ING. JUAN OCÁRIZ CASTELAZO
SEPTIEMBRE DE 2017

Monografía

COMPONENTES DE UNA FUERZA

Contenido del tema: Principio de Stevin o ley del paralelogramo. Composición de fuerzas. Descomposición de una fuerza. Componentes cartesianas. Vectores. Ejercicios propuestos. Apéndice: notas de trigonometría.

La presente monografía pretende explicar cómo se obtienen las componentes de una fuerza; en particular, qué funciones trigonométricas deben emplearse en cada caso. Para ello, se explicará qué son componentes de una fuerza y el principio en el que se funda tal descomposición.

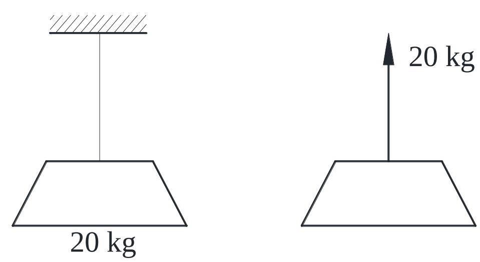
El tema es uno de los primeros que debe conocer un estudiante de Mecánica, sea de Estática o Dinámica, pues las fuerzas son las causas del movimiento de los cuerpos, el cual constituye el objeto del estudio de la Mecánica.

Entender correctamente el modo de obtener las componentes de una fuerza será muy útil para descomponer otras cantidades físicas, como son los momentos de una fuerza, las velocidades, las aceleraciones, etc.

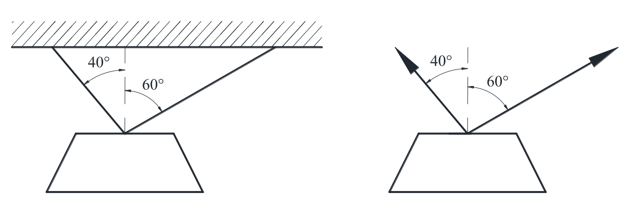
Para poder modificar los sistemas de fuerzas que actúan sobre los cuerpos, sustituirlos o transformarlos, es necesario comenzar por saber descomponer una fuerza, es decir, cambiarla por dos o más que produzcan los mismos efectos externos. La descomposición más frecuentemente necesaria es la que se realiza en las direcciones de los ejes equis y ye, que son perpendiculares entre sí, pues resultan muy útiles para obtener la resultante de un sistema de fuerzas, y son la base del álgebra vectorial.

Principio de Stevin

Antes de enunciar el principio de Stevin, que también se conoce como ley del paralelogramo, veamos un ejemplo de su aplicación.



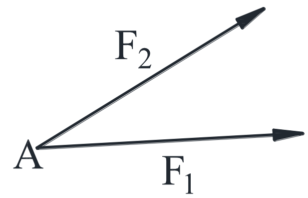
Consideremos un cuerpo de 20 kg de peso colgado de una cuerda. Dicha cuerda ejerce sobre el cuerpo una fuerza que tiene una magnitud de 20 kg, vertical, y dirigida hacia arriba. La representaremos mediante un segmento dirigido de recta, indicando su magnitud, como se muestra en la figura. El efecto externo de esa fuerza sobre el cuerpo es mantenerlo quieto, en reposo. Ahora colgaremos el mismo cuerpo de dos cuerdas; una desviada 40° de la vertical y otra, 60°. Las cuerdas ejercen ahora sobre el cuerpo dos fuerzas distintas, que producen el mismo efecto externo que la fuerza original. Es decir, una fuerza se ha sustituido por dos, que producen el mismo efecto externo: y decimos que la



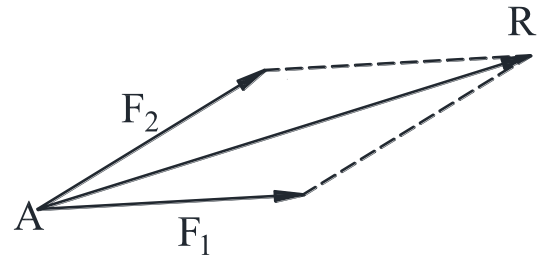
.

fuerza original de 20 kg dirigida hacia arriba, es la resultante de las dos nuevas tensiones que soportan el cuerpo. Estas dos fuerzas son *componentes* de aquélla.

El principio de Stevin es uno de los principios de la Mecánica y es el único medio con que contamos para determinar la resultante de dos fuerzas. Podemos enunciarlo de la siguiente manera:



La resultante de dos fuerzas que concurren en un punto, se encuentra en la diagonal del paralelogramo construido con dichas fuerzas, y pasa por el punto.



Como se ve, se trata de un procedimiento gráfico. En la figura, se ven dibujadas las fuerzas a escala en su dirección, se trazan paralelas en los extremos, y en la diagonal correspondiente al punto de concurrencia de las fuerzas se dibuja la resultante; se mide su longitud, que, multiplicada por la escala empleada, corresponde a la magnitud de la fuerza y su dirección es la de la diagonal, que se puede determinar mediante un transportador.

