Cinemática de la partícula, movimiento curvilíneo

Introducción

En este documento se estudiará el movimiento de partículas (cuerpos cuyas dimensiones no son tomadas en cuenta para su estudio) que siguen una trayectoria curvilínea, sin tomar en cuenta las causas que originaron dicho movimiento.

El estudio de estos movimientos se enfocará en curvas planas (dos dimensiones).

Se recomienda tener a la mano una calculadora, así como lápiz y papel para realizar los ejemplos y comprobar sus resultados.

Trayectoria curvilínea

Una trayectoria es línea imaginaria que describe la partícula y puede ser rectilínea como se muestra en las siguientes figuras.

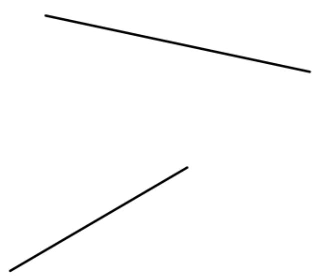


Figura 1

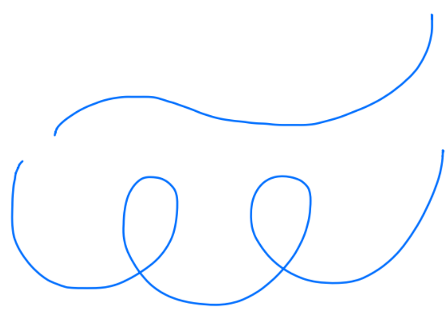


Figura 2

El estudio del movimiento curvilíneo lo haremos:

1. Utilizando componentes cartesianas
2. Utilizando componentes intrínsecas

Componentes cartesianas

Estas componentes han sido utilizadas a lo largo de muchas asignaturas tales como trigonometría, geometría analítica, álgebra vectorial, etc.

Al escuchar el nombre de cartesianas nos viene a la mente una imagen como la siguiente:

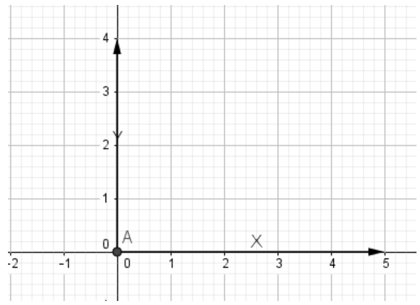


Figura 3

Esta imagen también nos recuerda los vectores[1] que tienen las mismas direcciones que los ejes como se muestra en la siguiente tabla:

Nombre del eje	Vector unitario en dirección del eje
x	$\boldsymbol{i}$
y	$\boldsymbol{j}$

Vectores que tienen magnitud 1

Con base en estos vectores unitarios, un vector se puede expresar de la siguiente forma:

$$\bar{A} = A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j}$$

Posición

Un vector de <u>posición</u> (que sirve para determinar el lugar de un punto) $\bar{r}$, se escribe como:

$$\bar{r} = r_x\boldsymbol{i} + r_y\boldsymbol{j}$$

Ejemplos:

Ubicado a 3 unidades del origen hacia el sentido positivo del eje x y a 8 unidades del origen hacia el sentido negativo del eje y

Vector de posición[2]	Interpretación
$3\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j}$	Posición constante en ambos ejes
$4\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j}$	Posición en el eje x constante, posición en el eje y variable (depende del tiempo t)
$\cos(t)\,\boldsymbol{i} + \mathrm{sen}(\mathrm{t})\mathbf{j}$	Posición variable en ambos ejes (ambos dependen del tiempo t)

[1] Cantidades físicas con dos características: magnitud y dirección, representadas comúnmente gráficamente como una flecha.

[2] Vector dirigido del origen a la posición de un punto o partícula.

En el primer caso se trata de una posición instantánea o de una partícula estática.

Para el segundo y tercer caso se observa claramente que la posición depende del tiempo.

