CINEMÁTICA DE LA PARTÍCULA

Movimiento rectilíneo

Como su nombre lo indica, este movimiento es el que tiene lugar cuando una partícula se desplaza a lo largo de un trayecto recto.

Describiremos tres casos para el movimiento rectilíneo: a) el rectilíneo uniforme, b) el rectilíneo uniformemente acelerado y c) el movimiento rectilíneo con aceleración variable.

Movimiento rectilíneo uniforme

El primer caso consiste en que la partícula no tiene aceleración. Y por lo tanto su velocidad es constante y queda definida completamente por la siguiente ecuación:

$$\frac{dx}{dt} = v = constante$$

Para encontrar la posición final de la partícula en un tiempo t se multiplica por dt para despejar la diferencial dx. Esta diferencial se va a integrar desde x_0 (que corresponde a la posición inicial) hasta x_f (que corresponde a la posición final). En el lado derecho de la ecuación se integra el producto $v\ dt$ desde el tiempo $t = 0$ (cuando comienza el análisis del movimiento) hasta un tiempo t deseado o tiempo final:

$$\int_{x_0}^{x_f} dx = \int_0^t v\ dt$$

Pero en este tipo de movimiento la velocidad es constante, y esto nos permite sacar la velocidad v de la integral. Y entonces solamente integramos la diferencial dt. Esto es:

$$\int_{x_0}^{x_f} dx = v \int_0^t dt$$

Al realizar la integral se obtiene:

$$x_f - x_0 = v\ t$$

Despejando, finalmente se obtiene:

$$\boxed{x_f = x_0 + v\ t}$$

Esta ecuación sólo puede utilizarse cuando la velocidad de la partícula es constante.

Movimiento uniformemente acelerado

Consideremos ahora el segundo caso, movimiento uniformemente acelerado. En este movimiento la partícula tiene una aceleración, la cual es constante.

$$\frac{dv}{dt} = a = constante$$

En este tipo de movimiento para obtener la velocidad se multiplica por dt para despejar la diferencial dv. Esta diferencial se va a integrar desde v_0 (que corresponde a la velocidad inicial) hasta v_f (que corresponde a la velocidad final). En el lado derecho de la ecuación se integra el producto $a\ dt$ desde el tiempo $t = 0$ (cuando comienza el análisis del movimiento) hasta un tiempo t deseado o tiempo final, así:

$$\int_{v_0}^{v_f} dv = \int_0^t a\, dt$$

Pero en este tipo de movimiento la aceleración es constante, y esto nos permite sacar la aceleración a de la integral. Y entonces solamente integramos la diferencial dt. Esto es:

$$\int_{v_0}^{v_f} dv = a \int_0^t dt$$

Al realizar la integral se obtiene:

$$v_f - v_0 = a\, t$$

Despejando, finalmente se obtiene:

$$\boxed{v_f = v_0 + a\, t}$$

A esto le llamaremos la primera ecuación cinemática para el movimiento uniformemente acelerado.

Para obtener la posición en el movimiento uniformemente acelerado, partimos de la expresión:

$$\frac{dx}{dt} = v = variable$$

En este tipo de movimiento la velocidad no es constante y está dada por la expresión:

$$v_f = v_0 + a\, t$$

Por eso tenemos que sustituirla en la ecuación anterior, quedando así:

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + a\, t$$

Para resolver esta ecuación se multiplica por dt para despejar la diferencial dx del lado izquierdo de la ecuación. Y del lado derecho se integrará el producto $(v_0 + a\, t)\, dt$ quedando así:

$$dx = (v_0 + a\, t)\, dt$$

Para resolver esta ecuación se integra dx desde su posición inicial x_0 hasta su posición final x_f. Y la diferencial dt se integra desde 0 hasta t.

$$\int_{x_0}^{x_f} dx = \int_0^t (v_0 + a\, t)\, dt$$

Al ver la integral del lado derecho de la ecuación nos damos cuenta que v_0 es un valor fijo, que podemos considerar como constante. También la aceleración a es una constante y puede salir de la integral quedando así:

$$\int_{x_0}^{x_f} dx = v_0 \int_0^t dt + a \int_0^t t\, dt$$

Ahora se hacen las integrales:

$$x_f - x_0 = v_0\, t + \tfrac{1}{2} a\, t^2$$

Despejando x_f queda:

$$\boxed{x_f = x_0 + v_0\, t + \frac{1}{2} a\, t^2}$$

A esto le llamaremos la segunda ecuación cinemática.

