Monografía: Pares de fuerzas

Par de fuerzas [1]:

Son dos fuerzas paralelas que tienen la misma magnitud y dirección, sentidos contrarios y separados por una distancia perpendicular "***d***" (figura 1).

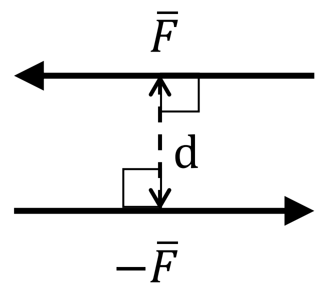

Figura 1. Par de fuerzas [1].

La suma vectorial de un par de fuerzas es nula, y el efecto que producen es un momento puro (tendencia a la rotación en una dirección especificada) sobre el sistema donde se aplica.

El momento producido por un par es equivalente al momento de cada una de sus fuerzas con respecto a cualquier punto arbitrario del espacio.

Demostración:

Sea un objeto cualquiera sujeto al par de fuerzas conformado por "$\boldsymbol{\bar{F}}$" y "$-\boldsymbol{\bar{F}}$", se desea calcular el momento que producen con respecto al punto "***O***" (punto cualquiera del espacio) (figura 2).

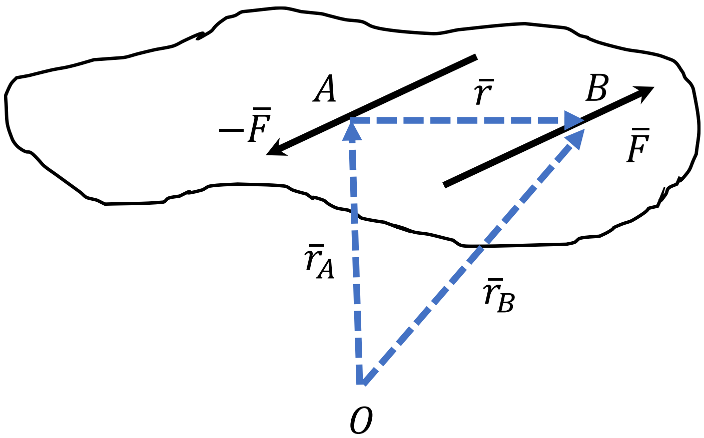

Figura 2. Par de fuerzas aplicado sobre un cuerpo cualquiera. Se conocen tres puntos, dos sobre las líneas de soporte de las fuerzas y un punto cualquiera del espacio [1].

Se calcula el momento resultante con respecto al punto "***O***" (ecuaciones 1 a 4):

$$\bar{M}_O = \bar{r}_A \times (-\bar{F}) + \bar{r}_B \times \bar{F} \tag{1}$$

$$\bar{M}_O = -\bar{r}_A \times \bar{F} + \bar{r}_B \times \bar{F} \tag{2}$$

$$\bar{M}_O = (-\bar{r}_A + \bar{r}_B) \times \bar{F} \tag{3}$$

$$\bar{M}_O = (\bar{r}_B - \bar{r}_A) \times \bar{F} \tag{4}$$

Por otra parte, analizando los vectores de posición (ecuaciones 5 y 6):

$$\bar{r}_A + \bar{r} = \bar{r}_B \tag{5}$$

$$\bar{r} = \bar{r}_B - \bar{r}_A \tag{6}$$

Y sustituyendo en la ecuación 4, obtenemos (ecuación 7):

$$\bar{M}_O = \bar{r} \times \bar{F} \tag{7}$$

Como se puede observar en la ecuación 7, el momento "$\boldsymbol{\bar{M}_O}$" que produce un par de fuerzas depende sólo del vector de posición relativo dirigido entre las fuerzas y no de los vectores de posición "$\boldsymbol{\bar{r}_A}$" ni "$\boldsymbol{\bar{r}_B}$", dirigidos a partir del punto "$\boldsymbol{O}$".

Se concluye que el momento producido por el par es un vector libre, puesto que no depende de ningún punto del espacio. El resultado será el mismo sin importar el punto que se elija como centro de momentos.

