**José Alberto Arellano Figueroa** **elaboración: mayo del 2018**

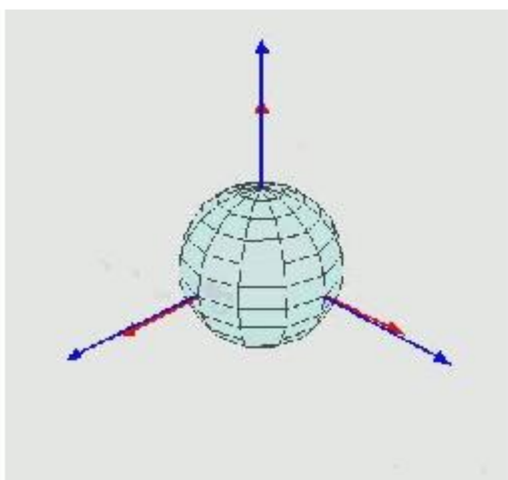
# RESULTANTES DE LOS SISTEMAS DE FUERZAS QUE ACTÚAN SOBRE EL CUERPO RÍGIDO

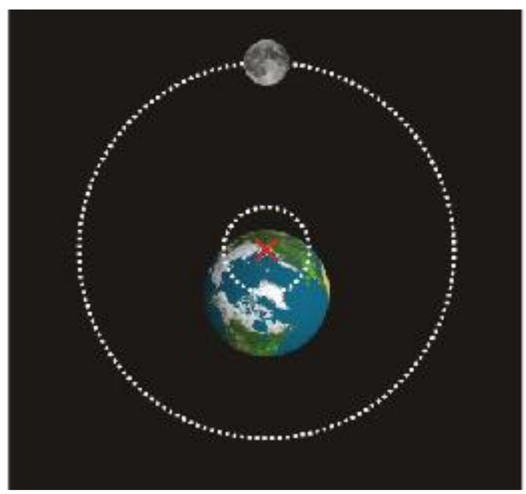
Las siguientes líneas abordan el tema de los “sistemas de fuerzas equivalentes”, proveniente del temario de la asignatura de Estática, se trata de manera general con algunos ejemplos.

**Momentos de una fuerza con respecto a un punto y a un eje.**

Los efectos de las fuerzas dadas sus magnitudes y direcciones, pueden producir además de movimientos de traslación (movimiento que cambia de posición al cuerpo rígido en cuestión), movimientos de rotación (movimiento que cambia la orientación del cuerpo rígido en cuestión con respecto de un punto o eje que permanece fijo).

**Por tanto podríamos definir el *momento de una fuerza* como: “Los giros o movimientos rotacionales, son *efectos* propios de las fuerzas llamados momentos” o bien, el momento establece la tendencia de la fuerza que se aplica sobre un cuerpo para hacerlo rotar alrededor de un eje fijo (eje de momento) .**



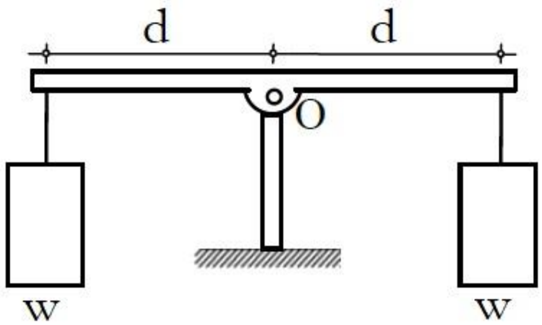


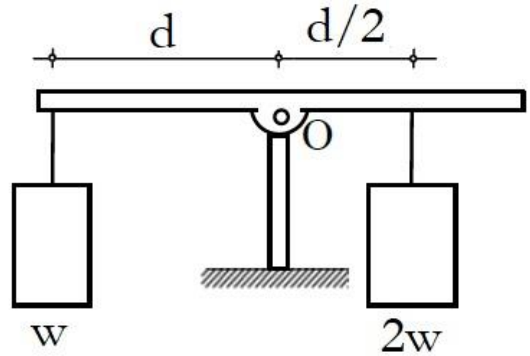
Por ejemplo, en los motores de automóvil, los momentos producen el giro del cigüeñal que se transmite hacia las ruedas del vehículo; las misas ruedas están sujetas a ellos, los motores eléctricos producen giros de un eje a partir de corriente eléctrica qué, dependiendo del uso pueden contener, hélices, brocas, aspas, etc…

Para visualizar la raíz de este concepto, pondremos el caso antiquísimo de la balanza de platillos. Consiste en una barra muy ligera, articulada en su centro y en sus extremos penden pesos de magnitud “W”. Cada brazo de la balanza mide una distancia “d” y si suponemos que los pesos son iguales, están en equilibrio. Si quitamos el peso de la derecha o izquierda, la barra tiende a girar alrededor del eje horizontal que pasa por “O”.