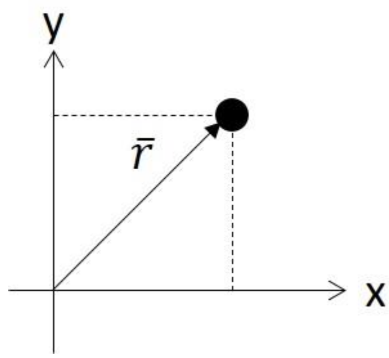


Figura 4 (vector de posición)

Velocidad

La velocidad v se define como:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt}$$

Y separando según las componentes del vector posición:

$$\bar{v} = \frac{dr_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dr_y}{dt}\boldsymbol{j} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j}$$

Con base en los ejemplos de vectores de posición, los vectores de velocidad son:

Vector de posición	Vector velocidad	Interpretación
$3\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j}$	0	Velocidad nula
$4\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j}$	$2j$	Velocidad cero en el eje x y velocidad constante de 2 en el eje y
$\cos(t)\,\boldsymbol{i} + \mathrm{sen(t)}\mathbf{j}$	$-\mathrm{sen}(t)\,\boldsymbol{i} + cos(\mathrm{t})\mathbf{j}$	Velocidad variable en los dos ejes

Aceleración

La aceleración se define como:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$$

Que al separar por componentes queda como sigue:

$$\bar{a} = \frac{dv_x}{dt}\boldsymbol{i} + \frac{dv_y}{dt}\boldsymbol{j} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j}$$

Así, la tabla de ejemplos donde se muestra la posición, velocidad y aceleración es:

Vector de posición	Vector velocidad	Vector aceleración
$3\boldsymbol{i} - 8\boldsymbol{j}$	0	---
$4\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j}$	$2j$	0
$\cos(t)\,\boldsymbol{i} + \mathrm{sen}(\mathrm{t})\mathbf{j}$	$-\mathrm{sen}(t)\,\boldsymbol{i} + cos(\mathrm{t})\mathbf{j}$	$-\cos(t)\,\boldsymbol{i} - sen(\mathrm{t})\mathbf{j}$

Ejemplo:

Durante unas pruebas de vuelo, un dron (vehículo aéreo no tripulado) sigue una trayectoria predeterminada en un plano horizontal a cierta altura, cuyas coordenadas en metros son:

$$x = -8t^2$$

$$y = \frac{1}{4}t^3$$

Determine las ecuaciones que describan la velocidad y la aceleración del dron en todo instante.

$$v_x = \frac{d(-8t^2)}{dt} = -16\,t \qquad a_x = \frac{d(-16\,t)}{dt} = -16$$

$$v_x = \frac{d\left(\frac{1}{4}t^3\right)}{dt} = \frac{3}{4}t^2 \qquad a_x = \frac{d\left(\frac{3}{4}t^2\right)}{dt} = \frac{6}{4}t = \frac{3}{2}t$$

Y en forma vectorial:

$$\boxed{\begin{array}{c} \bar{v} = -16t\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{12}t^2\boldsymbol{j} \quad {}^{m}/_{s} \\ \bar{a} = -16\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{4}t\,\boldsymbol{j} \quad {}^{m}/_{s^2} \end{array}}$$

Con las expresiones anteriores se puede determinar la rapidez y la magnitud de la aceleración del dron en cualquier instante.

Componentes intrínsecas

Para el estudio de movimientos curvilíneos también se tiene la opción de proponer un sistema de referencia cuyos ejes partan de la misma partícula por lo que cambian conforme se mueve la partícula.

Las componentes intrínsecas pueden entenderse con base en que la velocidad siempre es un vector tangente a la curva, por lo que al proponer que uno de los ejes sea siempre tangente a la curva, la velocidad sólo tendrá componente en esa dirección.

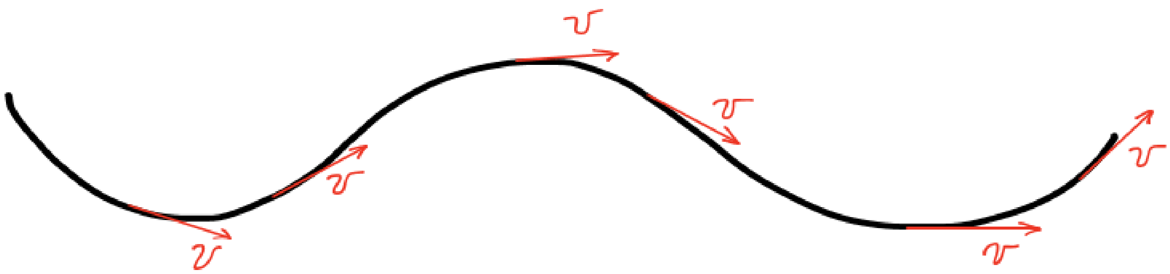


Figura 5

En la Figura 5 se observa que el vector velocidad siempre tiene una dirección tangente[3] a la curva. Esa será la dirección del eje llamado EJE TANGENCIAL y se denotará con la letra t minúscula, además si dibujamos un eje perpendicular al eje tangencial t, este eje pasaría por el centro de la curva en todo momento como se muestra en la Figura 6. Ambos ejes tienen como origen la posición de la partícula P, pero podríamos dudar si el eje perpendicular al eje tangencial entra a la curva o sale de la curva.

