Centro de Gravedad, Centro de Masa, Centroide y Primeros momentos.

Yahvé Abdul Ledezma Rubio

Octubre 2017

¿Dónde se encuentra el peso de un cuerpo?

Cuando preguntamos "¿Dónde se concentra el peso de un cuerpo?", la respuesta simplemente será "¡En su centro!". Esta declaración es válida para cuerpos regulares, de densidad homogénea, que su centro geométrico coincida con el lugar donde se representa su peso. En un prisma rectangular homogéneo se tendrá

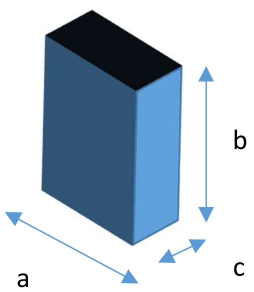

Figura 1. Prisma rectangular homogéneo

que el punto que se encuentra a la mitad de las longitudes de ancho, alto y espesor (a, b y c, respectivamente), sea el punto en dónde se concentre dicho peso.

Ejemplo 1. Determine donde pasa el peso equivalente de los 5 bloque de la figura, si estos son de características similares y se encuentran unidos uno al otro. Determine el punto dónde se podría considerar anclada la fuerza resultante.

Extendiendo esta idea, ahora coloquemos un cuerpo formado por 5 prismas iguales unidos uno al otro como se muestra en la figura. Para esta representación consideremos que el espesor de los prismas es el mismo y se coloca la mitad del espesor como plano representativo.

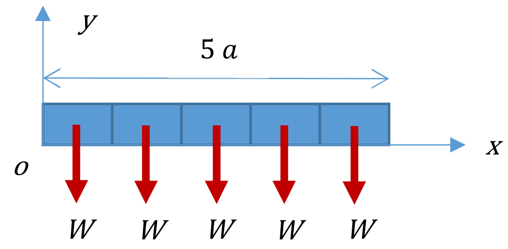

Figura 2. 5 Prismas unidos

Como vemos, los prismas están unidos uno con el otro, siendo entonces que las fuerzas que se ejercen en esas interfaces quedan como fuerzas internas. Sobre cada bloque únicamente actúa la fuerza externa de su peso, siendo fuerzas no concurrentes, simplemente paralelas. Sobre cada uno de los prismas actúa su peso en el centro del mismo, estando cada uno de ellos a la mitad de su largo (a). Al encontrar el sistema que tenga los mismos efectos externos visto desde el origen, se obtiene lo siguiente:

$$\Sigma Mo = \left(-W\left(\frac{a}{2}\right) - W\left(\frac{3a}{2}\right) - W\left(\frac{5a}{2}\right) - W\left(\frac{7a}{2}\right) - W\left(\frac{9a}{2}\right)\right)\hat{k} \quad (ec. 1)$$

$$\Sigma Mo = -W\left(\frac{25\,a}{2}\right)\hat{k} \quad (ec. 2)$$

$$\Sigma F = -5W\,\hat{\jmath} \quad (\text{ec}. 3)$$

Al ser el par resultante y la fuerza resultante perpendiculares, se puede reducir a una sola fuerza actuando sobre el cuerpo. Encontrando la línea de acción de dicha fuerza se tiene

$$\Sigma Mo = \left(xr\,\hat{\imath} + yr\,\hat{\jmath} + zr\,\hat{k}\right) \times \Sigma F \quad (ec. 4)$$

$$-W\left(\frac{25\,a}{2}\right)\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ xr & yr & zr \\ 0 & -5W & 0 \end{vmatrix} \quad (ec. 5)$$

Al dividir en tres ecuaciones escalares, se obtiene

$$(\hat{\imath}) \quad 0 = 5\,W\,zr \quad (ec.6)$$

$$(\hat{\jmath}) \quad 0 = 0 \quad (ec.7)$$

$$(\hat{k}) \quad -W\left(\frac{25\,a}{2}\right) = -5\,W\,xr \quad (ec.8)$$

Estas ecuaciones se pueden interpretar como la intersección entre dos planos, que corresponden con la descripción de la línea de acción de la fuerza resultante. Los planos descritos son:

$$zr = 0 \quad (ec.9)$$

$$xr = \frac{5\,a}{2} \quad (ec.10)$$

La resultante del sistema de fuerzas coincide con estar a la mitad de los 5 prismas.