Si en vez del peso W se dispone del doble (2W) y se quiere conservar el equilibrio en la balanza, se debe colocar el cuerpo 2W a una distancia de ½ d, si el peso fuera 4W, entonces tendría que colocarse a una distancia ¼ d.

Estos casos implican que hay una relación entre el peso y la distancia (brazo de balanza) respecto al punto O y está dada por el producto entre ellos. **Por tanto al producto fuerza por distancia respecto al punto de giro se le llama Momento o *Torca*.**




**Momento con respecto a un punto (descripción bidimensional del momento)**

Los momentos de las fuerzas son en tres dimensiones, es decir, están en el espacio, sin embargo podemos considerar el caso donde el observador esté de manera perpendicular al plano de acción de la fuerza y la distancia al punto de giro. Por tanto la magnitud del momento de la fuerza respecto al punto O de giro es:

$$|\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}| = D|\bar{\mathbf{F}}|$$

Donde "D" es la distancia **perpendicular** de "O" a la línea de acción de la fuerza. Recordemos siempre esto; el "brazo de momento" no es cualquier distancia, siempre tiene que ser **perpendicular** a la **línea** de **acción** de la **fuerza**.

La dirección del momento, por tanto, es perpendicular al plano que contiene al punto O y a la fuerza F, el sentido del momento lo da el giro que provocado por la fuerza que, por convención, se catalogan como horarios (-) y antihorarios (+). Las fuerzas cuyas líneas de acción pasen por el punto en cuestión no tienen distancia perpendicular, por lo que no produce momento.

***Las dimensiones del momento son fuerza por distancia, que para el sistema internacional es el Nm y para el sistema inglés es lb-pie.***

Si se desea determinar la suma de momentos de un sistema de fuerzas respecto a un punto (Siendo estas bidimensionales y coplanares), y el punto se encuentra en el mismo plano, por ejemplo, nos podemos referir nuevamente a la balanza platillos, el momento ejercido respecto a "O" nos queda:

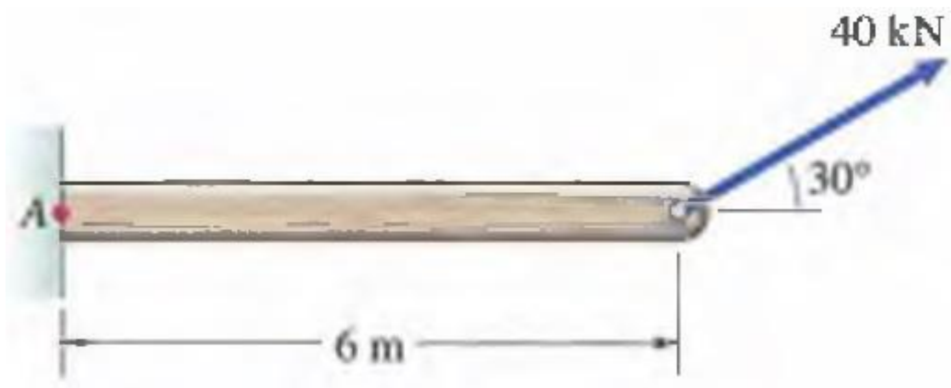
$$\sum M_0 = d \cdot W - d \cdot W = 0$$

$$\sum M_0 = d \cdot W - \frac{d}{2} \cdot 2W = 0$$

$$\sum M_0 = d \cdot W - \frac{d}{4} \cdot 4W = 0$$

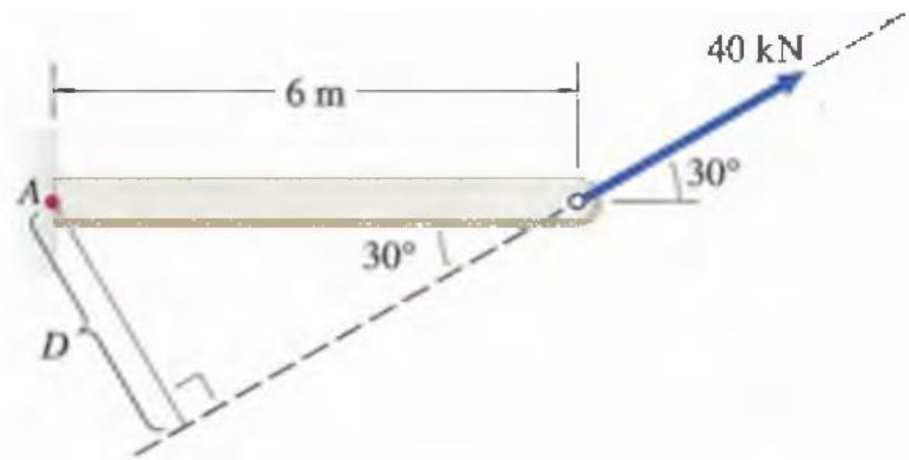
Ejercicio

¿Qué valor tiene el momento de la fuerza de 40 kN de la figura respecto al punto A?