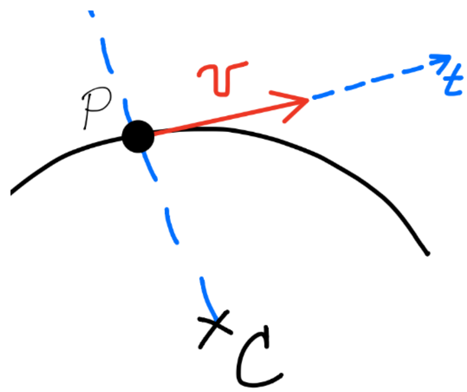


Figura 6

Así como el vector $\boldsymbol{i}$ es el vector unitario en dirección del eje x (componentes cartesianas) en este caso llamaremos e_t al vector unitario en dirección del eje tangencial.

Cuando la partícula P se mueve sobre la trayectoria curva el vector unitario e_t, cambiará de dirección. En la Figura 7 se observa que cuando la partícula se ha desplazado sobre la trayectoria curva los ejes tangenciales en cada posición han cambiado, y ambos ejes tangenciales tienen un eje perpendicular.

[3] La representación geométrica de la derivada $\left(v = \frac{dr}{dt}\right)$ es la pendiente de la recta TANGENTE a la gráfica, en este caso la gráfica está representada como la trayectoria de la partícula

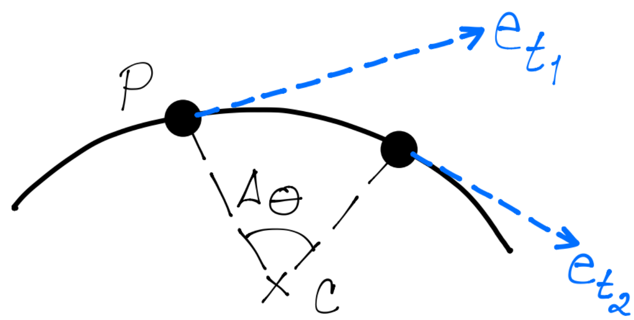


Figura 7

Existe otra palabra para denotar perpendicularidad entre vectores, y esa palabra es NORMAL, por lo que llamaremos a los ejes:

EJE NORMAL y EJE TANGENCIAL

El eje tangencial siempre es tangente a la curva y el eje normal siempre se dirige al centro de la curva.

Velocidad

Un vector se puede expresar como la multiplicación de un escalar (magnitud del vector) por un vector unitario en dirección del vector.

Para el caso de las componentes intrínsecas el vector velocidad se puede expresar como:

$$\bar{v} = v\boldsymbol{e_t}$$

La expresión anterior contiene como magnitud a la rapidez y sólo tiene componente en el eje tangencial.

Aceleración

Para poder obtener la expresión de la aceleración, realizaremos la derivada del vector velocidad así:

$$\bar{a} = \frac{d(\bar{v})}{dt} = \frac{d(v\boldsymbol{e_t})}{dt}$$

Lo que observamos de la ecuación anterior es que se trata de la derivada de un producto.

Al aplicar la derivada se obtiene:

$$\bar{a} = v\frac{d(\boldsymbol{e_t})}{dt} + \frac{d(v)}{dt}\ \boldsymbol{e_t} = v\ \frac{d(\boldsymbol{e_t})}{dt} + a_t\ \boldsymbol{e_t}$$

Es preciso aclarar que la letra v se refiere únicamente a la magnitud de la velocidad, es decir a la rapidez.

Componente tangencial

Se puede observar en la expresión anterior que la aceleración TOTAL de la partícula está formada por dos componentes, una de ellas la llamamos aceleración tangencial.

$$\bar{a_t} = \frac{d(v)}{dt}\ \boldsymbol{e_t} = \ a_t\ \boldsymbol{e_t}$$

Un vector, como ya sabemos, tiene magnitud y dirección, y cuando nos referimos a la variación de la velocidad, la velocidad puede variar tanto en magnitud como en dirección.