Al tratar de realizar la misma operación para obtener la posición yr, vemos que el sistema de ecuaciones no define algún plano para la coordenada "y". Para poder resolver este problema, supongamos que ahora se voltea al arreglo de prismas de forma tal que queden verticales.

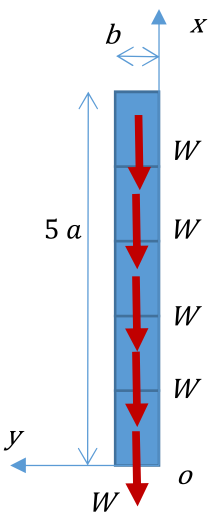

Figura 3. 5 Prismas unidos verticalmente

En este caso se tiene un sistema de fuerzas colineales, siendo posible realizar la composición del sistema de fuerzas directamente, siendo a la mitad de la altura b donde se encuentre la línea de acción de la resultante del sistema de fuerzas. Al reunir la información descrita en ambas posiciones, el punto en dónde se coloca el peso queda nuevamente en el cetro geométrico del conjunto de prismas.

$$yr = \frac{b}{2} \quad (ec.11)$$

Aparentemente llegamos a la misma conclusión, el peso se encuentra en su centro.

Centro de Gravedad

Este centro dónde se concentra la propiedad peso se denomina Centro de Gravedad (CG), y es el punto donde se asegura que estará representado todo el peso del cuerpo. Este punto puede estar por dentro o por fuera del mismo cuerpo.

Revisando las operaciones realizadas para obtener el Centro de Gravedad, se realizó el momento de cada uno de los pesos de los elementos y se tomó la distancia al eje "y" para calcular el Centro de Gravedad en x. Propongamos que lo reciproco es válido, simplemente cambiando los ejes, para obtener la posición del Centro de Gravedad en y, se Requiere calcular el momento del peso al eje x. A estos se les llama primeros momentos.

Ejemplo 2

Determine el Centro de Gravedad para el cuerpo de la figura, que se compone de 15 bloques de similares dimensiones a y b y similar peso W. Considere que la mitad del espesor del cuerpo se encuentra en el plano $z = 0$.

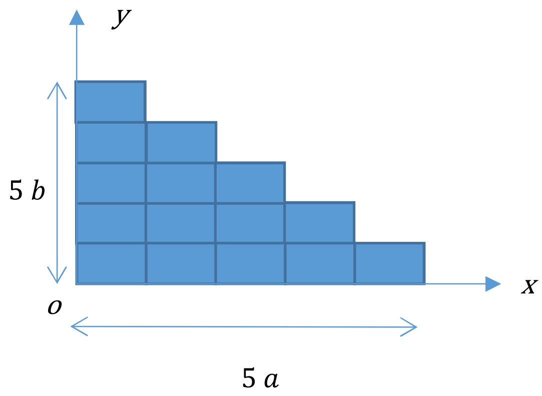

Figura 4. 15 Prismas unidos

$$\Sigma M_{Ejey} = \left(-5W\left(\frac{a}{2}\right) - 4W\left(\frac{3a}{2}\right) - 3W\left(\frac{5a}{2}\right) - 2W\left(\frac{7a}{2}\right) - W\left(\frac{9a}{2}\right) \right) \hat{k} \quad (ec.12)$$

$$\Sigma M_{Ejey} = -W\left(\frac{55\,a}{2}\right)\hat{k} \quad (ec.13)$$

$$\Sigma F = -15W \;\; \hat{\jmath} \;(\text{ec}.14)$$

$$\Sigma M_{Ejey} = \left(xr\,\hat{\imath} + yr\,\hat{\jmath} + zr\,\hat{k}\right) \times \Sigma F \quad (ec.15)$$