Este ejercicio tiene dos caminos hacia la solución: A través de la distancia perpendicular del punto "A" a la línea de acción de $\bar{F}$ (Recuerde que la línea de acción de la fuerza o soporte, es la recta sobre la que actúa la fuerza), o mediante la descomposición en sus componentes vertical y horizontal y determinar la suma de los momentos.

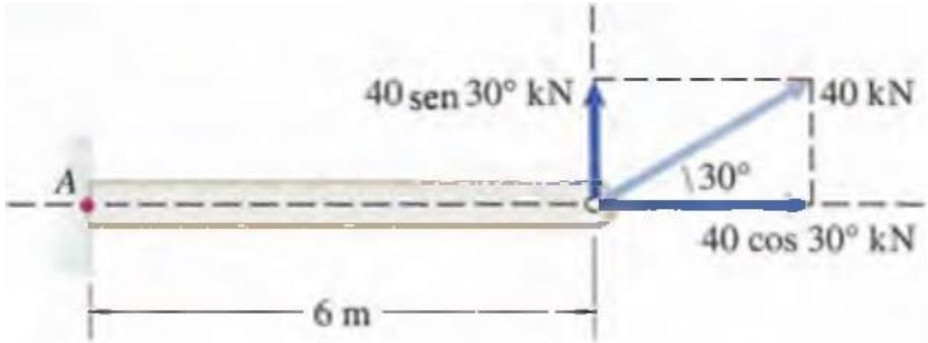
1er solución:




$$D = 6sen(30°) = 3m$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}} = D\bar{\mathbf{F}} = 3[m] \cdot 40[kN] = 120kNm \ con \ sentido \ horario$$

2da Solución:




Separamos a $\bar{F}$ en sus componentes *horizontal y vertical*, la línea de acción de la componente horizontal pasa por el punto "A", por lo tanto la distancia perpendicular es nula y no produce momento; en cambio la componente vertical su línea de acción queda fuera del punto "A" y la distancia perpendicular del punto a dicha línea es *6m*, entonces produce momento:

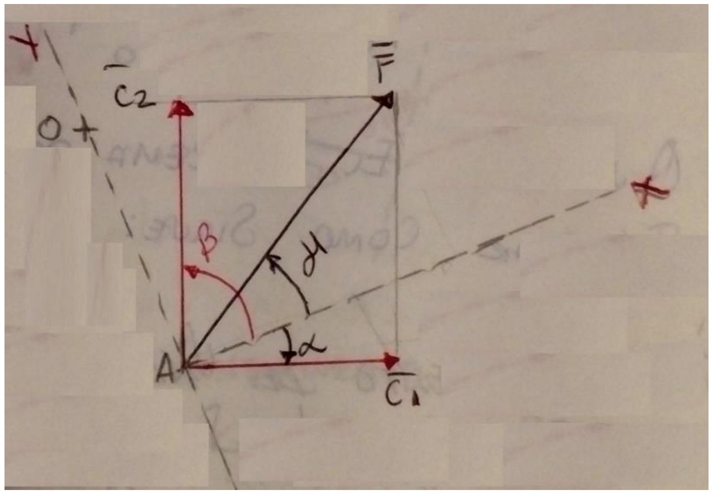
$$\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}}^{\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{h}}} = D \cdot \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{h}} = 0[m] \cdot |\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{h}}|\, cos(30°)[kN] = 0$$

$$\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{A}}^{\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{h}}} = D \cdot \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{h}} = 6[m] \cdot |\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{h}}| sen(30°)[kn] = 6[m] \cdot 40sen(30°)[kN] = 6[m] \cdot 20[kN]$$
$$= 120kNm\ con\ sentido\ horario$$

**Teorema de Varignon (Teorema de Momentos)**

Recordemos que los efectos de las fuerzas son movimientos de traslación y rotación, estos últimos llamados momentos; también vale la pena hacerlo con el principio de Stevin o también llamado ley del paralelogramo, el cual se puede enunciar como: "*La resultante de dos fuerzas que concurren en un punto, se encuentra en la diagonal del paralelogramo construido a partir de dichas fuerzas y que pasa por el punto de concurrencia"*; si nos basamos en el principio de superposición de causas y efectos (el cual se enuncia como: "El efecto producido por varias causas es igual a la suma de los efectos que cada causa produce individualmente"), *el principio de Stevin* se puede interpretar como: el efecto de una fuerza es el mismo que la suma de los efectos de sus dos componentes. De manera análoga se tendrá un principio de Stevin (para los efectos de traslación de las fuerzas), pero con los efectos rotacionales de las fuerzas, o bien, el llamado ***Teorema de Varignon****:*

