Cuestionario Previo

Práctica: Aplicación de las Ecuaciones diferenciales en circuitos eléctricos.

1.- Define los siguientes conceptos:

a) Resistencia

b) Capacitancia

c) Inductancia

d) Circuito eléctrico

2.- Como se define un circuito en serie y un circuito en paralelo

3.- Dibuje un ejemplo de ambas configuraciones de la pregunta anterior

4.- ¿Qué es y para qué sirve un osciloscopio?

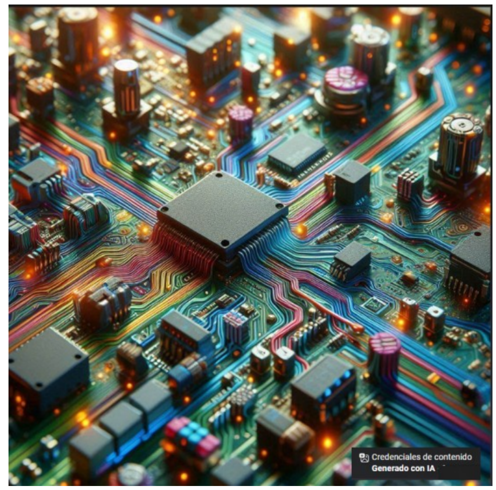
5.- ¿Qué es y para qué sirve un multímetro?

6. - Dibuje la interconexión y partes de una protoboard

7. Escribe la forma general de una ecuación diferencial de primer orden y una de segunda orden de coeficientes constantes no homogénea.

Coordinación de Ciencias Aplicadas

Departamento de Ecuaciones Diferenciales



Práctica: Aplicación de las Ecuaciones diferenciales

en circuitos eléctricos.

Realizada por los profesores:

M.I. Adriana Yoloxóchil Jiménez Rodríguez

M.I. Yukihiro Minami Koyama

Dra. Evelyn Salazar Guerrero

Contenido

Objetivos

El alumno:

1 Observar en el osciloscopio la respuesta de una ecuación diferencial de primer orden aplicada a un circuito eléctrico.

2 Verificar experimentalmente el valor de la resistencia que se necesita para que un circuito RLC en serie sea críticamente amortiguado, y además corroborar el rango de valores que aquél puede tener para que el sistema tenga una respuesta subamortiguada o sobreamortiguada.

Introducción

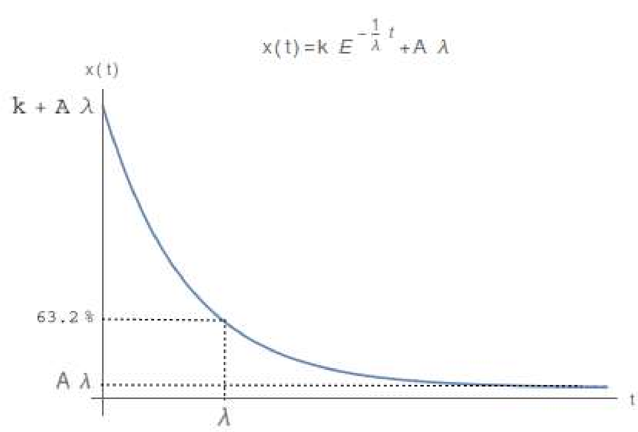
El modelo matemático de un sistema de primer orden es una ecuación diferencial que puede escribirse como:

$$\frac{d\,x(t)}{d\,t}+\frac{1}{\lambda}x(t)=A$$

considerando a A un valor constante, cuya respuesta estará dada por:

$$x(t)=ke^{-\frac{1}{\lambda}t}+A\lambda$$

donde λ es una constante, que determinará el tiempo en el cuál se alcanza el 63.2% de valor final ($A\lambda$) considerando su valor inicial en $k+A\lambda$. Como se puede apreciar en la gráfica.



Para un sistema de segundo orden la ecuación diferencial puede escribirse como:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\xi\omega_0 \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \omega_0^2 f(t)$$

en la cual al parámetro ξ se le denomina factor de amortiguamiento, y al parámetro ω_0 se le conoce como frecuencia angular natural de oscilación. La función $f(t)$ es la entrada o función de excitación del sistema y $x(t)$ es la salida o respuesta del mismo.