El proceso para remplazar varias fuerzas por una sola se llama *composición* o *reducción* de un sistema de fuerzas. Tendremos que conocer el procedimiento de componer dos fuerzas para entender el que por ahora nos interesa, que es el contrario, cambiar una fuerza por dos, que produzcan los mismos efectos externos, y que recibe el nombre de *descomposición* o *resolución* de fuerzas.

Conviene tener muy claros los conceptos que venimos empleando y que son los siguientes.

Efecto externo. Es el causado por una fuerza que otro cuerpo distinto ejerce y que puede alterar su movimiento. Los efectos externos principales son el equilibrio del cuerpo, los momentos, los movimientos, etc., pero no los esfuerzos ni las deformaciones.

Sistemas equivalentes de fuerzas. Son los conjuntos de fuerzas que actúan sobre un cuerpo y que producen los mismos efectos externos sobre él.

Resultante. Es el sistema equivalente más simple. En el caso que nos ocupa, se trata siempre de una sola fuerza.

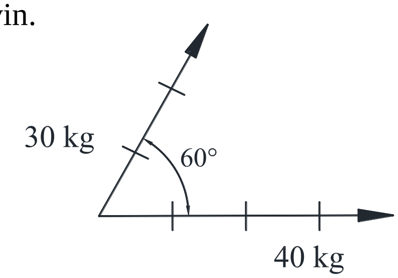
Componente de una fuerza F. Es la fuerza *C* que, junto con otras, produce los mismos efectos externos que *F*. (Dicha fuerza *F* es la resultante de *C* y las otras.)

Características de una fuerza. Son: *1)* la magnitud (o tamaño, intensidad, módulo, etc.), *2) la* dirección (el ángulo que forma con alguna recta conocida, general-mente la horizontal) y *3)* posición, o sea, un punto cualquiera de su línea de acción. Por ejemplo, la fuerza que sostiene al cuerpo del ejemplo que dimos arriba, tiene una magnitud de 20 kg, su dirección es vertical hacia arriba, y un punto de su línea de acción es el de contacto de la cuerda con el cuerpo; este mismo punto, corresponde a la posición de las otras dos que sustituyeron a la de 20 kg, y sus direcciones coinciden con las de las cuerdas.

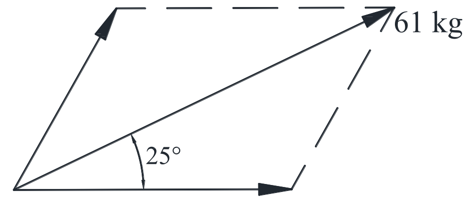
Composición de fuerzas

A continuación, aprenderemos a componer dos fuerzas concurrentes, es decir, a hallar su resultante, de acuerdo con lo establecido por el principio de Stevin.

Sean las fuerzas F_1, horizontal y de 40 kg, y F_2, de 30 kg que forma con la anterior un ángulo de 60°. Para determinar la resultante dibujaremos las fuerzas de

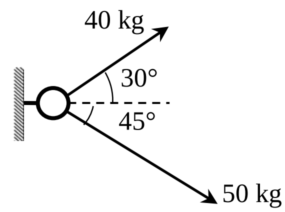


modo que 1 cm corresponda a 10 kg. Dibujamos un paralelogramo, tomando esas fuerzas como lados, dibujamos la diagonal y medimos su longitud y el ángulo que forma con la horizontal. Como mide alrededor de 6.1 cm, entonces la resultante es de 61 kg y su dirección forma un ángulo de 25° con la horizontal.

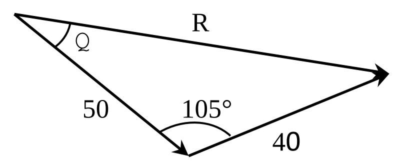


Puesto que el método gráfico que hemos empleado resulta poco preciso, emplearemos en lo futuro un método analítico. Observemos que el paralelogramo del ejemplo contiene dos triángulos, dos de cuyos lados son las fuerzas y el tercero, la resultante. Por tanto, en vez de construir un paralelogramo, dibujaremos una fuerza a continuación de la otra; y la resultante unirá el origen de la primera con la punta de la segunda. Del triángulo conocemos, por tanto, dos lados y el ángulo que forman entre sí. Y mediante las *leyes del triángulo* podemos hallar la magnitud de *R* y su dirección.

Hallaremos analíticamente, mediante las *leyes del triángulo*, la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas que actúan sobre la argolla de la figura. Dibujamos esquemáticamente una fuerza: a continuación de la otra y unimos el origen de la primera con la punta de la segunda: este lado corresponde a la resultante.



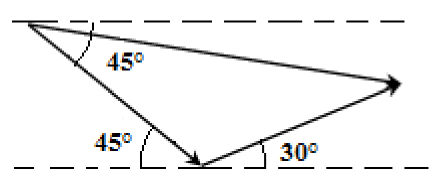
Una manera sencilla de determinar que el ángulo interior conocido es de 105°, es trazar líneas auxiliares horizontales en los vértices del triángulo, como se muestra en la figura. El ángulo que forma línea de acción de la fuerza de 50 kg con cualquier horizontal es de 45°, mientras el que forma la otra es de 30°. Como fácilmente se deduce, 180 – 45 – 30 = 105.