Considere a la fuerza $\bar{\mathbf{F}}$ aplicada en "A" (como se muestra en la figura) y sea un punto "O" al cual se quiere calcular el momento el momento de la fuerza. Si colocamos un sistema de referencia donde el eje "y" contenga a $\overline{\mathbf{AO}}$ y el eje "x" perpendicular a esta dirección; la fuerza $\bar{\mathbf{F}}$ se puede descomponer en dos componentes cualesquiera. Si analizamos la sumatoria de fuerzas en "x" queda como sigue:



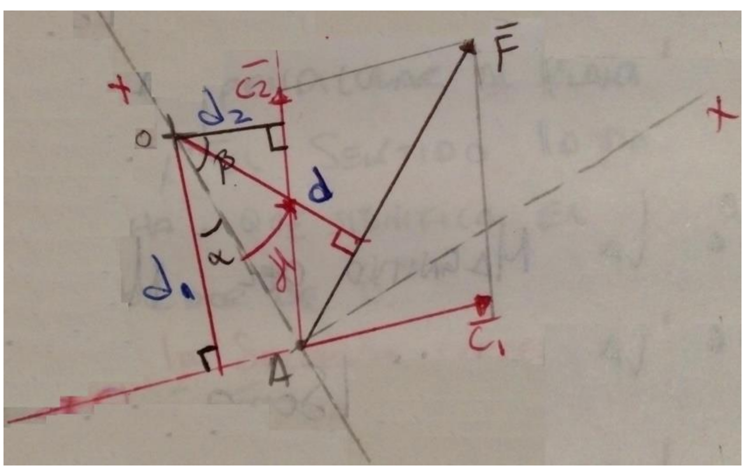

$$\sum F_x = R_x$$

*Tenemos que* $$|\bar{\mathbf{F}}|\, cos(\gamma) = |\bar{\mathbf{C}}_\mathbf{1}|\, cos(\alpha) + |\bar{\mathbf{C}}_\mathbf{2}| cos(\beta)$$

Para poder continuar con la explicación del teorema de Varignon se hará el uso del siguiente artífice, multiplicar la expresión anterior por $|\overline{\mathbf{AO}}|$ en ambos lados de la igualdad para no alterarla:

$$|\bar{\mathbf{F}}||\overline{\mathbf{AO}}|\, cos(\gamma) = |\bar{\mathbf{C}}_\mathbf{1}||\overline{\mathbf{AO}}|\, cos(\alpha) + |\bar{\mathbf{C}}_\mathbf{2}||\overline{\mathbf{AO}}| cos(\beta)$$

Dejemos pendiente esta ecuación y analicemos lo siguiente: si extendemos las líneas de acción de la fuerza $\bar{\mathbf{F}}$ y sus componentes $\bar{\mathbf{C}}_\mathbf{1}$ y $\bar{\mathbf{C}}_\mathbf{2}$, tal que se puedan trazar segmentos de rectas perpendiculares a ellas y que pasen por el punto "O", los cuales denominaremos $d$ (segmento perpendicular a $\bar{\mathbf{F}}$), $d_1$ (segmento perpendicular a $\bar{\mathbf{C}}_\mathbf{1}$) y $d_2$ (segmento perpendicular a $\bar{\mathbf{C}}_\mathbf{2}$), forman los ángulos $\gamma, \alpha$ y $\beta$ respecto al eje "y" respectivamente. Si se observa detenidamente se tiene que:




$d = |\overline{\mathbf{AO}}| \cos(\gamma)$, $d_1 = |\overline{\mathbf{AO}}| \cos(\alpha)$ y $d_2 = |\overline{\mathbf{AO}}| \cos(\beta)$.

Si sustituimos estos valores en la ecuación que se dejó pendiente se tiene que:

$$|\bar{\mathbf{F}}|\, d = |\bar{\mathbf{C}}_\mathbf{1}| d_1 + |\bar{\mathbf{C}}_\mathbf{2}| d_2$$

Esta ecuación nos relaciona el producto de una fuerza por distancia (y no cualquier distancia, sino la perpendicular), que es la definición matemática de la magnitud de momento.

