# Monografía de momentos

Elaboró: Ing. Diego Alberto Zavala Galicia

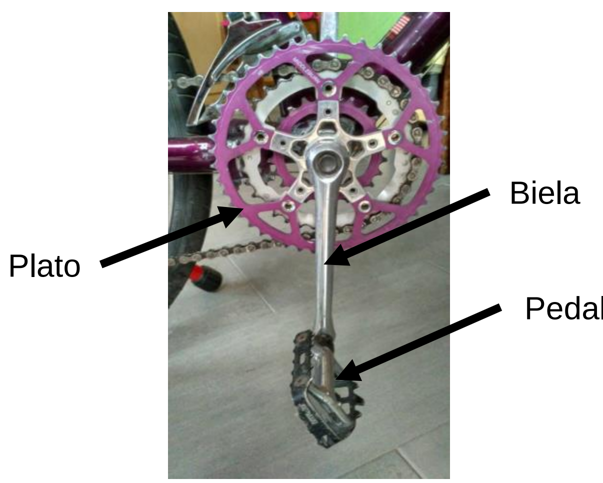
## Introducción

En esta monografía se expone los elementos necesarios para que el alumno comprenda el tema de momento de una fuerza. Este trabajo comienza definiendo los que es el momento de una fuerza mediante un ejemplo cotidiano y empieza a tratar el tema en el plano, mencionando las características y el cálculo de momentos de fuerzas coplanares. También se expone la demostración del teorema de Varignon y se resalta su utilidad.

Antes de introducir al alumno al cálculo de momentos de una fuerza en el espacio se realiza un repaso del producto vectorial de dos vectores como son su definición, interpretación geométrica y la manera de calcularlo a partir de dos vectores expresados en forma polinomial. Lo anterior servirá para que el alumno comprenda su utilidad en el la obtención de momentos en el espacio. Finalmente, la monografía menciona el cálculo de momentos de una fuerza con respecto a cualquier eje en el espacio.

## Momento de una fuerza

Antes de definir el concepto de momento, consideremos el siguiente ejemplo. Consideremos una bicicleta y enfoquémonos a las partes del pedal, la biela y el plato, como se muestra en la siguiente figura [1].

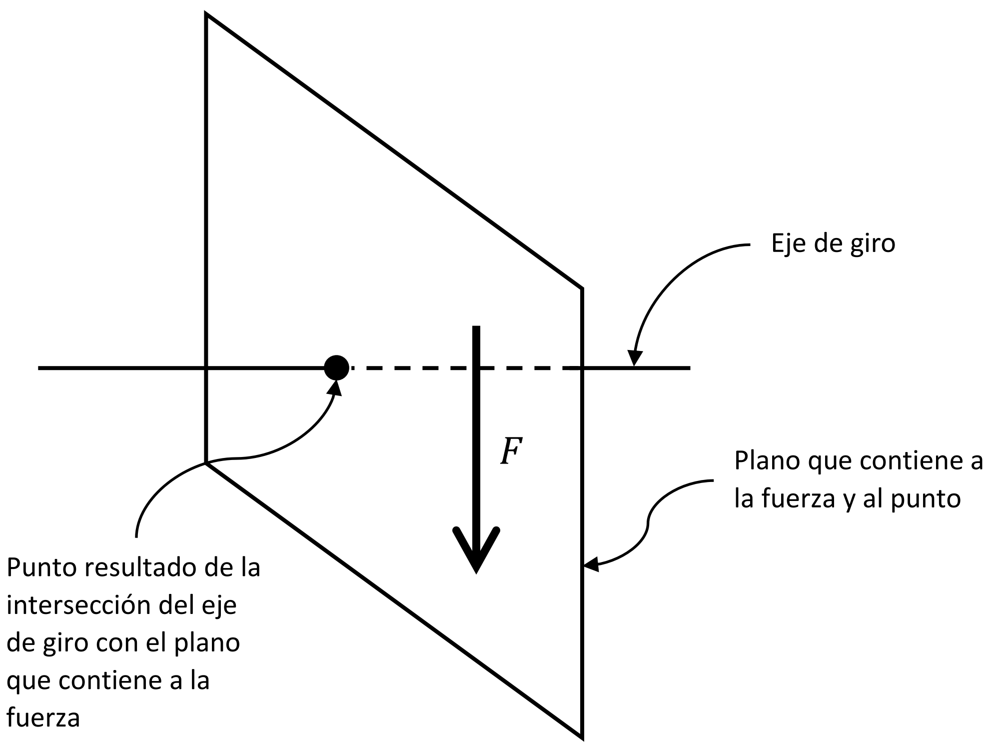



Cuando una persona empuja el pedal, esto hace que la biela haga girar el plato alrededor de un eje que pasa por la articulación en donde está colocado. Este efecto de giro del plato se conoce como momento de una fuerza.

El momento de una fuerza se define como la tendencia a girar alrededor de un eje que la fuerza produce sobre un cuerpo. Esta tendencia a girar se conoce también como par de torsión, pero con mayor frecuencia se denomina el momento de una fuerza o simplemente el momento.

## Momento de una fuerza con respecto a un punto

Si consideramos el ejemplo anteriormente expuesto, la fuerza que aplica el pie del ciclista se presenta en un plano vertical y el eje sobre el cual gira el plato interseca con dicho plano. La intersección del plano y el eje da como resultado un punto, como se muestra en la siguiente figura.



Debido a lo anterior, el momento de una fuerza con respecto a un punto es el momento de la fuerza respecto a un eje que pasa por el punto y es perpendicular al plano definido por la línea de acción de la fuerza y el punto.

Dado que comenzaremos con el cálculo de momentos de fuerzas que se encuentran contenidas en un plano, es importante que consideremos con respecto a que punto se va a realizar el cálculo.

El momento que produce la fuerza F con respecto del punto A, lo representaremos como:

$$M_A^F$$

El superíndice nos indica la fuerza cuyo momento se debe calcular y el subíndice recibe el nombre de centro de momento o c.m., en este caso el punto A, que es el punto respecto al cual se calcula el momento.