Tenemos, pues, un triángulo del que conocemos dos lados y el ángulo que forman entre sí. Conforme al teorema (o ley) de los cosenos (ver apéndice, 3),

$$R^2 = {F_1}^2 + {F_1}^2 - 2F_1F_2\cos\theta$$

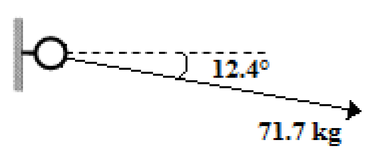
$$R^2 = 40^2 + 50^2 - 2(40)50\cos 105° = 71.7$$



y, por el teorema (o ley) de senos (ver apéndice, 2),

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{40} = \frac{\operatorname{sen} 105°}{71.7}$$

por tanto θ = 32.6°. Y el ángulo que *R* forma con la horizontal es 45 – 32.6 = 12.4°. Por fin



$$\boxed{R = 71.7\text{ kg } \searrow 12.4°}$$

Resolución de fuerzas

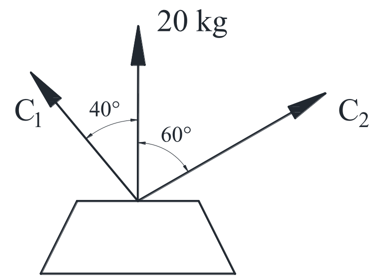
Una vez que sabemos cómo hallar la resultante de dos fuerzas concurrentes, trataremos de realizar el pro-ceso contrario, es decir, resolver o descomponer una fuerza dada en dos componentes que constituyan un sistema equivalente. Ilustraremos el procedimiento mediante dos ejemplos.

.

El primero consiste en resolver una fuerza en dos componentes que tengan ciertas direcciones; el segundo, en descomponer la fuerza en dos componentes de cierta magnitud.

Retomemos el caso del cuerpo de 20 kg que pende de una cuerda. Deseamos conocer las componentes C_1 y C_2 correspondientes a las fuerzas que ejercen las dos cuerdas que sustituyen la original.

Comenzamos dibujando la fuerza que ha de des-componerse —la fuerza vertical de 20 kg—, y en cada uno de sus extremos, líneas paralelas a las direcciones de las componentes, como se ve en las figuras. El tercer ángulo interior del triángulo obtenido es el suplemento de los otros dos (pues los tres deben sumar 180°).



Ahora podemos resolver el triángulo utilizando la ley de los senos:

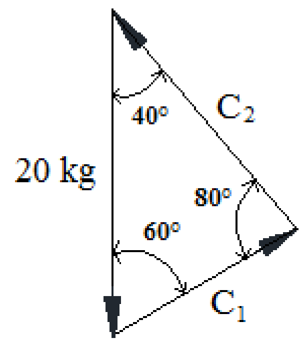
$$\frac{20}{\text{sen}\,80°} = \frac{C_1}{\text{sen}\,40°} = \frac{C_2}{\text{sen}\,60°}$$

$$C_1 = \frac{20}{\text{sen}\,80°}(\text{sen}\,40°)$$

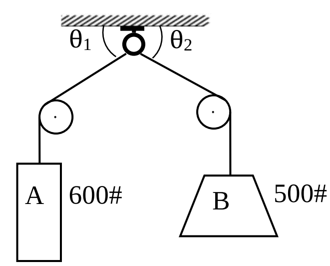
$$C_2 = \frac{20}{\text{sen}\,80°}(\text{sen}\,60°)$$

$$\boxed{C_1 = 13.05\ \text{kg}}$$

$$\boxed{C_2 = 17.59\ \text{kg}}$$



Resolveremos ahora un segundo ejemplo. Se trata de determinar cuáles deben ser los ángulos θ_1 y θ_2 de modo que la resultante de las dos tensiones ejercidas sobre la argolla sea una fuerza vertical de 750 lb.



Dibujamos la fuerza que deseamos descomponer y, con centro en sus extremos, trazamos dos arcos de circunferencia correspondientes a las fuerzas de 600 y 500 lb. Para la resolución analítica emplearemos primero la ley de los cosenos:

$$500^2 = 750^2 + 600^2 - 2(750)600\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{750^2 + 600^2 - 500^2}{2(750)600}$$

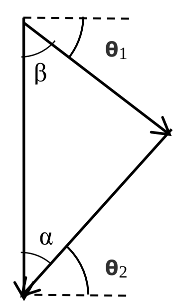
$$\alpha = 41.6$$

Ahora emplearemos el teorema de los senos:

$$\frac{\text{sen}\,\beta}{600} = \frac{\text{sen}\,41.6°}{500}$$

$$\text{sen}\,\beta = \frac{600\,\text{sen}\,41.6°}{500}$$

$$\beta = 52.9$$



Puesto que α y β son los ángulos complementarios de Θ_2 y Θ_1, respectivamente,

$$\boxed{\Theta_1 = 37.1°}$$

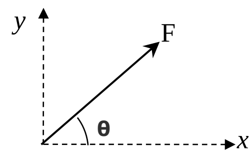
$$\boxed{\Theta_2 = 48.4°}$$

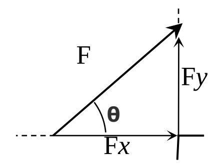
.