Es posible encontrar una tercera ecuación para el movimiento rectilíneo uniformemente acelerado. Esto se hace si partimos de las ecuaciones siguientes:

$$a = \frac{dv}{dt} \qquad \text{y} \qquad v = \frac{dx}{dt}$$

Despejamos dt de la segunda ecuación y lo sustituimos en la primera:

$$dt = \frac{dx}{v} \qquad \text{sustituyéndolo en} \qquad a = \frac{dv}{dt}$$

se obtiene:

$$a = \frac{dv}{\frac{dx}{v}} = \frac{\frac{dv}{1}}{\frac{dx}{v}}$$

Resolviendo el quebrado (usando la ley del "sándwich") se tiene:

$$a = v\, \frac{dv}{dx}$$

Para resolver esta ecuación multiplicamos ambos miembros por dx:

$$a\, dx = v\, dv$$

Ahora integramos así: dx desde x_0 hasta x_f; y dv desde v_0 hasta v_f.

$$\int_{x0}^{x_f} a\, dx = \int_{v_0}^{v_f} v\, dv$$

Aquí vemos que a es constante y puede salir de la integral. Pero v es variable y no podemos sacarla de la integral. Realizando las integrales:

$$a(x_f - x_0) = \frac{1}{2}(v_f^2 - v_0^2)$$

Multiplicando por 2 queda:

$$2\, a(x_f - x_0) = (v_f^2 - v_0^2)$$

Despejandov_f^2:

$$\boxed{v_f^2 = v_0^2 + 2\, a(x_f - x_0)}$$

A esto le llamamos la tercera ecuación cinemática.

Movimiento rectilíneo con aceleración variable

Existen movimientos donde la partícula se desplaza con una aceleración variable. Esto significa que la aceleración es función de la variable tiempo, de la variable posición o velocidad. O sea que no tendremos una aceleración constante, sino una función aceleración que depende del tiempo t, de la posición x o de la velocidad v.

Consideremos el caso en que la aceleración dependa del tiempo, esto es:

$$a = \frac{dv}{dt} = a(t) = variable$$

Para resolver esta ecuación, se multiplica por dt ambos lados y queda:

$$dv = a(t)\ dt$$

Ahora integramos ambos lados de la ecuación con los límites que siempre usamos:

$$\int_{v0}^{vf} dv = \int_{0}^{t} a(t)dt$$

Veamos un ejemplo, para entender esto más fácilmente.

Un auto deportivo viaja a lo largo de una línea recta con una aceleración de $a = 3t^2 - 10$ en $^m/_{s^2}$ donde t está en segundos. Determine su velocidad cuando $t = 4$ segundos. El auto parte del reposo.

Solución:

Primero nos fijamos en qué tipo de movimiento tenemos. Es un movimiento rectilíneo con aceleración variable, entonces utilizando la definición hacemos:

$$\int_{v0}^{vf} dv = \int_{0}^{t} a(t)dt$$

Como el vehículo parte del reposo, la velocidad inicial es igual a cero $v_0 = 0$. Y sustituimos la función $a(t)$ por $3t^2 - 10$:

$$\int_{0}^{vf} dv = \int_{0}^{t} 3t^2 - 10\ dt$$

Haciendo las integrales:

$$v_f - 0 = 3\frac{t^3}{3} - 10\ t$$

Ahora sustituimos el valor de $t = 4$ porque es el tiempo en que nos interesa conocer la velocidad final.

$$v_f = 3\frac{(4)^3}{3} - 10\ (4)$$

$$\boxed{v_f = 24\ ^m/_s}$$

Consideremos el caso en que la aceleración dependa de la posición, esto es:

$$a = v\frac{dv}{dx} = a(x) = variable$$

Para resolver esta ecuación, se multiplica por dx ambos lados y queda:

$$v\ dv = a(x)\ dx$$

Ahora integramos ambos lados de la ecuación con los límites que siempre usamos:

$$\int_{v_0}^{vf} v\ dv = \int_{x_0}^{x} a(x)dx$$

Veamos un ejemplo:

Una partícula viaja a lo largo de una línea recta a una velocidad de $a = 20 - 0.1x \ ^{m}/_{s^2}$ donde x está en metros. Determine su velocidad cuando $x = 15$ m si se sabe que su velocidad es de $v = 2 \ ^{m}/_{s}$ cuando $x = 0$.