La ecuación característica que corresponde al modelo matemático anterior es:

$$s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2 = 0$$

y cuyas raíces son los valores característicos:

$$s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}\ .$$

Dependiendo del valor de ξ, dichos valores pueden ser reales, imaginarios o complejos, dando los siguientes comportamientos en la respuesta del sistema:

si $\xi = 0$, entonces $s_{1,2} = \pm j\omega_0$ (valores imaginarios), y el sistema será no amortiguado (caso teórico ideal);

si $0 < \xi < 1$, entonces $s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ (valores complejos conjugados), y el sistema será subamortiguado;

si $\xi = 1$, entonces $s_{1,2} = -\xi\omega_0$ (valores reales negativos iguales), y el sistema será críticamente amortiguado;

finalmente, si $\xi > 1$, entonces $s_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm \omega_0\sqrt{\xi^2 - 1}$ (valores reales negativos diferentes), y el sistema será sobreamortiguado.

Es importante el análisis cualitativo de los diferentes tipos de sistemas de segundo orden, de manera de poder reconocerlos a partir de la gráfica de su respuesta.

Para el caso particular de los sistemas de segundo orden subamortiguados, presentan varios parámetros de interés en su respuesta, como lo son la frecuencia de oscilación (f), su inverso el periodo (T) de oscilación, el sobrepaso (Sp), el tiempo de sobrepaso (tp), el tiempo de levantamiento (tl) y el tiempo de asentamiento (ta).

1 Frecuencia de oscilación, f, es el número de oscilaciones que tiene la respuesta del sistema por unidad de tiempo:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \text{donde} \quad \omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}\ .$$

2 Periodo de oscilación, T, es el tiempo que transcurre en una oscilación completa de la respuesta del sistema:

$$T = \frac{1}{f}\,.$$

En la Figura 1 se ilustran los parámetros mencionados anteriormente.

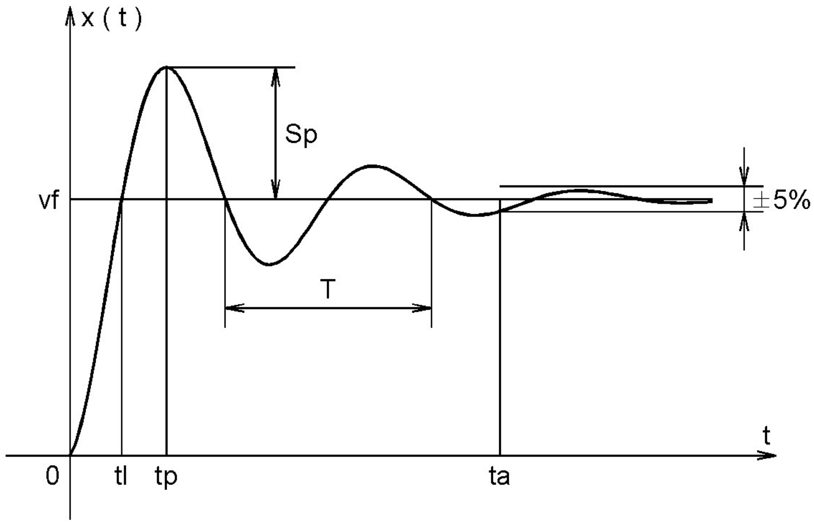


Figura 1 Parámetros de la respuesta de un sistema subamortiguado.

En el diseño de circuitos se presenta con frecuencia el problema de la obtención de los valores de los dispositivos eléctricos, en este caso del resistor, del inductor y del condensador, de tal forma que, dada la configuración del sistema, se obtenga una salida determinada.

Dado que las cantidades ξ y ω_0 quedan en función de los valores de los dispositivos que conforman al circuito, es posible calcular los valores de estos últimos si se establece que la respuesta del sistema es críticamente amortiguada, o bien, se conocen otros parámetros de diseño, como el periodo para el caso de la respuesta subamortiguada.

Material

Un osciloscopio	resistores de 68, 820 y 1800 Ω
un generador de funciones	un inductor (50 mH aprox.)
una fuente de poder	un condensador de 0.22 µF
un multímetro	una tableta de experimentación (protoboard).

Desarrollo

Medición de la inductancia

Conecte al inductor las terminales del generador de funciones, con una señal cuadrada de 5 V pico y con una frecuencia de 200 Hz.

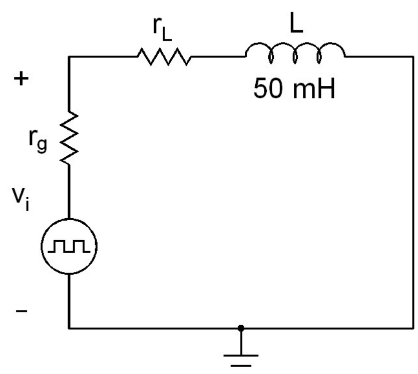


Figura 2 Circuito RL en serie.