Componentes cartesianas

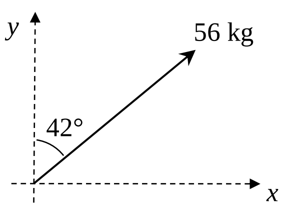
Un caso importante y frecuente de resolución de fuerzas es el que se efectúa en dos direcciones perpendiculares entre sí. Más frecuente aún es la descomposición en las direcciones de los ejes cartesianos (son ejes de coordenadas; se llaman así en honor de René Des Cartes): se trata de obtener las componentes ortogonales (o sea, perpendiculares) y en el sentido de los ejes equis y ye.

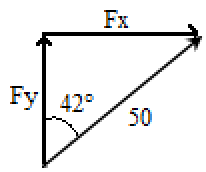
Consideremos una fuerza F y el sistema cartesiano que se muestra en la figura. Siguiendo el procedimiento ilustrado con el primer ejemplo, trazamos paralelas a las direcciones deseadas en cada uno de los extremos de la fuerza. Como el $\cos\Theta$ es igual a la razón de F_x a F, y sen Θ, la razón de F_y a F, entonces, $F_x = F\cos\Theta$ y $F_y = F \operatorname{sen}\Theta$; con tales expresiones quedan determinadas las magnitudes y los sentidos de las componentes cartesianas.





Ahora presentaremos algunos ejemplos de obtención de las componentes cartesianas de fuerzas, en diferentes sistemas de referencia, y con distinta información:





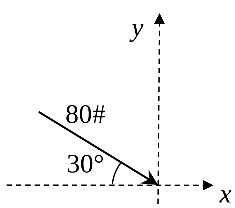
$F_x = 56\ \operatorname{sen} 42°$

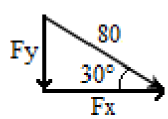
$\boxed{F_x = 37.5\ kg}$

$F_y = 56\ \cos 42°$

$\boxed{F_y = 41.6\ kg}$

Debe notarse, en todos los casos, que la componente que es uno de los lados del ángulo, se obtiene multiplicando la magnitud de la fuerza por el *coseno* de ángulo. Para hallar la componente que está enfrente del ángulo, la magnitud de la fuerza se multiplica por el *seno* del ángulo.





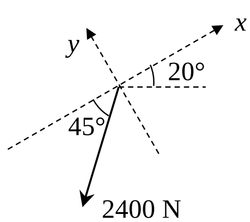
$F_x = 80\left(\sqrt{3}/2\right)$

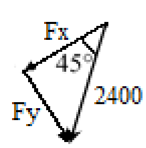
$\boxed{F_x = 69.3\ lb}$

$F_y = -80\ (1/2)$

$\boxed{F_y = -40\ lb}$

Nótese que la componente vertical tiene signo negativo porque su sentido es contrario al del eje de las yes.





$F_x = -2400\left(\sqrt{2}/2\right)$

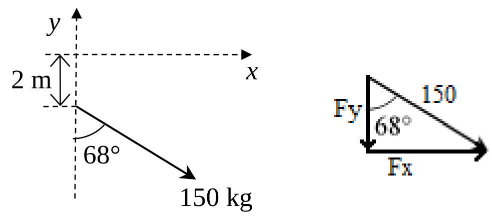
$\boxed{F_x = -1697\ N}$

$F_y = -240\left(\sqrt{2}/2\right)$

$\boxed{F_y = -1697\ N}$

.

En este caso las dos componentes tienen sentido contrario a los ejes de referencia, y por eso tienen signo negativo. Ha de quedar claro que las fuerzas nunca pueden ser “negativas”: el signo indica que, en la línea señalada, el sentido es opuesto. Obsérvese que las direcciones de los ejes no afectan a la manera de obtener las componentes cartesianas.



$F_x = 150 \ \text{sen}\, 68°$

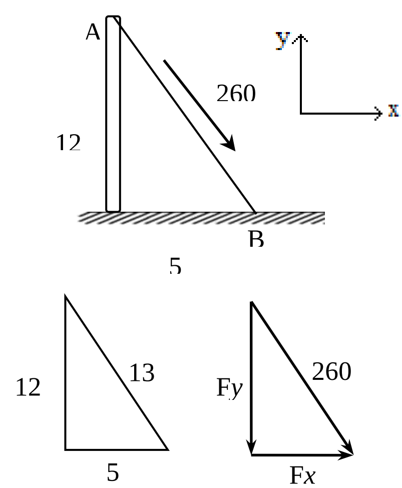
$\boxed{F_x = 139.1\, kg}$

$F_y = -150 \ \cos 68°$

$\boxed{F_x = -56.2\, kg}$

Se multiplicó la magnitud de la fuerza por el seno del ángulo de 68° para obtener F_x, ya que esta componente se halla enfrente de dicho ángulo; puesto que F_y está al lado, se usó el coseno.