Solución:

Primero nos fijamos en qué tipo de movimiento tenemos. Es un movimiento rectilíneo con aceleración variable, entonces utilizando la definición y sustituyendo valores hacemos:

$$\int_{v0}^{vf} v\,dv = \int_0^x a(x)dx \qquad \int_2^{vf} v\,dv = \int_0^x 20 - 0.1x\,dx \qquad \tfrac{1}{2}v_f^2 - \tfrac{1}{2}2^2 = 20x - 0.1\frac{x^2}{2}$$

Despejamos v_f y sustituimos $x = 15$:

$$v_f^2 = 2\left(20x - 0.1\frac{x^2}{2} + 2\right) \qquad v_f = \sqrt{2\left(20(15) - 0.1\frac{(15)^2}{2} + 2\right)}$$

$$\boxed{v_f = 24.1 \ ^{m}/_{s}}$$

Consideremos el caso en que la aceleración dependa de la velocidad, esto es:

$$a = v\frac{dv}{dx} = a(v) = variable$$

Para resolver esta ecuación, se multiplica por dx ambos lados y dividiendo entre $a(v)$ y queda:

$$\frac{v\,dv}{a(v)} = dx$$

Ahora integramos ambos lados de la ecuación con los límites que siempre usamos:

$$\int_{v_0}^{v_f} \frac{v}{a(v)}\,dv = \int_{x_0}^{x_f} dx$$

Veamos un ejemplo:

Un tractocamión se desplaza a lo largo de una carretera recta. Cuando el operador oprime el freno, el tractocamión está sujeto a una aceleración negativa $a = -2v$ en $^{m}/_{s^2}$. Si su velocidad es de 20 $^{m}/_{s}$ al oprimir los frenos, determine la distancia que recorre para detenerse.

$$\int_{20}^{v_f} \frac{v}{-2v}\,dv = \int_0^{x_f} dx \qquad x_f = \int_{20}^{v_f} -\frac{1}{2}dv \qquad x_f = -\tfrac{1}{2}(0 - 20)$$

$$\boxed{x_f = 10\,m}$$

Partículas conectadas

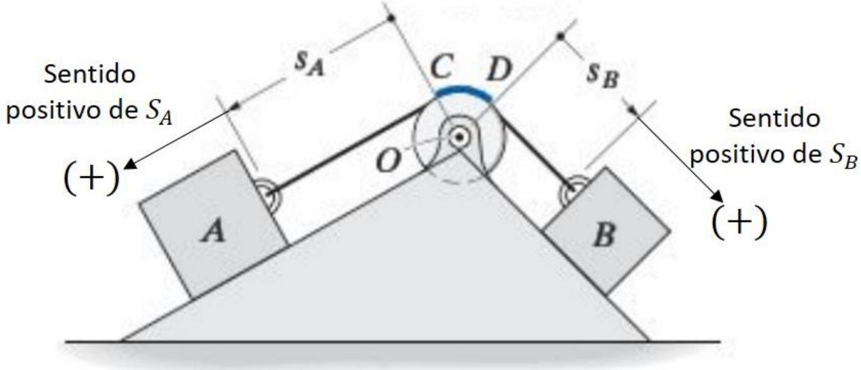
En ocasiones el movimiento rectilíneo de un cuerpo guarda relación con el movimiento de otro. Esto ocurre cuando tenemos dos partículas o cuerpos conectados mediante cuerdas. Para el estudio de partículas conectadas, se considerarán cuerdas ideales (inextensible, de peso despreciable y flexible).

Generalmente las cuerdas se encuentran sujetas o apoyadas alrededor de poleas que también consideraremos ideales (libres de fricción, peso despreciable).

Consideremos el siguiente arreglo de planos inclinados con los cuerpos A y B conectados por una cuerda que pasa sobre una polea cuyo eje es O. Observamos que las distancias S_A y S_B son tramos de cuerda rectos, medidos desde el eje O hasta cada uno de los cuerpos. De esta forma podemos concluir que la longitud total de la cuerda estará formada por el segmento S_A y S_B más un arco de cuerda apoyado sobre la polea al que le llamaremos arco CD y lo denotaremos por ℓ_{CD}.