El momento de una fuerza respecto a un punto tiene las siguientes características:

1) *Magnitud*

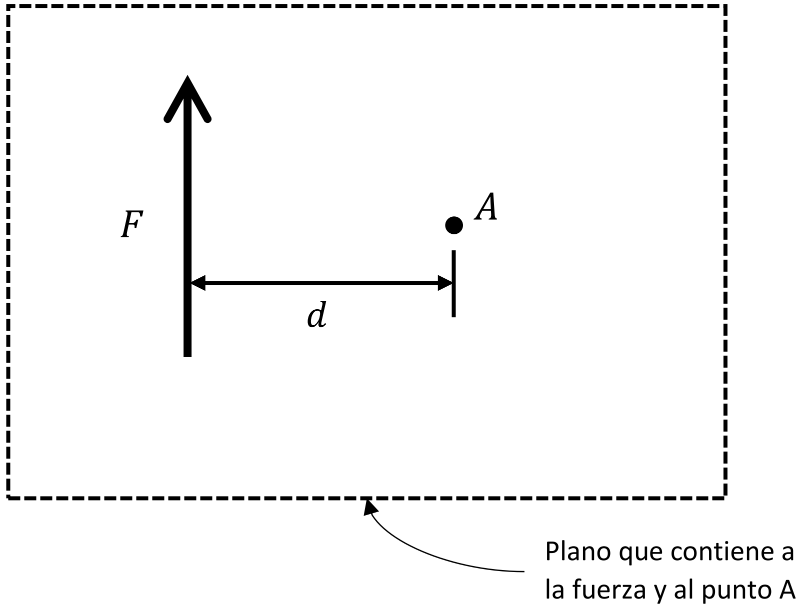
Y podemos calcular su magnitud con base en la siguiente fórmula:

$$M_A^F = F \cdot d$$

Donde:

$F$: Es la magnitud de la fuerza en estudio

$d$: Es la distancia perpendicular entre la línea de acción de la fuerza y el punto A, como se muestra a continuación:

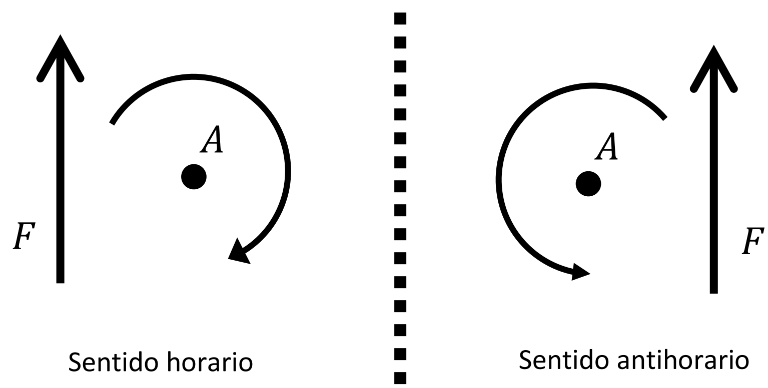



Las unidades del momento de una fuerza con respecto un punto en el Sistema Internacional es:

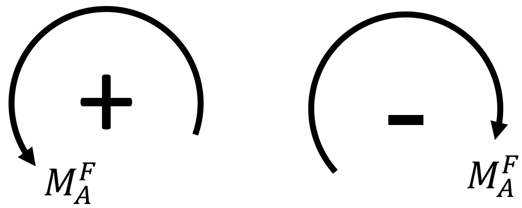
$$[M_A^F]_u = N \cdot m$$

2) Sentido

El sentido del momento de la fuerza nos indica el sentido de la tendencia de giro que ocasiona la fuerza, el cual puede ser en sentido de las manecillas del reloj (horario) o en el sentido contrario (antihorario).

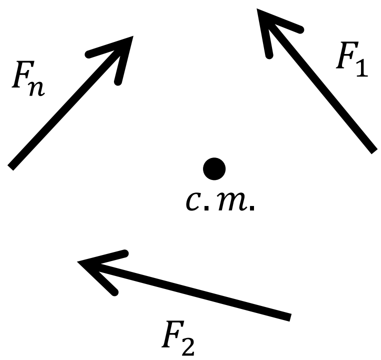



Se establece una convención de signos para los dos sentidos de los momentos (horario y antihorario), mencionando que los momentos en sentido antihorario les corresponde un signo positivo y a los momentos en sentido horario les pertenece el signo negativo.

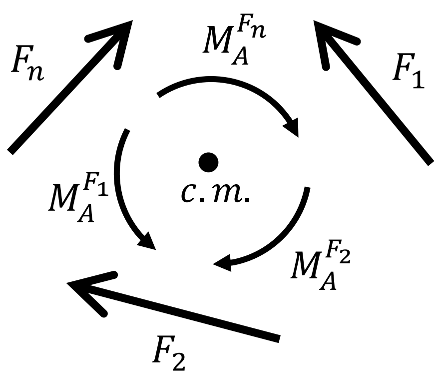



Es importante mencionar que nosotros podemos cambiar esta convención y esto no afectará los resultados, como veremos más adelante.

En los problemas puede presentarse que existan varias fuerzas y se nos pida calcular el momento de todas ellas con respecto a un punto en específico (centro de momento), como se muestra a continuación:




entonces, cada fuerza producirá un momento con respecto al centro de momento, como se muestra a continuación:




Para conocer el efecto de giro de las fuerzas podemos obtener la suma de los momentos, la cual se obtiene con la suma algebraica de los momentos (considerando la convención de signos).