$$-W\left(\frac{55\,a}{2}\right)\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ xCG & yCG & zCG \\ 0 & -15W & 0 \end{vmatrix} \quad (ec.16)$$

$$xCG = \frac{-55W}{2(-15W)}a = 1.833\,a \quad (ec.17)$$

Ahora se supone que el cuerpo se gira un cuarto de vuelta para obtener la otra coordenada

$$\Sigma M_{Ejex} = \left(+5W\left(\frac{b}{2}\right) + 4W\left(\frac{3b}{2}\right) + 3W\left(\frac{5b}{2}\right) + 2W\left(\frac{7b}{2}\right) + W\left(\frac{9b}{2}\right) \right) \hat{k} \quad (ec.18)$$

$$\Sigma M_{Ejex} = W\left(\frac{55\,b}{2}\right)\hat{k} \quad (ec.19)$$

$$\Sigma F = -15W\,\hat{\imath} \quad (\text{ec}.20)$$

$$\Sigma M_{Ejex} = \left(xr\,\hat{\imath} + yr\,\hat{\jmath} + zr\,\hat{k}\right) \times \Sigma F \quad (ec.21)$$

$$W\left(\frac{55\,a}{2}\right)\hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ xCG & yCG & zCG \\ -15\,W & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad (ec.22)$$

$$yCG = \frac{\Sigma M_{Ejex}}{\Sigma F} = \frac{W\left(\frac{55\,a}{2}\right)}{15W} \quad (ec.23)$$

$$yCG = \frac{55}{30}a = 1.833\,a \quad (ec.24)$$

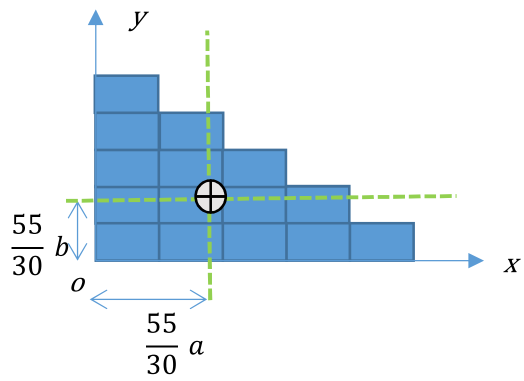

Figura 5. Centro de Gravedad

En este caso, el centro ya no es tan intuitivo como antes.

Primeros momentos, promedios ponderados.

El punto donde se concentra la propiedad analizada, en este caso el peso, se encuentra en el centro de cada uno de los elementos. Para localizar el punto que representa al conjunto de elementos, se ha ocupado al momento respecto al eje y, donde se ocupa la coordenada x del centro como distancia al eje, esto es, se realiza un promedio ponderado, donde la ponderación corresponde a la distancia que hay entre la fuerza y el punto al cual se transportan las fuerzas. Esta distancia es conocida también como el brazo de palanca que cada elemento presenta visto desde el punto en cuestión.

Ahora analicemos el resultado del ejercicio anterior. Se realizaron los momentos de cada uno de los pesos respecto al eje "y"

$$\Sigma M_{Ejey} = \Sigma\, xi\, Wi \quad (ec. 25)$$

Es aquí donde se da la ponderación de cada valor de la propiedad peso, debido a su brazo de palanca. Para encontrar el centro de gravedad, se dividió al momento entre el valor de la propiedad total, que es el peso resultante

$$\Sigma F = \Sigma Wi \quad (ec. 22)$$

Al realizar la razón entre el primer momento respecto al eje "y" y la resultante del sistema de fuerzas, considerando los signos del cálculo de momento asociado, queda entonces

$$x_{CG} = \frac{\Sigma\, xi\, Wi}{\Sigma Wi} \quad (ec. 26)$$

Siendo este el promedio ponderado de la propiedad peso con la ponderación del brazo de palanca asociado.