La aceleración, entonces, se puede expresar como la suma de dos componentes:

$$\bar{a} = \overline{a_n} + \bar{a_t}$$

Componente normal

El primer sumando que se obtiene de la derivada de la velocidad es:

$$v\ \frac{d(\boldsymbol{e_t})}{dt}$$

De la cual podríamos intuir que se trata de la componente normal de la aceleración, pero podemos deducirlo como sigue.

Con base en la figura 7, se han extraído los vectores unitarios e_{t1} y e_{t2} obteniéndose así $d(e_t)$ y $d\theta$. Recordando también que el eje normal se dirige hacia el centro de la curva, observemos la figura 8.

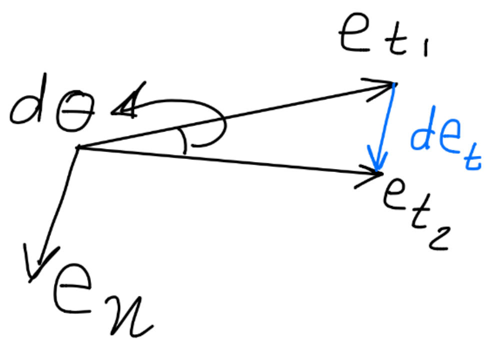


Figura 8

Como sabemos e_{t1} y e_{t2} son vectores cuya magnitud es 1 y $d(e_t)$ es un arco muy pequeño que se puede calcular como: $d(e_t) = (1)d\theta$[4] (en magnitud), y la dirección es la que lleva el vector normal e_n. Expresándolo como:

$$d(\boldsymbol{e_t}) = d\theta\ \boldsymbol{e_n}$$

Así que

$$v\frac{d(\boldsymbol{e_t})}{dt} = v\frac{d\theta\ \boldsymbol{e_n}}{dt} = v\frac{d\theta}{dt}\ \boldsymbol{e_n}$$

Si multiplicamos la expresión anterior por un factor 1, conveniente $\left(\frac{ds}{ds}\right)$, obtenemos:

$$v\frac{d\theta}{dt}\frac{ds}{ds}\boldsymbol{e_n} = v\ \frac{d\theta}{ds}\ \frac{ds}{dt}\boldsymbol{e_n}$$

De la expresión anterior observamos que la dirección es en el eje normal y la magnitud es:

$$v\ \frac{d\theta}{ds}\ \frac{ds}{dt}$$

Además, si el radio con el que se trazó la curva en ese instante lo denominamos ρ , entonces

$ds = \rho\ d\theta$, es decir:

---

[4] El arco de circunferencia se calcula como $s = r\theta$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$

Analizando cada uno de los términos de la magnitud:

$$v \underbrace{\frac{d\theta}{ds}}_{\frac{1}{\rho}} \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{\text{rapidez } v}$$

Finalmente se obtiene que la componente normal de la aceleración es:

$$\overline{a_n} = \frac{v^2}{\rho}\ \boldsymbol{e_n}$$

En la siguiente tabla se pueden observar las características de las componentes intrínsecas de la aceleración de una partícula con movimiento curvilíneo.

Componente	Magnitud	Dirección
a_t	$\frac{dv}{dt}$	e_t (tangente a la curva)
a_n	$\frac{v^2}{\rho}$	e_n (hacia el centro de la curva)

De la tabla se observa que la componente tangencial dependerá de la razón de cambio en la rapidez y la componente normal depende del radio de curvatura y el eje normal, por lo que depende de la variación en la dirección de la velocidad.

Variación de la velocidad	Componente de la aceleración
Magnitud	Aceleración tangencial
Dirección	Aceleración normal

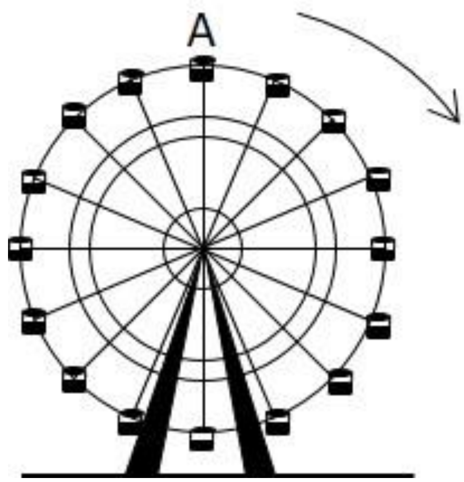
Y en forma vectorial, la aceleración total:

$$\bar{a} = \overline{a_t} + \overline{a_n}$$

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt} e_t + \frac{v^2}{\rho} e_n$$