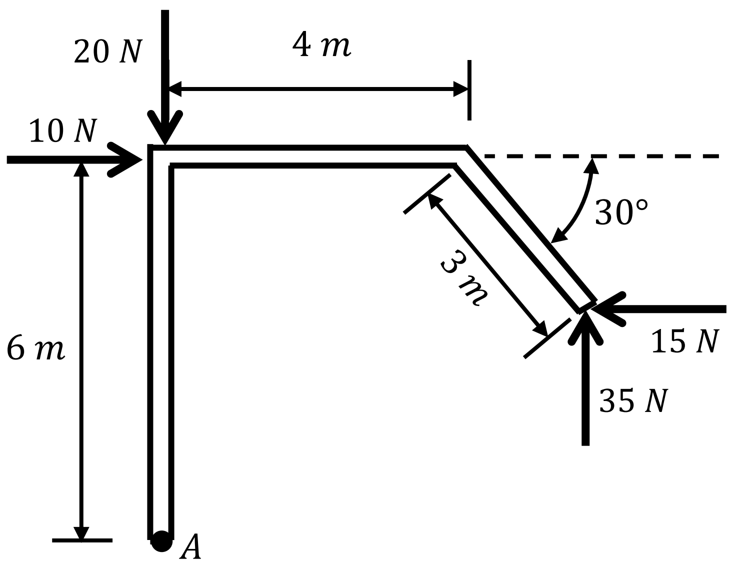
$$M_{c.m.} = \sum_{i=1}^{n} M_{c.m.}^{F_i} = \sum_{i=1}^{n} F_i d_i$$

Donde $n$ es el número de fuerzas que producen momento con respecto del centro de momento.

Ahora resolveremos un ejemplo para aplicar los conceptos mencionados.

**Ejemplo 1**

Determine la suma de momentos de las fuerzas que actúan en el cuerpo con respecto del punto A. Considere despreciable el espesor del cuerpo.




**Solución**

Nos piden calcular la suma de momentos de las fuerzas que se muestran con respecto de A, entonces:

$$M_A = \sum_{i=1}^{4} M_A^{F_i} = \sum_{i=1}^{4} F_i d_i$$

Ahora se determinarán los momentos de las fuerzas:

- Observe que la línea de acción de la fuerza de $10\ N$ es horizontal, de modo que la distancia perpendicular al punto A es de 6 m.

$$M_A^{F_1} = (10)(6) = 60\ N \cdot m\ \curvearrowright$$

- Ahora la línea de acción de la fuerza de $20\ N$ es vertical y contiene al punto A, de modo que la distancia perpendicular al punto A es cero.

$$M_A^{F_2} = (20)(0) = 0\ N \cdot m$$

- Para determinar la distancia perpendicular que tiene la fuerza de $15\ N$ con respecto de A, se debe obtener el cateto vertical del triángulo rectángulo que se muestra y restar esa cantidad a los 6 m, posteriormente se calcula el momento.

$$d_3 = 6 - 3\ Sen(30°) = 4.5\ m$$

$$M_A^{F_3} = (15)(4.5) = 67.5\ N \cdot m \ \curvearrowleft$$

- De igual forma para la fuerza de $35\ N$, la distancia perpendicular al punto A y se calcula su momento

$$d_4 = 4 + 3\ Cos(30°) = 6.59\ m$$

$$M_A^{F_4} = (35)(6.59) = 231\ N \cdot m \ \curvearrowleft$$

Como todos los momentos se calculan respecto al centro de momento (punto A), se realizará la suma algebraica para obtener el momento resultante, siguiendo la convención de signos presentada anteriormente.

$$M_A = \sum_{i=1}^{4} M_A^{F_i} = -60 + 0 + 67.5 + 231 = +239\ N \cdot m$$

$$M_A = 239\ N \cdot m \ \curvearrowleft$$

Observe que, si se cambia la convención de signos, es decir, los momentos horarios son positivos y los antihorarios negativos, se obtiene el mismo resultado:

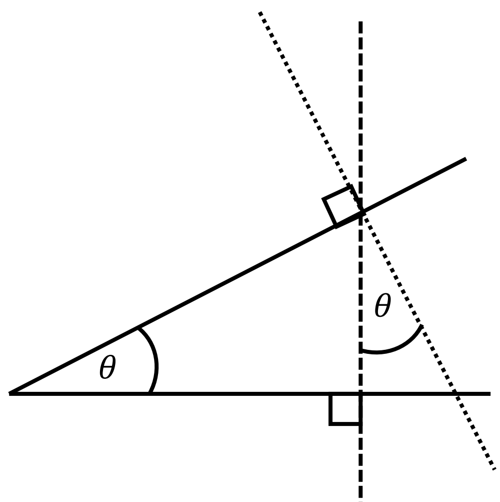
$$M_A = 60 + 0 - 67.5 - 231 = -239\ N \cdot m$$

$$M_A = 239\ N \cdot m \ \curvearrowleft$$

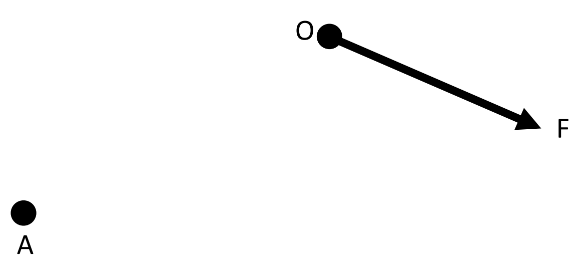
# Teorema de Varignon

A veces resulta más fácil determinar los momentos de las componentes de una fuerza que el momento de la propia fuerza. Para eso el matemático francés Varignon (1654 – 1722) desarrollo un teorema que lleva su nombre o también es conocido como el principio de momentos de momentos y establece que: “El momento de una fuerza con respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de las componentes de la fuerza con respecto al punto”.