La expresión usada para el cálculo del momento de un par es (ecuación 8):

$$\bar{M}_{Par} = \bar{r} \times \bar{F} \tag{8}$$

Donde el vector de posición "$\boldsymbol{\bar{r}}$", representa un vector de posición trazado desde cualquier punto sobre la línea de acción de una fuerza hacía cualquier punto sobre la línea de acción de la otra.

Por otra parte, "$\boldsymbol{\bar{F}}$" representa la fuerza hacia donde se dirige "$\boldsymbol{\bar{r}}$". En cuanto a su formulación escalar, la magnitud del momento de un par es (ecuaciones 9 y 10):

$$|\bar{M}_{Par}| = |\bar{r}| \cdot |\bar{F}| \cdot \sin\theta \tag{9}$$

$$|\bar{M}_{Par}| = |\bar{F}| \cdot (|\bar{r}| \cdot \sin\theta) = F \cdot d \tag{10}$$

El ángulo “**Θ**” debe de construirse entre los inicios de vectores de "$\bar{\boldsymbol{r}}$" y "$\bar{\boldsymbol{F}}$". El vector "$\bar{\boldsymbol{r}}$" es un vector deslizante y está relacionado al brazo de palanca del par “**d**” mediante (figura 3, ecuación 11):

$$d = |\bar{r}| \cdot \sin\theta \tag{11}$$

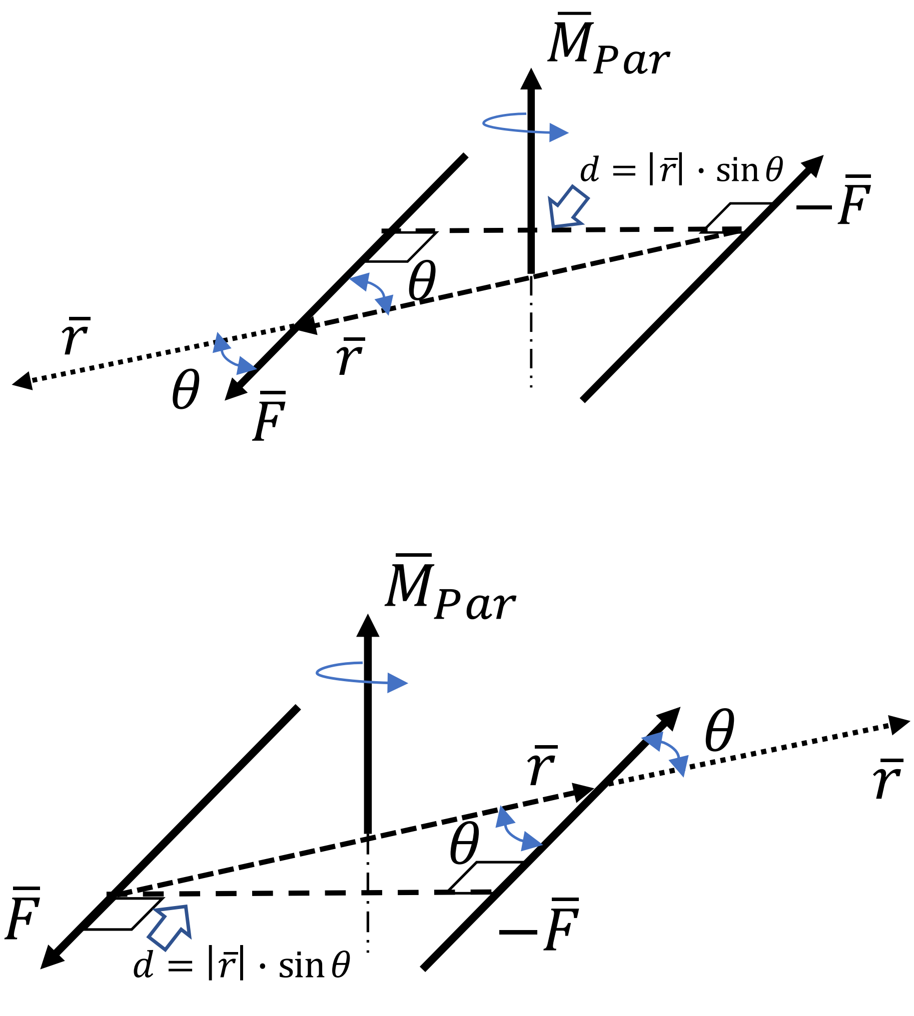

*Figura 3. Obtención del ángulo theta (“**Θ**”) como el ángulo entre los vectores "$\bar{\boldsymbol{r}}$" y "$\bar{\boldsymbol{F}}$", así como el cálculo de la distancia perpendicular “**d**” o brazo de palanca entre las fuerzas del par, bajo las dos circunstancias posibles del cálculo del par [1].*