Es decir: $\left|\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}^{\bar{\mathbf{F}}}\right| = \left|\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}^{\bar{C}_1}\right| + \left|\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}^{\bar{C}_2}\right|$ que es el teorema de Varignon y si a esto le agregamos las demás características vectoriales como dirección y sentido (recordemos que las fuerzas así como sus efectos rotacionales son vectoriales), se puede enunciar como sigue:

*"El momento de una fuerza respecto a un punto es igual a la suma de los momentos de sus componentes respecto del mismo."*

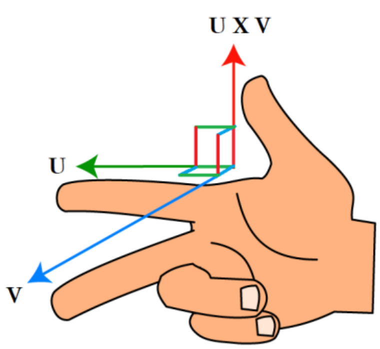
**Vector Momento**

Para poder entender el concepto de vector momento debemos recordar (de manera breve) la definición de producto vectorial: este producto entre vectores siempre será relacionado con rotaciones.

Dados dos vectores $\bar{\mathbf{U}}\ y\ \bar{\mathbf{V}}$, el producto cruz de ellos denotado por $\bar{\mathbf{U}} \times\ \bar{\mathbf{V}}$ se define como:

$$\bar{\mathbf{U}} \times\ \bar{\mathbf{V}} = \ |\bar{\mathbf{U}}|\ |\bar{\mathbf{V}}|\ sen\,\theta\ \bar{\mathbf{e}}$$

De la expresión anterior podemos mencionar que el ángulo $\theta$ es el ángulo entre $\bar{\mathbf{U}}\ y\ \bar{\mathbf{V}}$ cuando los vectores concurren cola con cola. El vector $\bar{\boldsymbol{e}}$ es unitario y perpendicular a los vectores $\bar{\mathbf{U}}\ y\ \bar{\mathbf{V}}$ , como esto implica dos sentidos para el vector unitario se define como un sistema derecho (es decir, se rige por la regla de la mano derecha) para determinar la dirección de $\bar{\mathbf{e}}$.




*"(Regla de la mano derecha: representación del sistema derecho para los movimientos rotacionales, en los cuales se involucran el dedo índice (primer vector del productor vectorial), el dedo medio (segundo vector del producto) y el dedo pulgar (el producto vectorial en sí)"*

Si colocamos a los vectores $\bar{\mathbf{U}}\ y\ \bar{\mathbf{V}}$ en un sistema coordenado cartesiano en el espacio, el producto vectorial puede obtenerse por medio de la siguiente ecuación:

$$\bar{\mathbf{U}}\ y\ \bar{\mathbf{V}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \mathrm{u_x} & \mathrm{u_y} & \mathrm{u_z} \\ \mathrm{v_x} & \mathrm{v_y} & \mathrm{v_z} \end{vmatrix} = (\mathrm{u_y v_z} - \mathrm{u_z v_y})\hat{\mathbf{i}} - (\mathrm{u_x v_z} - \mathrm{u_z v_x})\hat{\mathbf{j}} + (\mathrm{u_x v_y} - \mathrm{u_y v_x})\hat{\mathbf{k}}$$

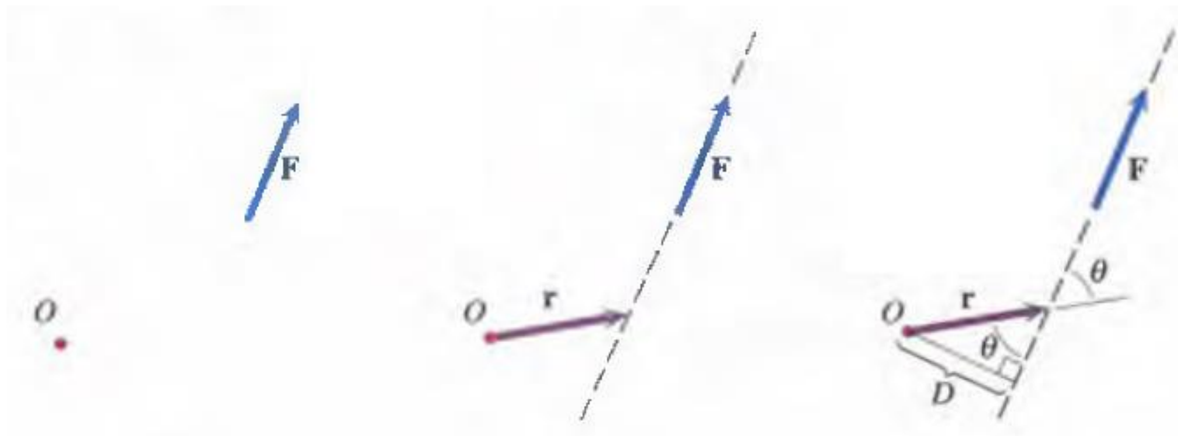
Habiendo dicho esto; consideremos un vector fuerza $\bar{\mathbf{F}}$ y un punto "O"; el momento de $\bar{\mathbf{F}}$ respecto a "O" es el vector momento y está definido por el producto vectorial de los vectores $\bar{\mathbf{r}}$ y $\bar{\mathbf{F}}$ como sigue:

$\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} = \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}}$ Donde $\bar{r}$ es el vector de posición que va del punto O a cualquier punto de la línea de acción de la fuerza.

La magnitud del momento está dado por:

$$\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} = |\bar{\mathbf{r}}|\,|\bar{\mathbf{F}}|\,sen\,\theta$$

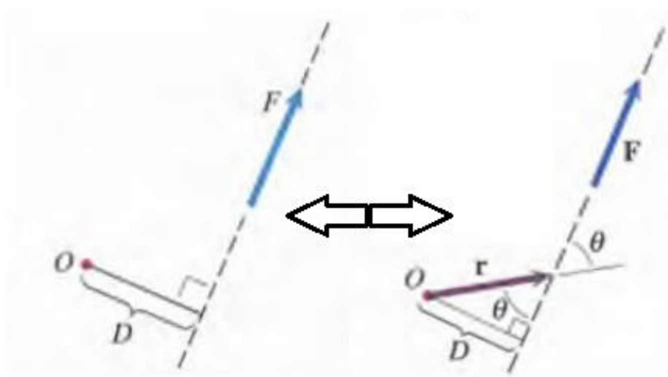
Donde el ángulo $\theta$ es el ángulo entre $\bar{\mathbf{r}}\ y\ \bar{\mathbf{F}}$ cuando los vectores concurren cola con cola.




Si hacemos una comparación con la definición bidimensional ($|\overline{\mathbf{M}_{\mathbf{O}}}| = D|\bar{\mathbf{F}}|$), se puede observar que la distancia perpendicular D mencionada es el modulo del vector de posición multiplicada por el seno del ángulo $\theta$.

$$D = |\bar{\mathbf{r}}|sen\,\theta$$

Además la descripción bidimensional visualiza el plano de acción $(O, \bar{\mathbf{r}}\ y\ \bar{\mathbf{F}})$ de manera frontal a nuestra vista o perpendicular al plano.

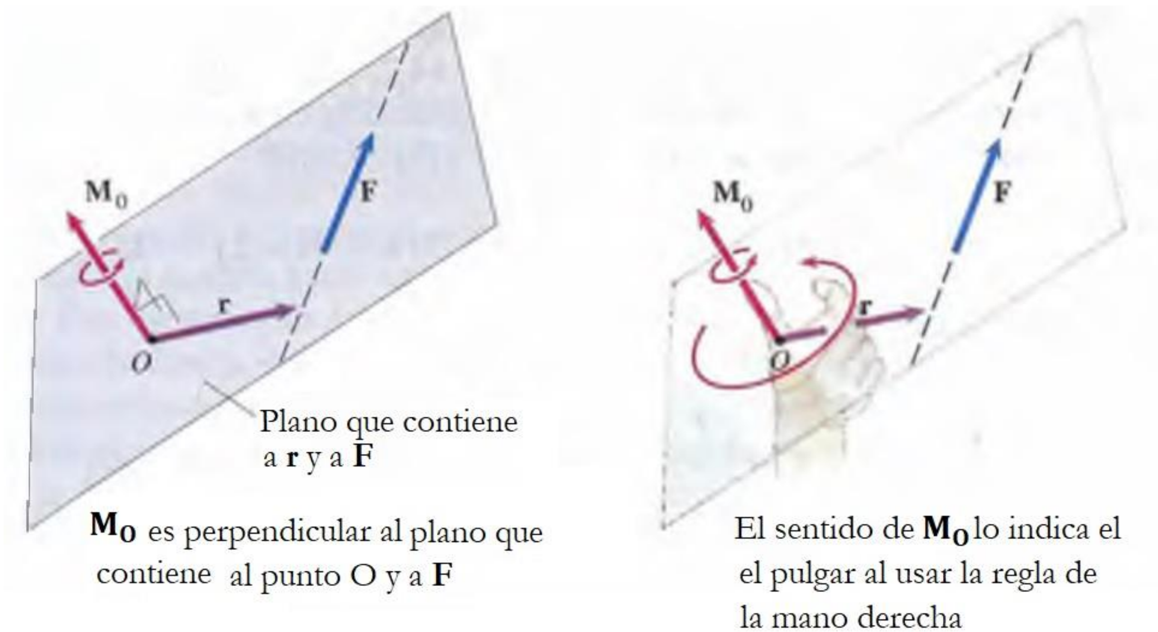


**Sentido del Vector Momento**

La dirección del vector momento es perpendicular al plano que contiene $\bar{\mathbf{F}}$ y *O*; el sentido lo da la regla de la mano derecha que significa el giro que produce $\bar{\mathbf{F}}$ alrededor de *O*.