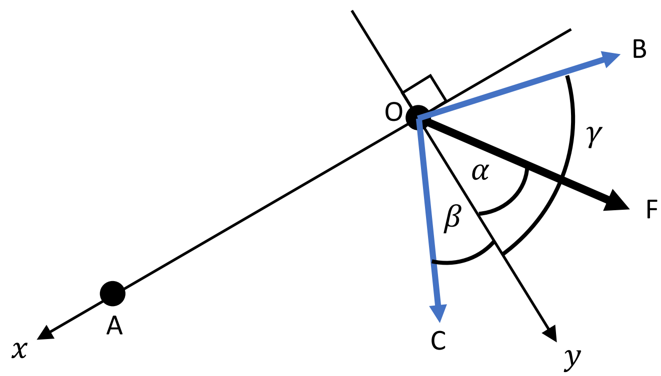
Antes de realizar la demostración es importante recordar un teorema geométrico, el cual menciona que sí dos rectas se cortan formando un ángulo, éste será semejante al que forman sus perpendiculares, como se ilustra a continuación




Con este antecedente podemos proceder a demostrar el teorema de Varignon, para esto consideremos que tenemos una fuerza cuya línea de acción contiene al punto O y se desea calcular el momento de la fuerza con respecto al punto A.




Vamos a trazar el eje de las “x” pasando por los puntos A y O, a su vez el eje de las “y” será perpendicular a este último. La fuerza F se descompondrá en dos componentes (B y C) que formarán los ángulos $\alpha, \beta$ y $\gamma$.




y con respecto al eje “y” se puede obtener que:

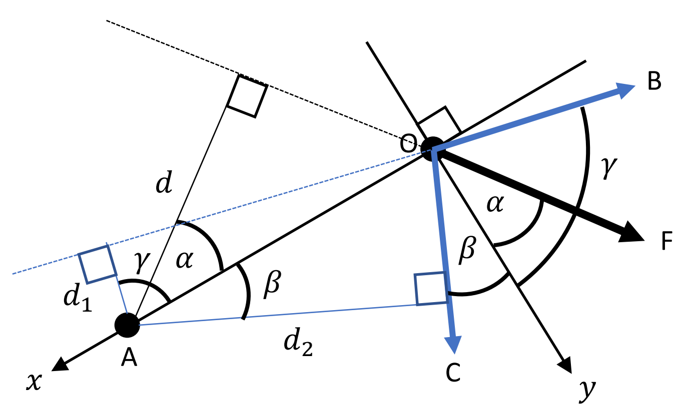
$$R = \sum F_y$$

$$F\ Cos\ \alpha\ = C\ Cos\ \beta + B\ Cos\ \gamma$$

si multiplicamos la expresión en ambos miembros por la distancia que hay entre los puntos O y A, se obtiene que:

$$F(OA)Cos\ \alpha\ = C(OA)Cos\ \beta + B(OA)\ Cos\ \gamma$$

Si ahora en el dibujo anterior se trazan perpendiculares a las líneas de acción de la fuerza y sus componentes (denotándolas con las letras $d, d_1\ y\ d_2$) y posteriormente aplicamos el teorema geométrico presentado al inicio de la demostración, se obtiene lo siguiente:



Podemos observar en la figura anterior que $d = OA\ Cos\ \alpha$, $d_1 = OA\ Cos\ \gamma$ y $d_2 = OA\ Cos\ \beta$, por lo cual:

$$Fd\ = Cd_2 + Bd_1$$

Que serían los momentos de la fuerza y sus componentes respecto al punto A:

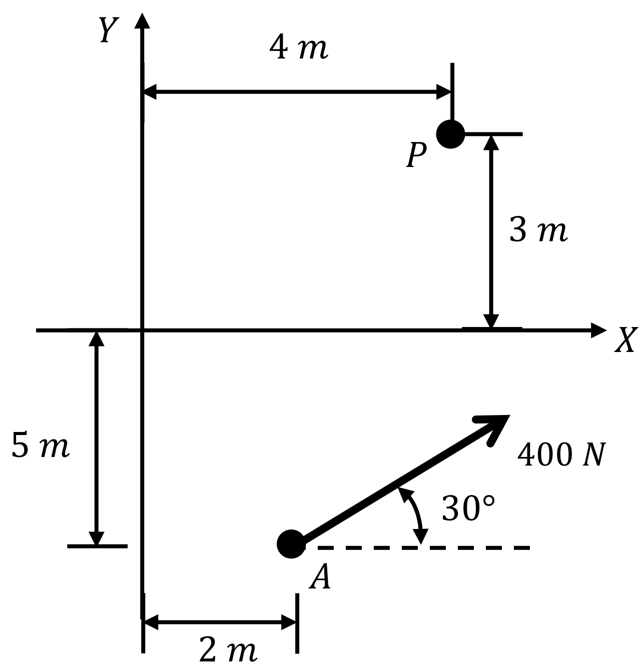
$$M_A^F\ = M_A^C + M_A^B$$

Quedando demostrado el teorema de Varignon: "El momento de una fuerza con respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de las componentes de la fuerza con respecto al punto".

Veamos su aplicación en un ejemplo:

**Ejemplo 2**

Determine el momento de la fuerza de 400 N presente en A con respecto al punto P.



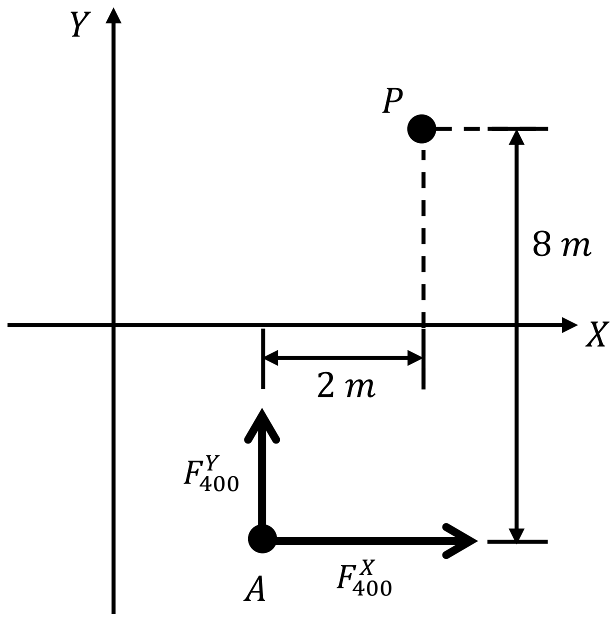

**Solución**

Se calculan las componentes rectangulares de la fuerza de $400\ N$ con respecto de los ejes cartesianos.