Para obtener la dirección del momento del par "$\boldsymbol{\overline{M}_{Par}}$" es posible usar la *regla de la mano derecha,* doblando los dedos en el sentido de rotación que resulte de "$\boldsymbol{\bar{r}}$" hacia "$\boldsymbol{\bar{F}}$", o bien, en el sentido de rotación producido por las fuerzas del par; el pulgar apunta en la dirección de "$\boldsymbol{\overline{M}_{Par}}$" (figura 4). El momento del par "$\boldsymbol{\overline{M}_{Par}}$" siempre actúa perpendicular al plano que contiene a ambas fuerzas.

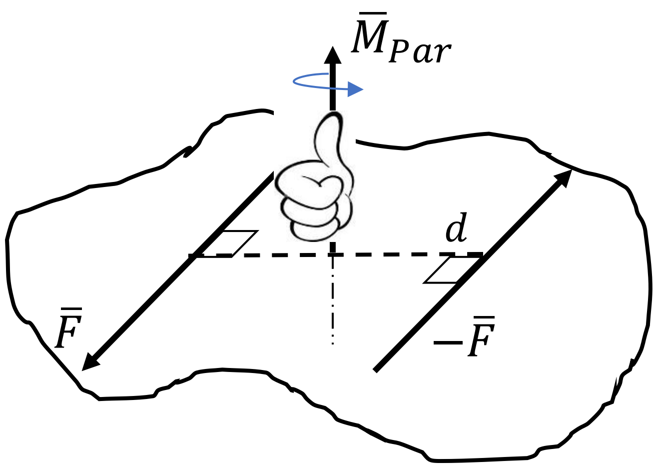

Figura 4. Obtención del momento producido por un par de fuerzas (“$\boldsymbol{\overline{M}_{Par}}$") mediante la aplicación de la regla de la mano derecha [1, 2].

Pares de fuerzas equivalentes [1]:

Se dice que dos pares son equivalentes si producen el mismo vector par. Se requiere que las fuerzas de los pares equivalentes se localicen en un mismo plano o en planos paralelos entre si. De esta forma la línea de acción de cada vector par que se obtenga será la misma y perpendicular a los planos paralelos.

Par resultante [1]:

Como ya se ha descrito antes, los momentos generados por pares de fuerzas son vectores libres. Para obtener el momento resultante de varios pares aplicados a un mismo objeto, se realiza una suma vectorial como si fuesen vectores concurrentes en un punto cualquier del espacio (figura 5).