Nota: Se debe tener cuidado con la secuencia correcta de los vectores en la ecuación

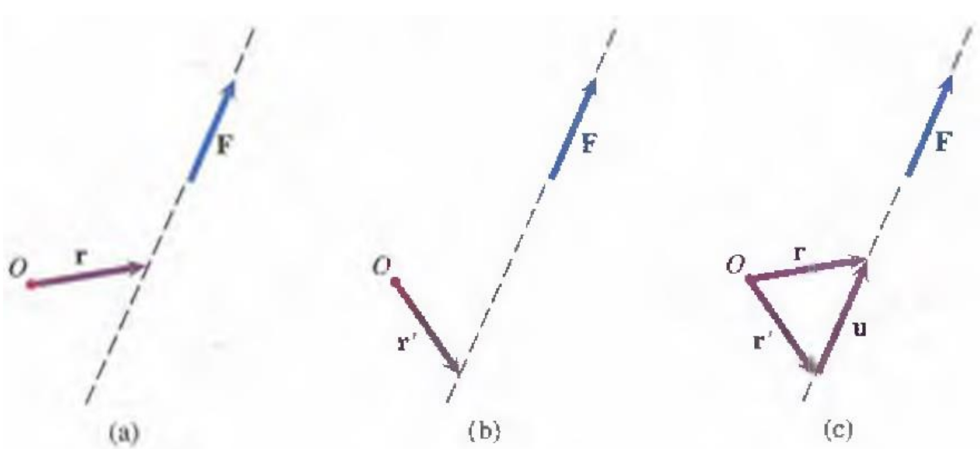
$\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} = \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}}$, ya que el producto cruz no es conmutativo, es decir: $\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}} \neq \bar{\mathbf{F}} \times \bar{\mathbf{r}}$ (Recordemos que la conmutatividad es una propiedad de las operaciones matemáticas que al operar dos elementos el resultado es el mismo sin importar el orden en que se toman).




Se puede demostrar que el resultado de la ecuación de momento $\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} = \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}}$ no depende de un punto en específico de la línea de acción de la fuerza, para ello se tiene lo siguiente:

Si descomponemos a $\bar{\mathbf{r}}$ en dos vectores $\bar{\mathbf{r}'}$ $y$ $\bar{\mathbf{u}}$ **,** donde $\bar{\mathbf{u}}$ es un vector paralelo a la línea de acción de $\bar{\mathbf{F}}$ se tiene que:

$$\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} = \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}} = (\bar{\mathbf{r}'} + \bar{\mathbf{u}}) \times \bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{r}'} \times \bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{r}'} \times \bar{\mathbf{F}}$$




(a) Vector **r** de *O* a la línea de acción de **F**.
(b) Vector **r**′ diferente.
(c) **r** = **r**′ + **u**.

**Teorema de Varignon (generalizado)**

Ya que conocemos de manera generalizada el momento de una fuerza o mejor dicho, el vector momento de una fuerza que se encuentra en el espacio, podemos también generalizar el teorema de Varignon antes descrito.

Sea $\bar{\mathbf{F}}_\mathbf{1}, \bar{\mathbf{F}}_\mathbf{2}, \dots\ \bar{\mathbf{F}}_\mathbf{n}$ un sistema concurrente de fuerzas en $R^3$ cuyas líneas de acción pasan por un punto "$P$". El momento con respecto a un punto "$O$" es:

$$\bar{\mathbf{M}}_\mathbf{O} = \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{OP} \times \bar{\mathbf{F}}_\mathbf{1} + \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{OP} \times \bar{\mathbf{F}}_\mathbf{2} + \cdots + \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{OP} \times \bar{\mathbf{F}}_\mathbf{n} = \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{OP} \times (\bar{\mathbf{F}}_\mathbf{1} + \bar{\mathbf{F}}_\mathbf{2} + \cdots + \bar{\mathbf{F}}_\mathbf{n}) = \bar{\mathbf{r}}_\mathbf{OP} \times \bar{\mathbf{R}}$$