$$F_{400}^{X} = 400\ Cos(30°) = 346\ N$$

$$F_{400}^{y} = 400\ Sen(30°) = 200\ N$$

La ventaja es que se pueden determinar fácilmente las distancias de ambas componentes con respecto del punto P y así poder calcular los momentos respectivos.




$$M_{400}^{X} = (346)(8) = 2768\ N \cdot m \ \circlearrowleft$$

$$M_{400}^{y} = (200)(2) = 400\ N \cdot m \ \circlearrowright$$

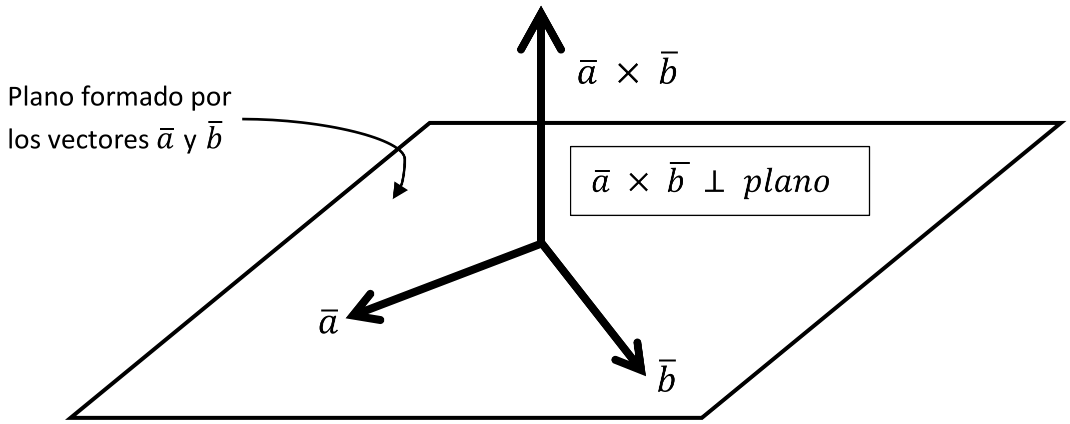
$$M_{P}^{400} = +\,2768 - 400 = 2368\ N \cdot m \ \circlearrowleft$$

Ahora comenzaremos a explicar el concepto del momento, cuando las fuerzas se encuentran en el espacio, pero antes de ello debemos revisar algunos antecedentes.

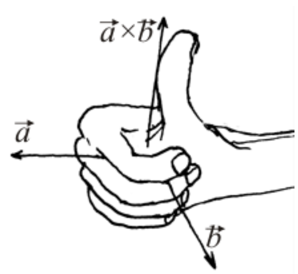
## Producto cruz

El producto cruz o producto vectorial es una operación binaria entre dos vectores en el espacio tridimensional. El resultado de esta operación es un vector que es perpendicular a ambos vectores, y por lo tanto normal al plano que los contiene.

Sí consideramos a los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$, el producto cruz de ambos se representará como $\bar{a} \times \bar{b}$. A continuación, se presenta una representación gráfica de dicha operación.



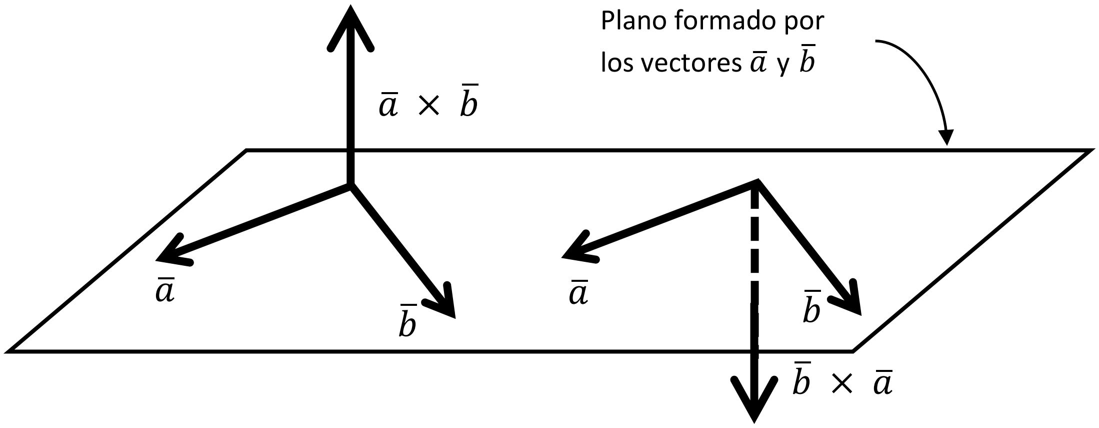

Una forma de conocer la dirección del producto cruz del dibujo anterior es mediante la regla de la mano derecha, que no dice que al enrollar los dedos de la mano derecha desde el vector $\bar{a}$ hacia el vector $\bar{b}$, la dirección del pulgar nos indica la dirección de $\bar{a} \times \bar{b}$.




Conviene mencionar que el producto cruz no es conmutativo:

$$\bar{a} \times \bar{b} \neq \bar{b} \times \bar{a}$$

Ya que los vectores resultantes tienen sentidos opuestos, como se puede apreciar en la siguiente figura:




Considerando dos vectores $\bar{a} \times \bar{b}$ que se expresan en forma polinómica como:

$$\bar{a} = a_x\hat{\imath} + a_y\hat{\jmath} + a_z\hat{k}$$

$$\bar{b} = b_x\hat{\imath} + b_y\hat{\jmath} + b_z\hat{k}$$

Para calcular su producto cruz se emplea:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

que consiste en desarrollar un determinante cuya primera fila de elementos consiste en los vectores unitarios $\hat{\imath}\,,\hat{\jmath}\; y\; \hat{k}$ y cuyas segunda y tercera filas representan las componentes $x\,,y$ y $z$ de los dos vectores.