Otros casos de descomposición

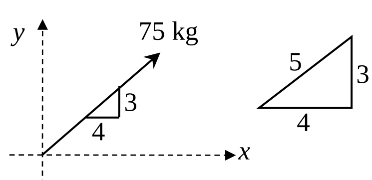


Es frecuente que la información acerca de las fuerzas esté relacionada con las dimensiones de los cuerpos y no con sus ángulos. Pensemos, por ejemplo, en el cable que sostiene el poste de la figura. Si se sabe que la tensión del cable es de 260 kg, podríamos establecer la siguiente relación entre el triángulo formado por el poste, el cable y el suelo, y otro formado por la tensión y sus componentes cartesianas, que son dos triángulos semejantes: por el teorema de Pitágoras se puede calcular la longitud de la hipotenusa del primer triángulo y entonces escribir las siguientes proporciones:

$$\frac{260}{13} = \frac{F_x}{5} = \frac{F_y}{12}$$

por tanto $F_x = 260\left(\frac{5}{13}\right)$, y $F_y = -260\left(\frac{12}{13}\right)$, es decir, $F_x = 100$ kg y $F_y = -240$ kg

En general podemos establecer, según la nomenclatura de la figura, que $F_x = F\left(\frac{a}{c}\right)$ y que $F_y = F\left(\frac{b}{c}\right)$. Ahora presentaremos algunos ejemplos resueltos de descomposición de una fuerza en sus componentes cartesianas, a partir de la pendiente de su línea de acción.



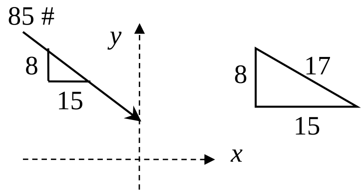
$F_x = 75\ (4/5)$

$\boxed{F_x = 60\, kg}$

$F_y = 75\ (3/5)$

$\boxed{F_y = 45\, kg}$

.



$F_x = 85\ (15/17)$

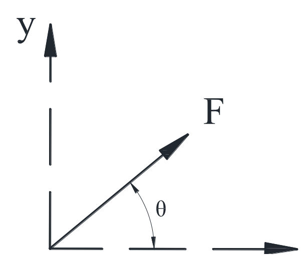
$\boxed{F_x = 75\ lb}$

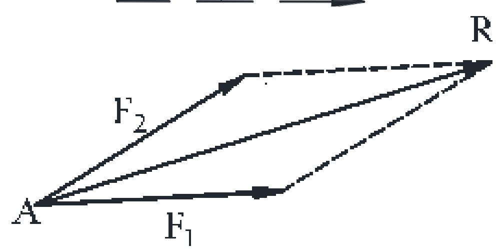
$F_y = -85\ (8/17)$

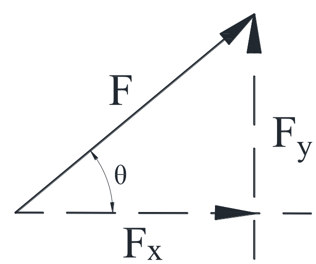
$\boxed{F_y = -40\ lb}$

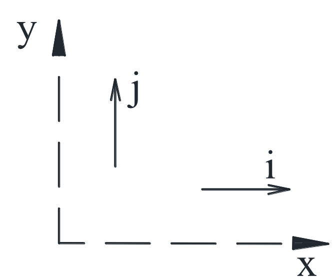
El signo negativo de la componente vertical obedece a que su sentido, como se observa, es contrario al del eje de las yes.

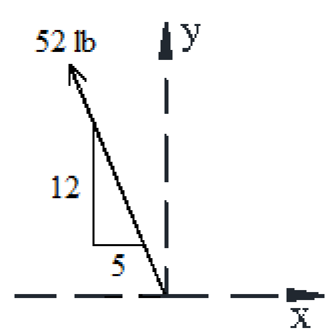
Vectores











Un vector es esencialmente un segmento dirigido de recta, tal como hemos venido representando las fuerzas en esta monografía. Y, a partir de lo que hemos visto acerca de las componentes, podemos establecer un lenguaje y un álgebra vectorial elementales.

Dos son las *características* de un vector: magnitud (o tamaño, o módulo) y dirección. La *suma vectorial* se realiza según la ley del paralelogramo; es decir $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{R}$; también. $\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 = \mathbf{F}$, y, empleando las componentes cartesianas, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y$.

(Nótese que hemos empleado, como es usual en los impresos, negritas para designar los vectores y distinguirlos de los escalares. En los manuscritos se suelen testar los símbolos de los vectores, pues no es posible usar las negritas.)

Si un vector se multiplica por un escalar (que es una cantidad que se determina completamente con un solo número), se obtiene un nuevo vector, con la misma dirección, cuya magnitud aumenta tantas veces cuantas vale el escalar: esta operación se llama *producto de un vector por un escalar*.

Se llaman vectores unitarios aquellos que tienen una magnitud igual a 1. Los vectores unitarios en las direcciones de los ejes de las equis y las yes son **i** y **j**, respectivamente.