Entonces la longitud total es:

$$\ell_{TOT} = S_A + \ell_{CD} + S_B$$



Fuente: HIBBELER, Russell. Ingeniería mecánica Dinámica, 12ª edición. México D.F. Pearson Prentice Hall, 2010

Si ahora derivamos con respecto al tiempo para observar la variación de las longitudes:

$$\frac{d(\ell_{TOT})}{dt} = \frac{d(S_A)}{dt} + \frac{d(\ell_{CD})}{dt} + \frac{d(S_B)}{dt}$$

La longitud total de la cuerda no varía respecto al tiempo, puesto que la cuerda es inextensible y siempre medirá lo mismo. Por lo tanto $\frac{d(\ell_{TOT})}{dt} = 0$. Y lo mismo ocurre con $\frac{d(\ell_{CD})}{dt} = 0$, porque independientemente si cualquiera de los cuerpos sube o baja, siempre existirá sobre la polea una longitud ℓ_{CD} de igual magnitud. Entonces la ecuación queda como:

$$0 = \frac{d(S_A)}{dt} + 0 + \frac{d(S_B)}{dt}$$

De la definición de velocidad sabemos que la variación de una longitud respecto al tiempo es la velocidad, entonces:

$$0 = v_A + v_B \quad \text{o} \quad -v_B = v_A$$

El signo menos de v_B indica que el cuerpo B se desplaza en sentido contrario al sentido positivo en el que fue medido S_B; esto quiere decir que el cuerpo B sube; y entonces el cuerpo A baja. Esto lo comprobamos porque v_A tiene signo positivo y se dirige en el sentido positivo en el que fue medido S_A.

También puede pasar que el cuerpo B baje, entonces A subirá. Esto quiere decir que la velocidad de B será positiva porque va en su sentido positivo; y la velocidad de A será negativa porque el cuerpo va en sentido contrario al establecido como positivo, esto es: $-v_A = v_B$.

Si a la ecuación $0 = v_A + v_B$ la volvemos a derivar respecto al tiempo, obtenemos:

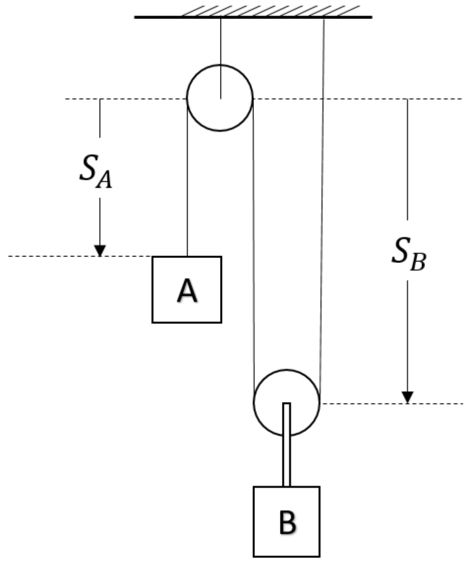
$$0 = a_A + a_B$$

Y si de ahí despejamos, ya sea la aceleración de A o la aceleración de B, obtenemos:

$$-a_B = a_A \qquad -a_A = a_B$$

Consideremos el siguiente ejemplo:

Se tiene el siguiente arreglo de cuerdas, cuerpos y poleas:



Si se sabe que el cuerpo A baja con una velocidad de 2 $m/_S$ aumentando a razón de 1 $m/_{S^2}$. Determine la velocidad y aceleración de B en el mismo instante.

Solución:

La longitud total de la cuerda es igual a:

$$\ell_{TOT} = S_A + arco1 + arco2 + 2S_B$$

Las longitudes $arco1$ y $arco2$ son los segmentos de cuerdas sobre las poleas, las cuales siempre serán constantes.

Derivando respecto al tiempo:

$$0 = v_A + 0 + 0 + 2v_B$$

Despejando v_B:

$$v_B = -\frac{1}{2}v_A$$

Sustituyendo la velocidad de A, se tiene que $v_B = -\frac{1}{2}(2) = -1\ m/_S$

Para las aceleraciones tendremos la misma relación:

$$a_B = -\frac{1}{2}a_A$$

Sustituyendo la aceleración de A, se tiene que $a_B = -\frac{1}{2}(1) = -0.5\ m/_{S^2}$

Notamos que el signo menos indica que el cuerpo B va en sentido contrario al positivo. Si el positivo señala hacia abajo, el negativo lo hará hacia arriba.

Por lo tanto la velocidad de B será de 1 $m/_S$ hacia arriba, y tendrá una aceleración de 0.5 $m/_{S^2}$ también hacia arriba.