De forma similar, al revisar qué ocurre con el centro de gravedad en la coordenada y, considerando los signos presentes al realizar el cálculo de momento, la ecuación queda

$$y_{CG} = \frac{\Sigma\, yi\, Wi}{\Sigma Wi} \quad (ec. 27)$$

donde el numerador de la ecuación se le conoce como primer momento respecto al eje x (toma la medida de y) y el denominador es la propiedad total de peso. Extendiendo esta idea a tres dimensiones se puede considerar

$$z_{CG} = \frac{\Sigma\, zi\, Wi}{\Sigma Wi} \quad (ec. 28)$$

Forma integral del centro de masa.

Ahora busquemos el punto dónde concentrar la masa de un cuerpo. A este punto se le conoce como centro de masa. Para ello ocuparemos elementos muy pequeños, que tomarán el lugar de los prismas de los ejercicios anteriores, siendo lo elementos diferenciales de masa

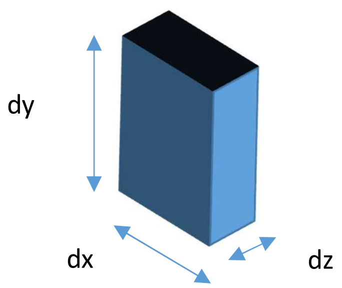

Figura 6. Elemento diferencial de masa

Para obtener el volumen del elemento y ser este un prisma rectangular, simplemente multiplicamos la medida de las aristas

$$dV = dz\, dy\, dx \quad (ec. 29)$$

Pero no es solo la forma la que buscamos, pues se requiere la masa del elemento diferencial. Para ello, se multiplica al diferencial de volumen por la densidad del mismo.

$$dm = \rho\, dm = \rho\, dz\, dy\, dx \quad (ec. 30)$$

Nuevamente, el punto dónde se concentra la propiedad de masa del elemento diferencial será su centro.

Ejemplo 3

Una placa rectangular de espesor uniforme y densidad constante se analiza por medio de elementos diferenciales verticales, como se muestra en la figura. Determine el punto en el que se puede representar a la masa total de la misma.

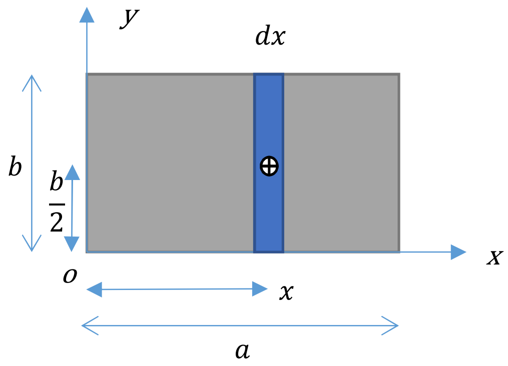

Figura 7. Placa homogénea

Para determinar el elemento diferencial de masa se tiene

$$dm = \rho\, b\, \varepsilon\, dx \qquad (ec.31)$$

donde a es la base, b la altura, ε el espesor y ρ la densidad. Para encontrar la masa total del cuerpo, siendo que el elemento diferencial solo depende de dx se puede realizar la integral en la existencia del cuerpo

$$mTot = \int dm = \int_0^a \rho\, b\, \varepsilon\, dx \qquad (ec.32)$$

considerando a los términos constantes esto queda

$$mTot = \rho\, b\, \varepsilon \int_0^a dx = \rho\, b\, \varepsilon\, a \qquad (ec.33)$$

en donde la masa total del cuerpo es la multiplicación del volumen por la densidad.

Ahora, para calcular el primer momento con respecto al eje y, se ocupa la coordenada x del centro del elemento diferencial. Similar a lo que pasa cuando se realiza el promedio ponderado con elementos contables, se realiza la multiplicación de la posición x y la propiedad en análisis, en este caso, el diferencial de masa.

$$\int dM_{Eje\,y} = \int x\, dm$$

$$= \int_0^a x\, \rho\, b\, \varepsilon\, dx \quad (ec.34)$$

$$M_{Eje\,y} = \rho\, b\, \varepsilon \left.\frac{x^2}{2}\right|_0^a = \rho\, b\, \varepsilon \frac{a^2}{2} \qquad (ec.35)$$

Siendo este valor conocido como primer momento de masa respecto al eje y.