Daremos un ejemplo de la utilización del lenguaje vectorial: Sea un sistema cartesiano cuyo eje de las equis sea horizontal y el de las yes, vertical: una fuerza de 52 lb tiene una línea de acción cuya pendiente es de 12/5, como se muestra en la figura; su componente horizontal, que tiene sentido contrario del eje de las equis, tendrá una magnitud de 52(5/13) = 20, y la vertical 52(12/13) = 48; dicha fuerza quedará representada por el vector $\mathbf{F} = -20\,\mathbf{i} + 48\,\mathbf{j}$ [lb]. Como se ve, con esta sola expresión estamos indicando tanto la magnitud como la dirección de la fuerza.

.

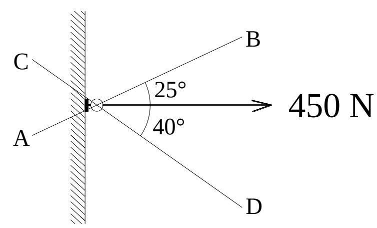
Cuando se tienen fuerzas en el espacio, es decir, en tres dimensiones, a lo que hemos dicho de las componentes cartesianas hay que añadir una componente más, perpendicular a las dos anteriores, o sea, en dirección de un eje de las zetas. El vector unitario en esa dirección es **k**. Por tanto, una fuerza expresada en lenguaje vectorial (en forma polinínómica), queda así: $\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j} + F_z\,\mathbf{k}$.

Ejercicios propuestos

Con lo que se ha explicado, el lector debe ser capaz de resolver los siguientes ejercicios. Note especialmente que para obtener la componente que forma uno de los lados del ángulo conocido, se emplea la función coseno; el seno se emplea para obtener la componente que se halla enfrente del ángulo.

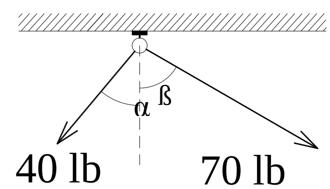
1. Descomponga la fuerza horizontal de 430 N en dos componentes, C_1 y C_2 en las direcciones de las líneas *AB* y *CD*, respectivamente.

(*Sol.*C_1 = 319 N; C_2 = 210 N)



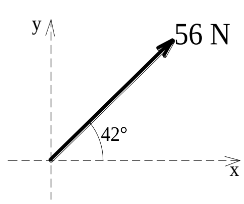
2. Se desea que la resultante de las dos fuerzas que actúan sobre la argolla sea vertical y de 80 lb. ¿Cuáles deben ser los valores de los ángulos α y β?

(*Sol.*α = 61°; β = 30°)



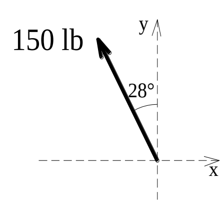
3. Diga cuáles son las componentes cartesianas de cada una de las fuerzas mostradas.

a)



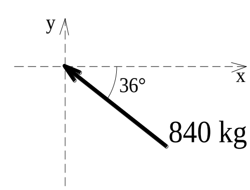
(*Sol. Fx*=42.9 N*;* *Fy*=37.5 N)

b)



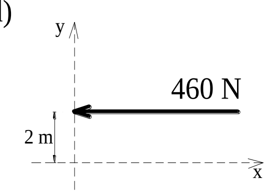
(Sol. *Fx*=-70.4 lb*;* *Fy*=132.4 lb)

c)



(Sol. *Fx*=-680 kg*;* *Fy*=494 kg)

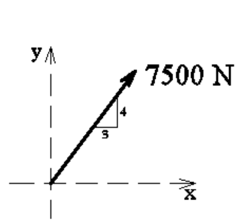
d)



(Sol. *Fx*= -460 N*;* *Fy*= 0)

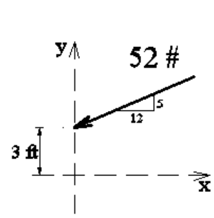
4. A continuación se da la pendiente de la línea de acción de cuatro fuerzas. ¿Cuáles son las componentes cartesianas de cada una de ellas?

a)



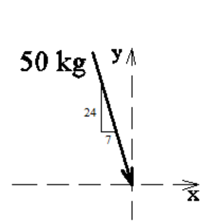
(*Sol. Fx*=4500 N*;* *Fy*=6000 N)

b)



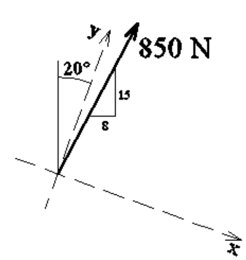
(Sol. *Fx*=-48 lb*;* *Fy*=-20 lb)

c)



(Sol. *Fx*=14 kg*;* *Fy*=48 kg)

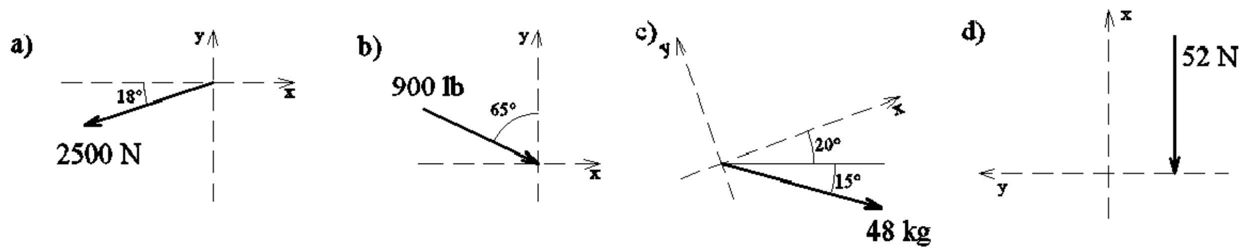
d)