Para desarrollar este determinante de 3 X 3 puede usarse tres menores, cada uno de los cuales es multiplicado por uno de los términos anotados en la primera fila, como se muestra a continuación:

Para el elemento $\hat{\imath}$ : $\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\imath}$

Para el elemento $\hat{\jmath}$ : $\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = -(a_x b_z - a_z b_x)\hat{\jmath}$

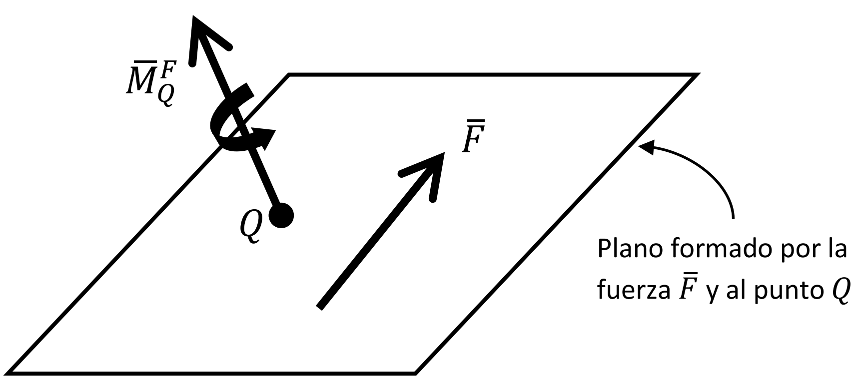
Para el elemento $\hat{k}$ : $\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\hat{k}$

De forma que:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \left(a_y b_z - a_z b_y\right)\hat{\imath} - (a_x b_z - a_z b_x)\hat{\jmath} + \left(a_x b_y - a_y b_x\right)\hat{k}$$

## Momento de una fuerza en el espacio

Para realizar el cálculo de los momentos de las fuerzas en el espacio, relacionaremos el momento de una fuerza respecto a un punto con un vector, el cual deberá ser perpendicular al plano definido por la línea de la fuerza y el punto (centro de momento), a su vez el sentido será asignado por la regla de mano derecha. Como ejemplo, consideremos una fuerza en el espacio $\bar{F}$ y un punto Q con respecto se va a calcular su momento. La fuerza y el punto forman un plano y el vector momento debe ser perpendicular al plano que forman ambos.




Lo anterior puede ser expresado usando el producto cruz como:

$$\bar{M}_Q^F = \bar{r} \times \bar{F}$$

Donde:

$\bar{M}_Q^F$ **:** es el momento de la fuerza $\bar{F}$ con respecto al punto Q

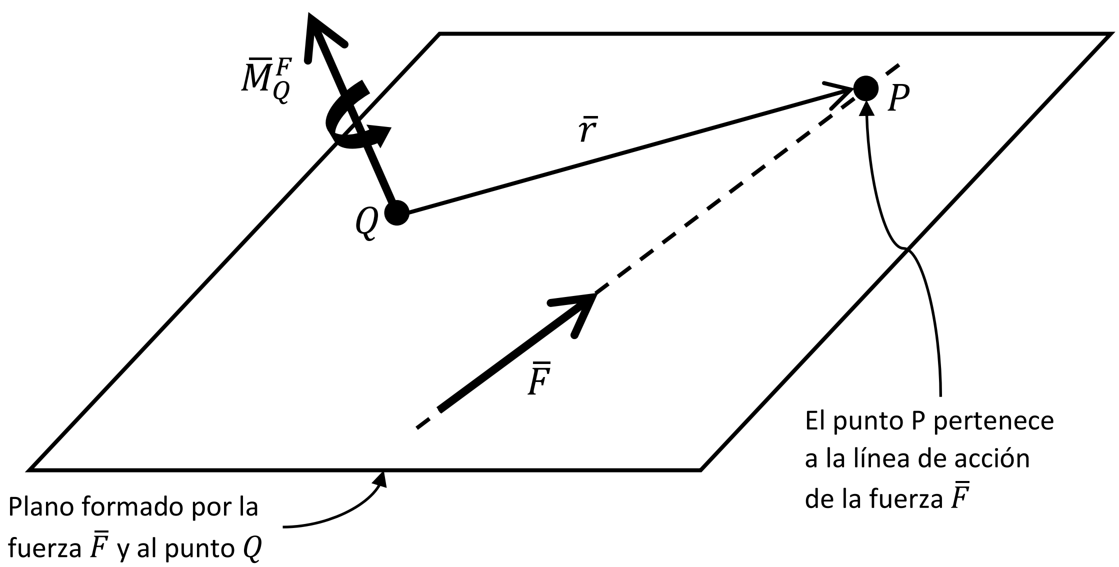
$\bar{r}$ **:** es el vector llamado brazo, que va del punto Q (centro del momento) a un punto cualquiera contenido en la línea de acción de $\bar{F}$

$\bar{F}$ **:** es la fuerza expresada en forma polinómica

Por lo tanto, el determinante de este producto cruz quedaría como:

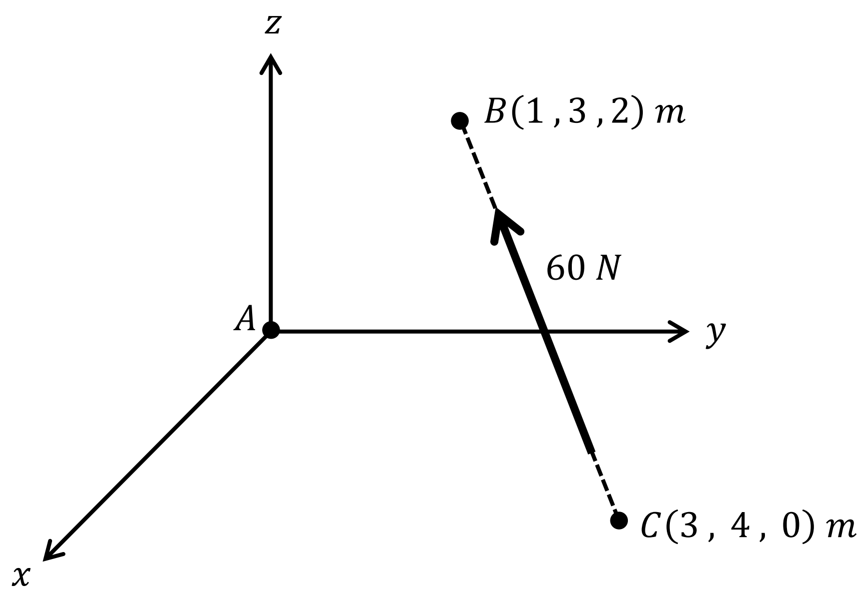
$$\bar{M}_Q^F = \bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

A continuación, se muestra un diagrama con los elementos mencionados:




**Ejemplo 3**

Determine el momento que ejerce la fuerza de 60 N de magnitud, dirigida de C a B, con respecto del punto A.




**Solución**

Se nos pide determinar el momento que ejerce la fuerza que se muestra en la figura con respecto del punto A (origen), lo primero a realizar es obtener la representación vectorial de la fuerza de 60 N, para ello:

$$\overline{F_{60}} = |\overline{F_{60}}|\overline{e_{CB}}$$

$$\overline{F_{60}} = |\overline{F_{60}}|\frac{\overline{CB}}{|\overline{CB}|}$$

$$\overline{CB} = B - C = (1\,,3\,,2) - (3\,,4\,,0) = (-2\,,-1\,,2)\;m$$

$$|\overline{CB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = 3\;m$$

$$\overline{F_{60}} = (60\;N)\frac{(-2\,,-1\,,2)\;m}{3\;m} = -40\hat{\imath} - 20\hat{\jmath} + 40\hat{k}\;N$$

Para determinar el brazo de palanca $\bar{r}$, recordemos que es un vector que va del centro de momento (punto A) a un punto cualquiera de la línea de acción de la fuerza, para este problema encontramos dos opciones:

$$\bar{r} = \begin{cases} \overline{r_{AB}} = \overline{AB} = (1\,,3\,,2)\;m \\ \\ \overline{r_{AC}} = \overline{AC} = (3\,,4\,,0)\;m \end{cases}$$

Por lo tanto:

$$\overline{M_A^{60}} = \overline{r_{AB}} \times \overline{F_{60}} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 3 & 2 \\ -40 & -20 & 40 \end{vmatrix}$$

$$\overline{M_A^{60}} = [4(40) - 2(20)]\hat{\imath} - [1(40) - 2(-40)]\hat{\jmath} + [1(-20) - 3(-40)]\hat{k}$$

o bien

$$\overline{M_A^{60}} = \overline{r_{AC}} \times \overline{F_{60}} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 3 & 4 & 0 \\ -40 & -20 & 40 \end{vmatrix}$$

$$\overline{M_A^{60}} = [4(40) - 0(20)]\hat{\imath} - [3(40) - 0(-40)]\hat{\jmath} + [3(-20) - 4(-40)]\hat{k}$$

En ambos casos

$$\overline{M_A^{60}} = 160\,\hat{\imath} - 120\,\hat{\jmath} + 100\,\hat{k} \quad N \cdot m$$

## Momento de una fuerza con respecto a un eje en el espacio

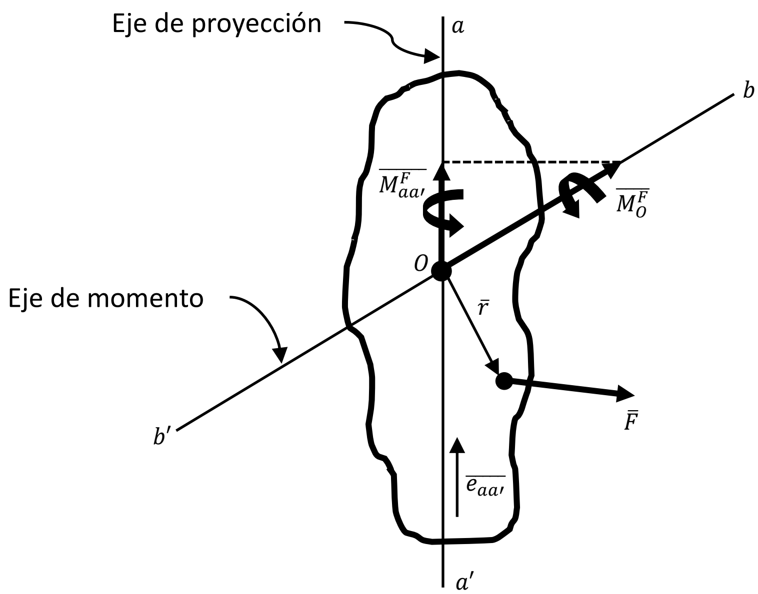
<u>Nota: profesor esta parte la modifiqué muy poco porque tuve una confusión en las correcciones que me mando, ya que no entiendo eso de “reconsiderar” el carácter vectorial de este tema y respetar el carácter escalar</u>

<u>Se me ocurre que exponga el caso de tener una fuerza en el espacio y descomponerla en sus componentes cartesianas y con el punto de la línea de acción obtener la distancia a los ejes y calcular los momentos de cada componente respecto a los ejes, no se si a eso se refiere??</u>

Recuerde que cuando se calcula el momento de una fuerza con respecto a un punto, el momento y su eje son siempre perpendiculares al plano que contiene a la fuerza y el brazo de momento. En algunos casos es importante encontrar la componente de este momento a lo largo de un eje específico que pasa por el punto.