Ejemplo:

La rueda de la fortuna de la figura gira en el sentido de las manecillas del reloj de tal forma que la rapidez se incrementa 1 m/s cada segundo para cambiar de posición y permitir que suban y bajen usuarios. Si la distancia desde el centro de la rueda de la fortuna hasta cada una de las canastillas es de 20 m, determine las componentes intrínsecas de la aceleración de la canastilla A que ha alcanzado una rapidez de 2 m/s. Determine también el vector aceleración total de la canastilla.



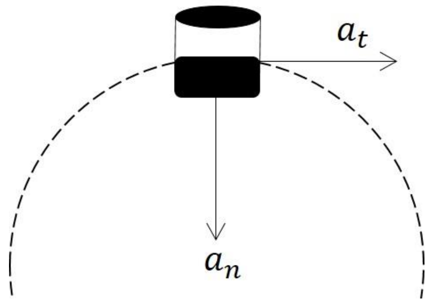
Resolución:

Clasificación del movimiento.- lo que trata el problema es de la cinemática del movimiento curvilíneo de una partícula, pues la trayectoria es la de una circunferencia y no es necesario tomar en cuenta las dimensiones de la canastilla ni interesan las causas que lo originaron.

Sabemos que las dos componentes intrínsecas son:

Aceleración normal
Aceleración tangencial

Nos podemos auxiliar de un diagrama donde se muestren las aceleraciones de la canastilla sobre la trayectoria de la misma, donde la aceleración tangencial es tangente a la curva y la aceleración normal se dirige hacia el centro de la curva.



La aceleración normal es debido a que la velocidad cambia de dirección, lo cual en este caso es evidente dada la trayectoria circular.

La aceleración tangencial es debido a que la velocidad cambia de magnitud, lo cual también existe en este problema y que por los datos se sabe que la rapidez se incrementa 1 m/s cada segundo por lo que:

$$a_t = 1\, {}^{m}/_{s^2}$$

Por otro lado la aceleración normal que depende del cambio en la dirección, se puede obtener utilizando:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

La rapidez en el instante de estudio es de 2 ${}^{m}/_{s}$ y el radio de curvatura para cualquier canastilla es la distancia entre el centro y la misma canastilla, es decir, 20 m.

De esta manera la aceleración normal se calcula:

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$
$$a_n = \frac{(2)^2}{20}$$
$$a_n = 0.2\, {}^{m}/_{s^2}$$

Para obtener el vector aceleración es necesario calcular la magnitud y la dirección de la aceleración total.

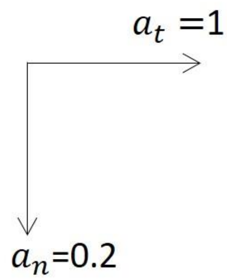
La magnitud de un vector con componentes cartesianas se calcula como:

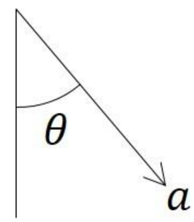
$$|\bar{A}| = \sqrt[2]{A_x^2 + A_y^2}$$

Y la dirección del vector, como el ángulo que forma el vector con el eje x, se puede obtener como:

$$\theta = angtan\left(\frac{A_y}{A_x}\right)$$

Si aceleración de la canastilla se puede dibujar a partir de sus componentes o como una magnitud y una dirección, como se muestra:





De esta manera la magnitud de la aceleración total es:

$$|a| = \sqrt[2]{a_n^2 + a_t^2}$$
$$|a| = \sqrt[2]{(0.2)^2 + (1)^2}$$
$$|a| = 1.02\ {}^{m}/_{s^2}$$

Y la dirección respecto a un eje vertical como se mostró en la figura anterior es:

$$\theta = angtan\left(\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}\right)$$
$$\theta = angtan\left(\frac{a_t}{a_n}\right) = angtan\left(\frac{1}{0.2}\right)$$
$$\theta = 78.7° \quad \searrow$$