Para obtener el punto que representa a la masa, nuevamente se hace el promedio ponderado, es decir, la razón del primer momento o momento de masa entre la masa total del cuerpo

$$xCM = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{\rho\, b\, \varepsilon \frac{a^2}{2}}{\rho\, b\, \varepsilon\, a} = \frac{a}{2} \qquad (ec.36)$$

Nuevamente, el centro de masa se encuentra en su centro.

Para la posición del cetro de masa en dirección y, ahora se toman las distancias de los centros de cada elemento al eje x

$$\int dM_{Eje\,x} = \int \frac{b}{2}\, dm$$

$$= \int_0^a \frac{b}{2}\, \rho\, b\, \varepsilon\, dx \quad (ec.37)$$

$$M_{Eje\,x} = \rho\, \frac{b^2}{2}\, \varepsilon\, x|_0^a = \rho\, \frac{b^2}{2}\, \varepsilon\, a \qquad (ec.38)$$

Al realizar la razón entre el primer momento de masa entre la masa total del sistema, se obtiene

$$yCM = \frac{\int y\, dm}{\int dm} = \frac{\rho\; a\; \varepsilon \frac{b^2}{2}}{\rho\; b\; \varepsilon\; a} = \frac{b}{2} \quad (ec. 39)$$

Llegamos a la misma conclusión que sabemos desde la educación básica, el centro de masa se encuentra en su centro.

Es importante observar que la posición del centro del elemento diferencial es la que se ocupa en cada una de las sumas infinitas que representa la integral. También es importante destacar que muchas de los datos del problema eran constantes, por lo que pudieron salir fácilmente de la integral, dejando únicamente las partes variables dentro de la misma.

Pensemos ahora en una figura más compleja, en la que no las fronteras de existencia del cuerpo sean constantes. En este caso será necesario definir una integral más completa que defina la existencia del cuerpo.

Ejemplo 4. Para la placa triangular de la figura, hecha de acero y de espesor constante de 10 mm, determine la masa total de la placa y la posición del centro de masa de la misma.

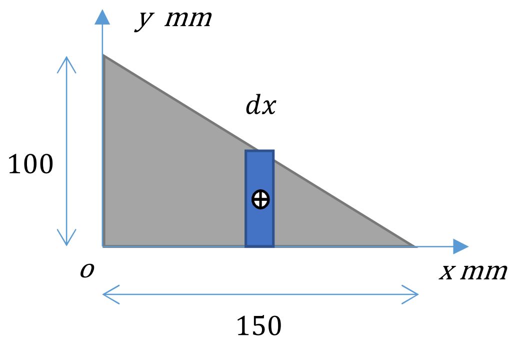

Figura 8. Placa triangular

Para esta placa, la región de existencia es en el primer cuadrante, es decir, $x > 0$ y $y > 0$, y está limitada por la función

$$y = 100 - \frac{2}{3}\,x \quad (ec. 40)$$

Considerando la densidad del acero 1080

$$\rho = 7860\; kg/m^3$$

Observando cómo cambia la masa del elemento diferencial, se puede llegar a la siguiente expresión

$$dm = \rho \left(0.1 - \frac{2}{3}\,x\right) \varepsilon\, dx \quad (ec. 41)$$

La masa total del cuerpo quedaría como

$$mTot = \int dm$$

$$= \int_0^{0.15} 7860 \left(0.1 - \frac{2}{3}\,x\right) 0.01\, dx \quad (ec. 42)$$