Considere un cuerpo cualquiera, como el que se muestra en la figura, el cual está sometido a la fuerza $\overline{F}$ que actúa en el punto A. Se desea determinar el efecto de la fuerza $\overline{F}$ en su tendencia a girar el cuerpo alrededor del eje aa'. Esta tendencia a girar es medida por la componente de momento $\overline{M_{aa'}^{F}}$. Para determinar calculamos primero el momento de F con respecto a cualquier punto arbitrario O que se encuentre sobre el eje aa'. En este caso, $\overline{M_{O}^{F}}$ es expresado por el producto cruz $\overline{M_{O}^{F}} = \bar{r} \times \overline{F}$, donde $\bar{r}$ esta dirigido desde O hasta A. Aquí, $\overline{M_{O}^{F}}$ actúa a lo largo del eje de momento bb', y la componente o proyección de $\overline{M_{O}^{F}}$ sobre el eje aa' es entonces $M_{aa'}^{F}$, de forma que:

$$M_{aa'}^{F} = (\bar{r} \times \overline{F}) \cdot \overline{e_{aa'}}$$




Cuando $M_{aa'}^{F}$ sea evaluado con la expresión anterior, dará un escalar positivo o negativo. El signo de este escalar indica el sentido de dirección de $\overline{M_{aa'}^{F}}$ a lo largo del eje aa'. Si es positivo, entonces $\overline{M_{aa'}^{F}}$ tendrá el mismo sentido que $\overline{e_{aa'}}$, mientras que si es negativo, $\overline{M_{aa'}^{F}}$ actuará en sentido opuesto a $\overline{e_{aa'}}$.

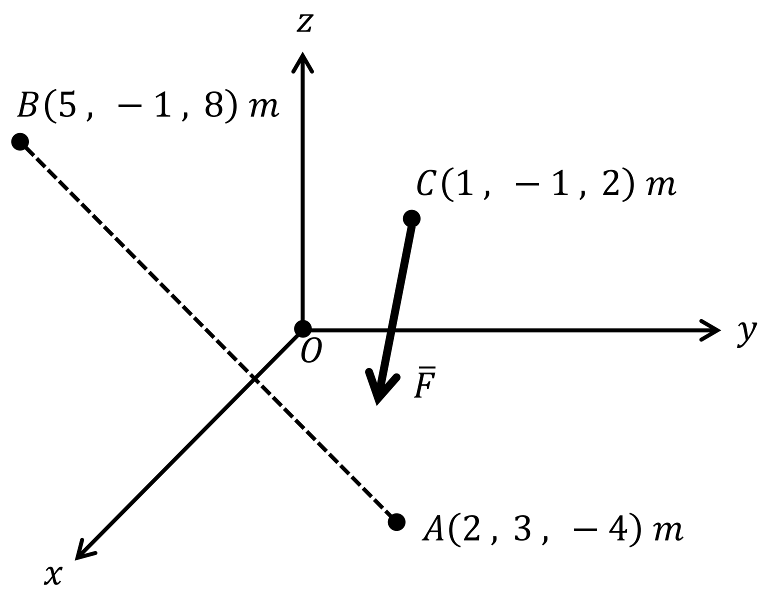
Una vez determinado $M_{aa'}^{F}$, podemos expresar a $\overline{M_{aa'}^{F}}$ como un vector cartesiano, de la siguiente manera:

$$\overline{M_{aa'}^{F}} = M_{aa'}^{F}\,\overline{e_{aa'}} = [(\bar{r} \times \overline{F}) \cdot \overline{e_{aa'}}\,]\,\overline{e_{aa'}}$$

**Ejemplo 4**

Considerando la fuerza $\overline{F} = 12\hat{\imath} - 8\hat{k}\ N$, cuya línea de acción pasa por $(1\,,-1\,,2)\ m$, así como los puntos A y B de la figura. Determine:

a) Obtenga el momento de la fuerza con respecto del eje recto orientado de A hacia B, tomando como base el momento de la misma respecto a B,
b) Obtenga el momento de la fuerza con respecto del eje recto orientado de B hacia A, tomando como base el momento de la misma respecto a A.




**Solución**

El momento de la fuerza respecto a B es:

$$\overline{M_B^F} = \overline{r_{BC}} \times \overline{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -4 & 0 & -6 \\ 12 & 0 & -8 \end{vmatrix} = -104\,\hat{\jmath}\quad N\cdot m$$

Debido a lo cual, el momento que se pide en el inciso a es:

$$\overline{M_{AB}^F} = \left[\overline{M_B^F}\ \cdot\ \overline{e_{AB}}\right]\overline{e_{AB}} = \left[(-104\,\hat{\jmath})\cdot\left(\frac{3\,\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath} + 12\,\hat{k}}{13}\right)\right]\overline{e_{AB}}$$

$$\overline{M_{AB}^F} = \frac{416}{13}\,\overline{e_{AB}} = \frac{32}{13}\left(3\,\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath} + 12\,\hat{k}\right)\ N\cdot m$$

De forma similar, para resolver el inciso b:

$$\overline{M_A^F} = \overline{r_{AC}} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ -1 & -4 & 6 \\ 12 & 0 & -8 \end{vmatrix} = 32\,\hat{\imath} + 64\,\hat{\jmath} + 48\,\hat{k} \quad N \cdot m$$

$$\overline{M_{BA}^F} = \left[\overline{M_A^F} \cdot \overline{e_{BA}}\right] \overline{e_{BA}}$$

$$\overline{M_{BA}^F} = \left[(32\,\hat{\imath} + 64\,\hat{\jmath} + 48\,\hat{k}) \cdot \left(\frac{-3\,\hat{\imath} + 4\,\hat{\jmath} - 12\,\hat{k}}{13}\right)\right] \overline{e_{BA}}$$

$$\overline{M_{AB}^F} = -32\,\overline{e_{BA}} = \frac{32}{13}\left(3\,\hat{\imath} - 4\,\hat{\jmath} + 12\,\hat{k}\right) \; N \cdot m$$

Observe que este resultado es igual al del inciso a, sin embargo, la componente en el inciso a es positiva y negativa en el inciso b.