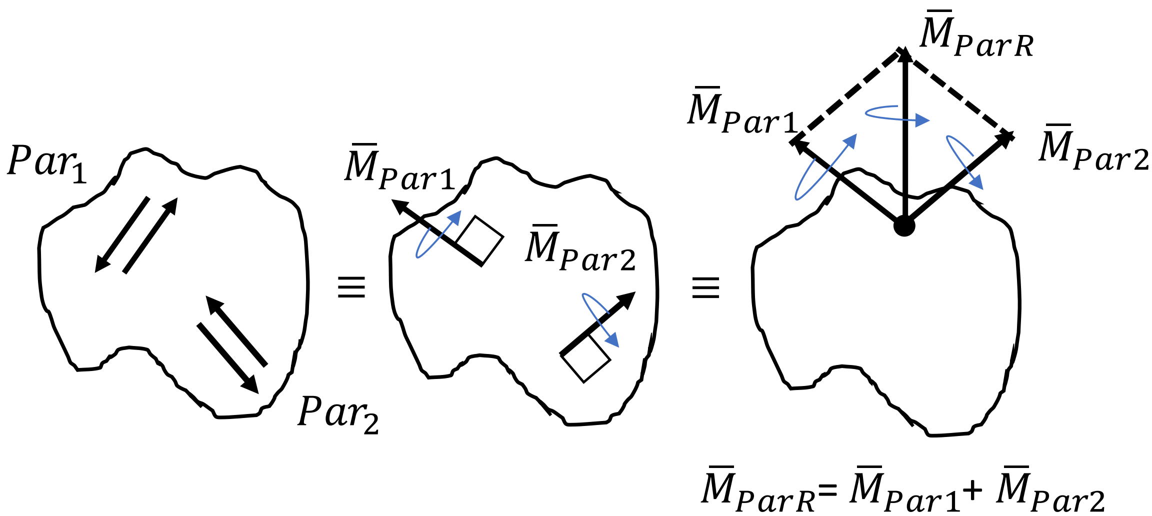

Figura 5. Obtención del momento resultante a partir de los varios pares de fuerzas que se aplican a un mismo objeto. Este momento es la resultante de la suma vectorial de los momentos producidos por cada par de fuerzas [1].

Principio estático de superposición (Principio de agregación y exclusión de fuerzas, invariabilidad) [3]:

"Si a un sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido le añadimos o de él eliminamos un sistema de fuerzas en equilibrio, los efectos externos manifestados por el cuerpo no se alteran."

Par de Transporte [3]:

Teorema: "El par de transporte necesario para trasladar una fuerza dada a un nuevo soporte que pase por un punto dado del espacio tiene por vector par el momento de la fuerza con respecto a dicho punto."

Suponga un sistema de fuerzas tal y como se muestra en la figura 6:

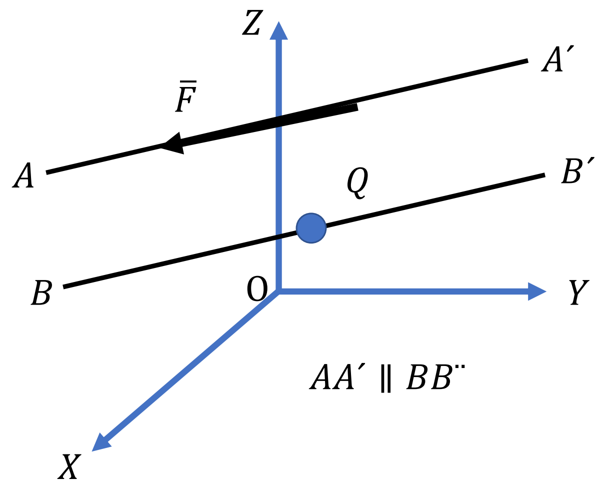

*Figura 6. Sistema de fuerzas conformado por la fuerza "$\bar{\boldsymbol{F}}$" y dos rectas paralelas " **AA´** " y " **BB´** " [3].*

Por alguna razón de estudio, se desea trasladar la fuerza "$\bar{\boldsymbol{F}}$" de su línea de soporte " **AA´** " al punto "**Q**" que pertenece a la recta " **BB´** ", la cual es paralela a la recta " **AA´** ".

Si se aplica el *Principio de Superposición,* se puede agregar un sistema de fuerzas en equilibrio sobre el punto "**Q**" tal y como se muestra en la figura 7, y no se alterarán las condiciones del sistema de fuerzas descrito:

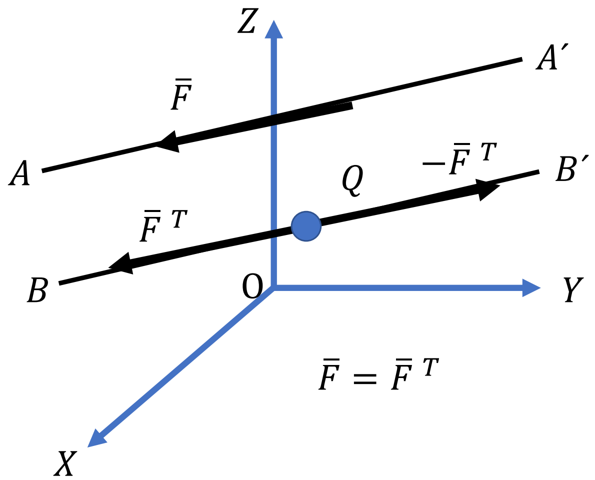

*Figura 7. Sistema de fuerzas con un sistema de fuerzas en equilibrio agregado sobre el punto "**Q**" [3].*

Hay que aclarar que la fuerza "$\boldsymbol{\bar{F}^{T}}$" agregada al sistema posee la misma magnitud, dirección y sentido que la fuerza original "$\boldsymbol{\bar{F}}$". Con la única diferencia que su punto de aplicación es "**Q**" que pertenece a la recta " **BB´** " (la cual es paralela a " **AA´** ").

Puesto que también se agregó la fuerza "$\boldsymbol{-\bar{F}^{T}}$" al sistema, se forma un sistema en equilibrio que no altera las condiciones originales. Sin embargo, es posible obtener un sistema equivalente de fuerzas en donde la fuerza resultante es la fuerza "$\boldsymbol{\bar{F}^{T}}$", cuyo punto de aplicación es "**Q**" o cualquier otro punto de la recta " **BB´** " (esto se debe a que "$\boldsymbol{\bar{F}^{T}}$" es un vector deslizante).

Adicionalmente, las fuerzas "$\boldsymbol{\bar{F}}$" y "$\boldsymbol{-\bar{F}^{T}}$" forman un par de fuerzas cuyo momento es un vector libre e igual al momento que produce la fuerza "$\boldsymbol{\bar{F}}$" con respecto al punto "**Q**" o cualquier punto sobre la recta " **BB´** " (figura 8).

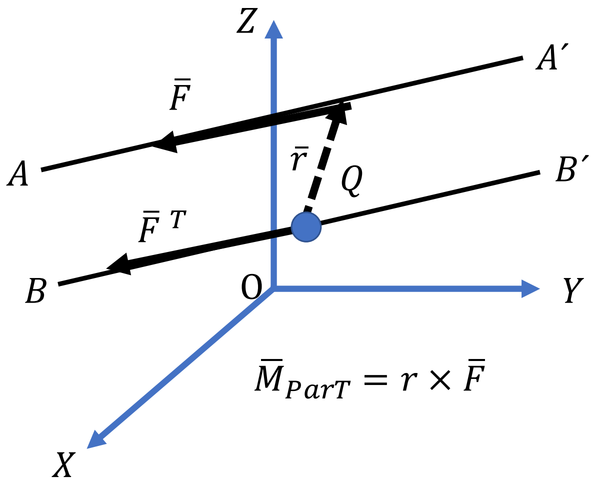

Figura 7. Sistema de fuerzas equivalente donde la resultante es la fuerza "$\bar{\boldsymbol{F}}^{\boldsymbol{T}}$" y el momento producido por el par de fuerzas "$\bar{\boldsymbol{F}}$" y "$-\bar{\boldsymbol{F}}^{\boldsymbol{T}}$" es igual a "$\bar{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{ParT}}$" [3].

El par de fuerzas "$\bar{\boldsymbol{F}}$" y "$-\bar{\boldsymbol{F}}^{\boldsymbol{T}}$" se les conoce como *par de transporte*.

Referencias:

[1] Hibbeler, R.C. (1984). *Mecánica para Ingenieros: Estática*. México: CECSA. Págs. 113 - 121.

[2] Flores Etéreas. (2017). *Flores Etéreas*. agosto 20, 2017, de Flores Etéreas Sitio web:

http://flores-etereas.blogspot.mx/

[3] Ordónez, L., Betancourt, S. & Reyes, P. (1987). *Mecánica Vectorial para Ingenieros Estática*. México: CECSA. Págs. 185, 239 - 241