$$mTot = 0.5895\; kg$$

Calculando ahora el primer momento de masa respecto al eje y, se tiene

$$M_{Eje\, y} = \int xCMi\; dm \quad (ec. 43)$$

$$M_{Eje\, y}$$

$$= \int_0^{0.15} x\; 7860 \left(0.1 - \frac{2}{3}\,x\right) 0.01\, dx \quad (ec. 44)$$

$$M_{Eje\, y} = 0.029475\; kg\; m$$

Al obtener la razón del primer momento de masa a la masa total se tiene

$$xCM = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{0.029475}{0.5895} \quad (ec. 46)$$

$$xCM = 0.05\; m$$

Comparando el último resultado con el centro de masa que se puede obtener de alguna tabla, este corresponde en la dirección x a una tercera parte de su dimensión base.

Para el cálculo del centro de masa en dirección y, se recurre al primer momento de masa respecto al eje x, es decir

$$M_{Eje\, x} = \int yCMi\; dm \quad (ec. 47)$$

$$M_{Eje\,x} = \int_0^{0.15} yCMi\, 7860 \left(0.1 - \frac{2}{3}\,x\right) 0.01\, dx \qquad (ec. 48)$$

Hay que hacer notar que el centro de masa se encuentra a la mitad de la altura del elemento diferencial, con lo que el modelo quedaría

$$yCMi = \frac{y}{2} = \frac{\left(0.1 - \frac{2}{3}\,x\right)}{2} \qquad (ec. 49)$$

Sustituyendo esta información en la integral del primer momento

$$M_{Eje\,x} = \int_0^{0.15} 7860\, \frac{\left(0.1 - \frac{2}{3}\,x\right)^2}{2} 0.01\, dx \qquad (ec. 50)$$

$$M_{Eje\,x} = 0.01965\, kg\, m$$

Y al realizar la razón del primer momento respecto al eje x entre la masa total del sistema se tiene

$$yCM = \frac{\int y\, dm}{\int dm} = \frac{0.01965}{0.5895} \qquad (ec. 51)$$

$$yCM = 0.0333\, m$$

Esta coordenada corresponde al centro de masa de la placa triangular, a una tercera parte de la altura.

Es de notar en el desarrollo realizado, la propiedad de masa se considera al centro de cada uno de los elementos diferenciales, y de ahí se tomas sus coordenadas. Cada una de las coordenadas sirve como brazo de palanca para considerar el momento que ocasiona, y al dividir entre la masa total se obtiene el promedio ponderado. Otra de las cualidades que se puede notar es que al multiplicar el diferencial de masa por la aceleración de la gravedad local este elemento diferencial de masa se convierte en diferencial de peso.

$$dW = g\, dm = g\, \rho\, dV \qquad (ec. 52)$$

Si el cuerpo es pequeño y no hay variación del campo de aceleración gravitacional, se puede considerar que el centro de masa (CM) y el centro de gravedad coinciden. Otro de los casos particulares sería cuando la densidad del cuerpo se pueda considerar constante, siendo que sale de la integral y esto quedaría

$$xCM = \frac{\int x\, dm}{\int dm} = \frac{\rho}{\rho}\frac{\int x\ dV}{\int\ dV} = \frac{\int x\ dV}{\int\ dV} \qquad (ec. 53)$$

Las integrales que quedan ahora hablan del volumen, la forma que tiene el cuerpo, sin importar la densidad (pues fue constante en todo el cuerpo) ni la gravedad (pues también se considera constante). Esta última integral sirve para localizar el centro de la forma que se analiza, es decir, el centroide (con forma de centro).

Centroide de una figura plana.

En matemáticas y física el centroide o centro geométrico es el promedio aritmético de las posiciones de todos los puntos del cuerpo definido. En figuras con volumen, se consideran los elementos diferenciales de volumen, mientras que en las figuras planas se consideran elementos diferenciales de área.

En los cuerpos planos se considera que, si se traza una línea por dicho punto, la mitad del área quedara de cada lado de la línea trazada. En los volúmenes, si se traza un plano que pase por dicho punto, la mitad del volumen quedará de cada uno de los lados.

