondInic_1), rhs(SolucionCondInic_2)], t = 1 ..3)$



Problema Núm 5.

> *restart*

> $Ecuacion := diff(y(t), t) = -2 \cdot y(t) + \exp(-t+2) \cdot \text{Heaviside}(t-2)$

$$Ecuacion := \frac{d}{dt}\, y(t) = -2\, y(t) + e^{-t+2}\, \text{Heaviside}(t-2) \tag{24}$$

> $with(DEtools)$:

> $odeadvisor(Ecuacion)$

$$[[\_linear, class\ A]] \tag{25}$$

> $Condiciones := y(0) = 3$

$$Condiciones := y(0) = 3 \tag{26}$$

Primero la resolveremos con dsolve de manera inmediata:

> $SolucionFinal1 := dsolve(\{Ecuacion, Condiciones\})$

$$SolucionFinal1 := y(t) = \left(\text{Heaviside}(t-2)\, e^{t+2} - \text{Heaviside}(t-2)\, e^{4} + 3\right) e^{-2\,t} \tag{27}$$

>

Problema Núm 6

.

> *restart*

> $EcuacionEnDominioS := laplace(y(t), t, s) = \frac{s - 3\ \cdot \exp(-s)}{s \cdot \cdot 2 + 6 \cdot s + 16}$

$$EcuacionEnDominioS := laplace(y(t), t, s) = \frac{s - 3\, e^{-s}}{s^2 + 6\, s + 16} \quad \textbf{(28)}$$

> *with*(*inttrans*) :

> $TransInvLapSolucion := invlaplace(EcuacionEnDominioS, s, t)$

$$TransInvLapSolucion := y(t) = -\frac{3}{7}\ \mathrm{Heaviside}(t-1)\ \sqrt{7}\ e^{-3\,t+3} \sin\left(\sqrt{7}\ (t-1)\right) + \frac{1}{7}\ \left(7 \cos\left(\sqrt{7}\ t\right) - 3\sqrt{7}\ \sin\left(\sqrt{7}\ t\right)\right) e^{-3\,t} \quad \textbf{(29)}$$

>

Problema Núm 7

.

> *restart*

> $Ecuacion := diff(u(x, t), x\$2) - u(x, t) - diff(u(x, t), t) = 0$

$$Ecuacion := \frac{\partial^2}{\partial x^2}\ u(x, t) - u(x, t) - \left(\frac{\partial}{\partial t}\ u(x, t)\right) = 0 \quad \textbf{(30)}$$

> *with*(*PDEtools*) :

> $Solucion := pdsolve(Ecuacion)$

$$Solucion := (u(x, t) = \_F1(x)\ \_F2(t))\ \&\text{where}\ \left[\left\{\frac{d^2}{dx^2}\ \_F1(x) = \_c_1\ \_F1(x),\ \frac{d}{dt}\ \_F2(t) = \_c_1\ \_F2(t) - \_F2(t)\right\}\right] \quad \textbf{(31)}$$

> $SolucionFinal := build(\%)$

$$SolucionFinal := u(x, t) = \frac{e^{\sqrt{\_c_1}\ x}\ \_C3\ e^{t\ \_c_1}\ \_C1}{e^{t}} + \frac{\_C3\ e^{t\ \_c_1}\ \_C2}{e^{\sqrt{\_c_1}\ x}\ e^{t}} \quad \textbf{(32)}$$

>

Que es correcta de acuerdo con la solucion del departamento de ecuaciones diferenciales.