(Sol. *Fx*=247 N *Fy*=813 N)

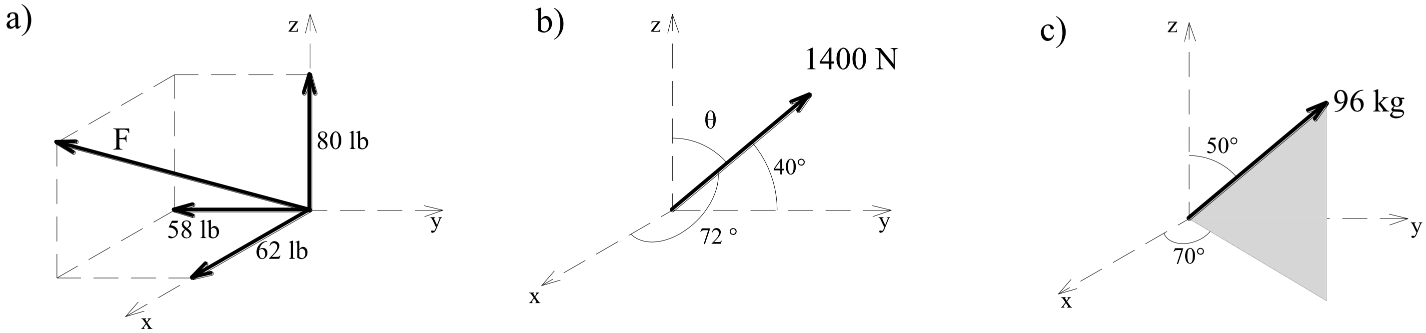
.

5. ¿Qué vectores representan las siguientes cuatro fuerzas? Escríbalos en forma polinómica (o normal).



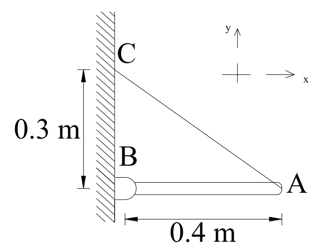
(*Sol.* -2380**i** - 773**j** [N]) (*Sol.* 816**i** - 380**j** [lb]) (*Sol.* 39.3**i** -27.5**j** [kg]) (*Sol.* -52**i** [N])

6. Escriba, en forma polinómica, los vectores que representan las tres fuerzas siguientes.

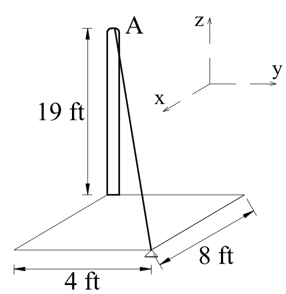


(*Sol.* 62**i** - 58**j** + 80**k** [lb]) (*Sol.* 433**i** + 1072**j** + 789**k** [N]) (*Sol.* 25.2**i** + 69.1**j** + 61.7**k** [kg])

7. La tensión de la cuerda que soporta la barra es de 750 N. ¿Cuáles son las componentes cartesianas de la fuerza que la cuerda ejerce sobre el extremo *A* de la barra? ¿Qué vector puede representarla?
(*Sol.* F_x = -600 N; F_y = 450 N; **F** = -600**i** + 450**j** [N])



8. El cable que sujeta el poste de la figura sufre una tensión de 210 lb. Diga qué vector representa la fuerza que el cable ejerce sobre el extremo *A* del poste.
(*Sol.* **F** = 80**i** + 40**j** - 190**k** [lb])



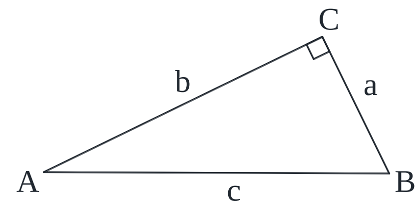
Epílogo

Con este trabajo hemos pretendido mostrar cómo pueden obtenerse las componentes de una fuerza, apoyados en el principio de Stevin. Vimos cómo los procesos de composición y resolución de una fuerza son procesos contrarios que sirven para obtener distintos sistemas de fuerzas equivalentes. Dichos procesos servirán al estudiante no sólo para el estudio de los sistemas de fuerzas, sino también para componer y descomponer otras cantidades vectoriales.

.