Ejemplo5. Determine el centroide del área triangular de la figura.

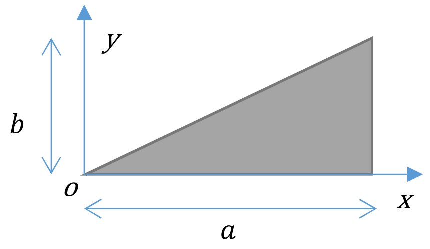

Figura 9. Triangulo

Para el análisis ahora se elige un elemento diferencial de área

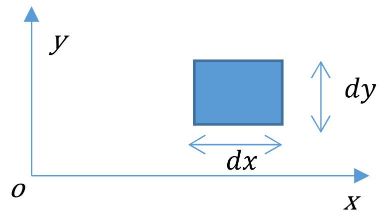

Figura 10. Diferencial de área

Para calcular el diferencial de área se tiene

$$dA = dy\,dx \quad (ec.55)$$

Para encontrar el área total, ahora se recurre a una integral doble, pues se tienen dos elementos diferenciales

La primera frontera corresponde al diferencial de y, siendo que la existencia del área la siguiente

$$\int dA = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} dy\ dx \quad (ec.56)$$

$$ATot = \int_0^a y|_0^{\frac{b}{a}x}\ dx \quad (ec.57)$$

$$ATot = \int_0^a \frac{b}{a} x\,dx = \frac{b}{a}\frac{x^2}{2}\Big|_0^a = \frac{b\ a}{2} \quad (ec.58)$$

Ahora, para calcular los primeros momentos de área, se recurre a la posición x del centro de cada uno de los elementos diferenciales y así obtener el momento respecto al eje y.

$$M_{Eje\ y} = \int x\,dA \quad (ec.59)$$

$$M_{Eje\ y} = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} x\,dy\ dx \quad (ec.60)$$

$$M_{Eje\ y} = \int_0^a \frac{b}{a}\ x^2\,dx = \frac{b}{a}\frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{b\ a^2}{3} \quad (ec.61)$$

DE la misma forma se procede a calcular el momento respecto al eje x, tomando la distancia y

$$M_{Eje\ x} = \int y\,dA \quad (ec.62)$$

$$M_{Eje\ x} = \int_0^a \int_0^{\frac{b}{a}x} y\,dy\ dx \quad (ec.63)$$

$$M_{Eje\ x} = \int_0^a \frac{y^2}{2}\Big|_0^{\frac{b}{a}x}\ dx = \int_0^a \frac{b^2}{2\,a^2}x^2\,dx \quad (ec.64)$$

$$M_{Eje\ x} = \frac{b^2}{2\,a^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^a = \frac{b^2\ a}{6} \quad (ec.65)$$

Con la información de los primeros momentos de área y el área total, se puede obtener las coordenadas del centroide

$$xC = \frac{\int x\,dA}{\int\ dA} = \frac{\frac{b\,a^2}{3}}{\frac{b\ a}{2}} = \frac{2}{3}a \quad (ec.66)$$

$$yC = \frac{\int y\,dA}{\int\ dA} = \frac{\frac{b^2\,a}{6}}{\frac{b\ a}{2}} = \frac{1}{3}b \quad (ec.66)$$

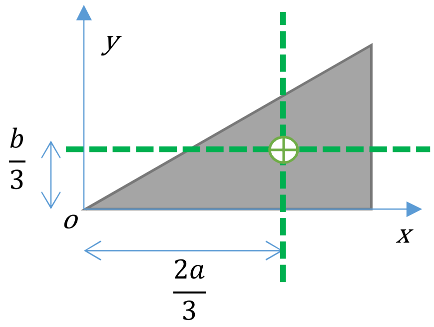

Figura 10. Centroide del triángulo

Otra forma de encontrar este punto sería trazando las medianas del triángulo y el punto donde concurren, que parten al triangulo en dos áreas de igual magnitud, corresponde con el centroide antes calculado.