La ecuación diferencial que modela el comportamiento del circuito es:

$$\frac{d\,i_L(t)}{d\,t}+\frac{R}{L}\,i_L(t)=\frac{V_i(t)}{L}$$

Verifique con el osciloscopio la señal de voltaje de dicho inductor, y con apoyo del profesor observe la variación del 63.2% , dicho valor es la constante de tiempo del circuito RL, la cual debe ser igual a:

$$\tau=\frac{L}{R}$$

Dado que se conoce R, el cual es la suma de las resistencias internas del generador de funciones y del inductor, es posible determinar el valor de la inductancia L.

Circuito RLC serie, respuesta transitoria

Arme el circuito mostrado en la Figura 3 con un resistor con un valor de resistencia de

R = 68 Ω. Note que las resistencias r_g y r_L

son las resistencias internas del generador de funciones y del inductor, respectivamente.

Aplique una señal cuadrada con una amplitud de 5 V pico y una frecuencia de 200 Hz.

Observe en el osciloscopio la señal de salida del circuito, v_C, y verifique el tipo de sistema al que corresponda (subamortiguado, sobreamortiguado, críticamente amortiguado).

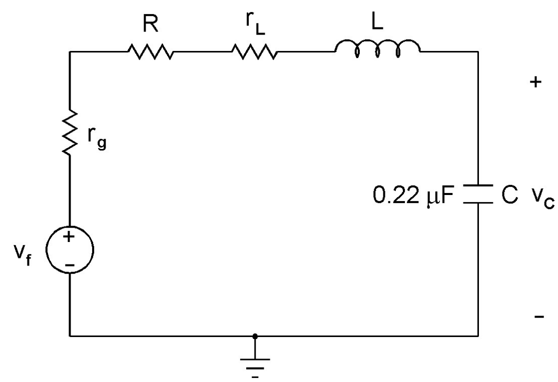


Figura 3 Circuito RLC en serie.

La ecuación diferencial que modela el comportamiento del circuito es:

$$\frac{d^2 V_c(t)}{d t^2}+\frac{R}{L}\frac{d V_c(t)}{d t}+\frac{1}{LC}V_c(t)=\frac{V_f(t)}{LC}$$

Posteriormente cambie el resistor por uno que tenga una resistencia de R = 820 Ω, y de igual manera verifique el tipo de sistema al que corresponde su respuesta.

Finalmente realice la misma operación, pero para un resistor con una resistencia de R = 1.8 kΩ.

Para el circuito cuya respuesta corresponda a un sistema subamortiguado, mida el periodo del transitorio, T, el tiempo de sobrepaso y tp, el tiempo de levantamiento.

Experimento

1) Resuelva la ecuación diferencial que modela el comportamiento del circuito RL de la figura 2, considerando que Vi=5 V, la solución queda en término de i_L, obtenga la expresión del voltaje del inductor si se sabe que:

$$V_L(t)=L\frac{d\, i_L(t)}{d\, t}$$

Dibuje la gráfica de V_L que obtuvo en el osciloscopio.

2) Escriba la ecuación diferencial que modela al sistema eléctrico de la Figura 3, para los valores teóricos de R utilizados, obtenga la solución de dicha ecuación, considere la Vf como constante igual a 5. Indique para cuales el circuito tiene las respuestas:

1 subamortiguada, con $\xi = 0.2$;

2 críticamente amortiguada;

3 sobreamortiguada, con $\xi = 2$.

3) Para el caso del circuito con respuesta subamortiguada, obtenga el valor teórico del periodo del transitorio (T) y compárelo con el valor medido experimentalmente. Haga los comentarios que considere pertinentes.

Conclusiones

Bibliografía.

Dorf, Svoboda, Circuitos eléctricos, Quinta edición, Alfaomega, México, 2003.

Desoer, Kuh, Basic Circuit Theory, McGraw-Hill, EUA, 1969.

Ogata, Dinámica de Sistemas, Prentice Hall Hispanoamericana, México, 1987.

Minami Yukihiro. Prácticas 8 y 9 del laboratorio de Análisis de Circuitos, DIMEI octubre de 2010.

Propuesta de conexión del circuito RLC en la tarjeta protoboard