Apéndice. Notas de trigonometría

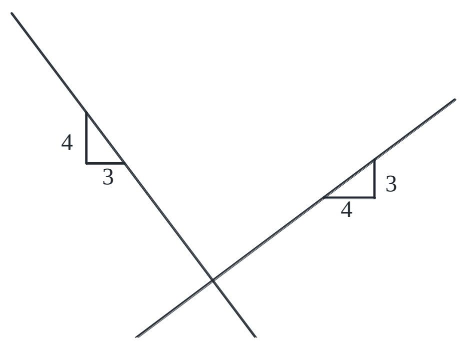
1. Principales funciones trigonométricas



En la figura se presenta un triángulo rectángulo (o sea, que uno de sus ángulos es recto). Hemos empleado letras mayúsculas para designar los ángulos, y las letras minúsculas correspondientes, para los lados opuestos. El ángulo *C* es recto, y *A* y *B* son complementarios, ya que sumados dan uno recto. El lado opuesto al ángulo recto, que es el más largo, se llama *hipotenusa* (pues en griego esa palabra significa “tendida abajo”); los otros dos lados, los que forman el ángulo recto, se llaman *catetos* (palabra que indica que son perpendiculares entre sí).

Las tres principales funciones trigonométricas con el seno, el coseno y la tangente de un ángulo, son tres razones (o cocientes). El seno es la razón del cateto opuesto al ángulo, a la hipotenusa (es decir, el cociente del cateto opuesto entre la hipotenusa. El coseno es la razón del cateto adyacente a la hipotenusa. Y La tangente, la razón del cateto opuesto al adyacente.

Según acabamos de establecer, podemos escribir:

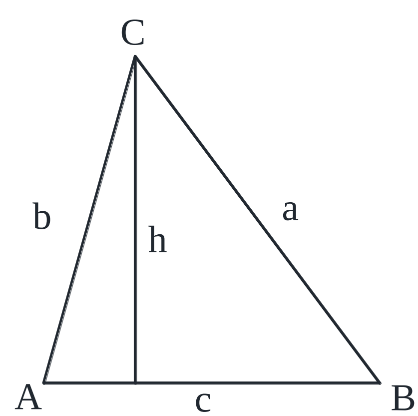


$$sen\ A = \frac{a}{c} \qquad cos\ A = \frac{b}{c} \qquad sen\ A = \frac{a}{b}$$

Conviene notar que el coseno de cualquiera de los ángulos es igual al seno de su complemento.

La tangente del ángulo que una recta forma con la horizontal se llama *pendiente*. Así, si un camino se eleva 5 m por cada 100 que avanza, su pendiente es 5/100, o bien, 5 %. Dos rectas perpendiculares tienen pendientes inversas: si un tiene una pendiente de 3/4, su perpendicular la tiene de 4/3.

2. Teorema de los senos



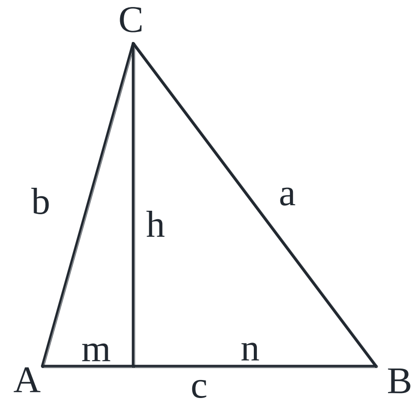
Este teorema —que con frecuencia se conoce con el desafortunado nombre de ley— establece que *en todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos*. Simbólicamente podemos escribir:

La demostración es la siguiente. Sea un triángulo cualquiera (es decir, sin hipotenusa ni catetos) *ABC*, como se muestra en la figura. Trazamos una perpendicular a la base *c* que pase por el vértice *C*, que corresponde a la altura *h*. Tenemos ahora dos triángulos rectángulos y sus hipotenusas son *a* y *b*, mientras que *h* es el cateto opuesta tanto al ángulo *A* como al *B*, Por tanto

.

La igualdad que falta se obtiene eligiendo otra de las alturas del triángulo y siguiendo el mismo proceso.

3. Teorema de los cosenos



El teorema de los cosenos, malamente llamado también ley de los cosenos, establece que *en todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble pro-ducto de esos mismos lados multiplicado por el coseno del ángulo que forman entre sí*. Simbólicamente, escogiendo el lado *A*, se escribe así:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Lo demostraremos de la siguiente manera. Sea un triángulo cualquiera *ABC*. Levantamos una perpendicular a la base *c* que pase por el vértice *C*, que viene a ser una altura *h*, como se muestra en la figura. Se forman dos triángulos rectángulos cuyas bases son *m* y *n*, de modo que $c = m + n$; o sea, $n = c - m$, y $\cos A = m/b$, o bien, $m = b \cos A$. Del teorema de Pitágoras, $m^2 + h^2 = b^2$ y $n^2 + h^2 = a^2$; restando miembro a miembro obtenemos $m^2 - n^2 = b^2 - a^2$. Sustituyendo *n* por su valor, podemos escribir $m^2 - (c - m)^2 = b^2 - a^2$. Desarrollando el binomio tenemos $m^2 - (c^2 - 2cm + m^2) = b^2 - a^2$. Simplificando queda $c^2 + 2cm = b^2 - a^2$. Ahora sustituimos *m* por su valor: $c^2 + 2cb \cos A = b^2 - a^2$. Por último, ordenamos de la siguiente manera:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Como es lógico, si se construye el triángulo sobre las otras bases, se obtiene las siguientes expresiones:

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

.