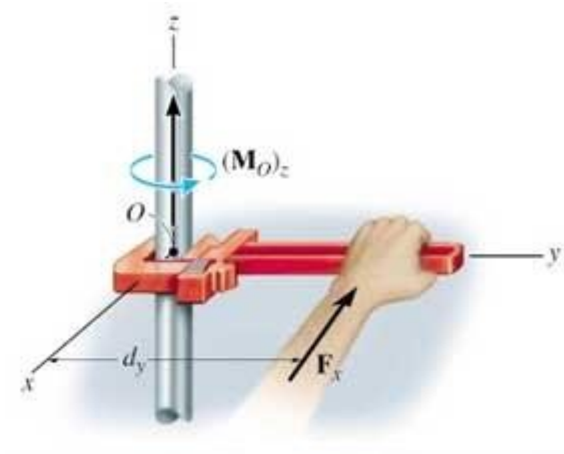
$\bar{\mathbf{r}}_\mathbf{OP}$ Es el vector de posición de *O* a *P*. Este resultado se debe a la propiedad distributiva del producto cruz y confirma que el momento de una fuerza respecto a un punto "*O*" es igual a la suma de los momentos de sus componentes respecto a "*O*" (Recordemos que la distributividad de la multiplicación sobre la suma es aquella en la que el resultado de un número multiplicado por la suma de dos o más sumandos, es igual a la suma de los productos de cada sumando por ese número. ($a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ )).

**Momento de una fuerza respecto a un eje o línea**

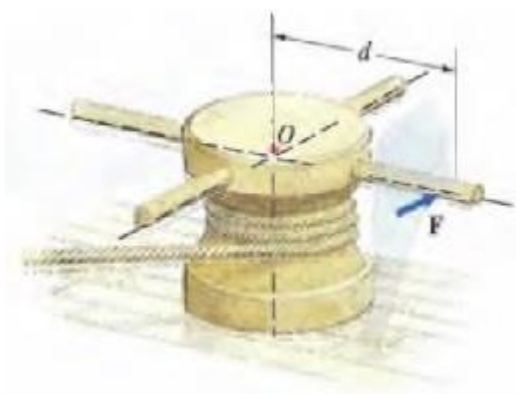
Hasta ahora hemos visto los momentos de las fuerzas respecto a un punto, sin embargo cuando una fuerza tiende a girar una serie de ellos, alineados, se le denomina: Momento de una fuerza respecto a un eje.

Para ejemplificarlo veamos los siguientes casos: La llave Stillson, la turbina, el cabestrante; los cuales tienen en común algo que vamos a dilucidar con la descripción de cada uno:

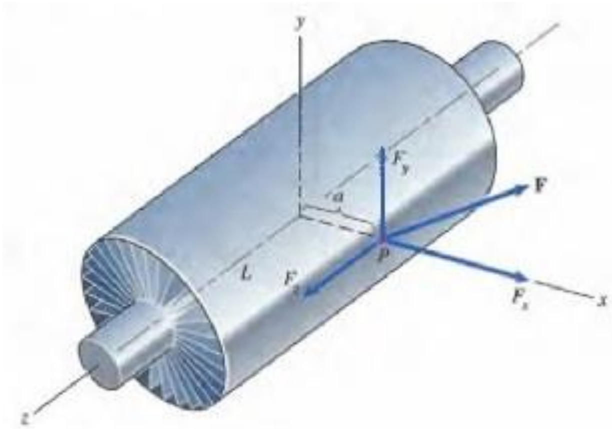
La llave Stillson está sujeta a un tubo por un extremo y en el otro está la mano que ejerce una fuerza, al tubo solo se le puede hacer girar si ésta se ejerce de manera horizontal tal que, si los ponemos en un sistema de referencia donde el origen sea la unión del tubo y la llave (ver figura), la fuerza sea paralela al eje **x.** Entonces podemos observar que el tubo gira entorno a **z**; si ejercemos fuerzas paralelas a los otros ejes no ocasionan ningún giro al tubo.




El cabestrante es un cilindro giratorio (muy usado en barcos) al cual está unida una cuerda y sirve para arrastrar o levantar objetos grandes y pesados. Si observamos la figura solo una fuerza horizontal puede hacer girar al cabestrante y enrollar o desenrollar la cuerda, por lo tanto se produce un momento perpendicular al piso, al igual que en el caso de la llave Stillson, aplicar una fuerza en otro sentido (hacia el cabestrante o perpendicular al piso) no genera giro en él.




Para la turbina podemos observar que hay una fuerza aplicada y qué tiene una línea de acción que está en todos los ejes, es decir que si la descomponemos, tendrá en componentes en los tres ejes. Sin embargo podemos observar que solo la componente en **y** es la única que puede ocasionar un momento en la turbina y que la dirección de éste será en el eje **z**.




De estos casos podemos sacar la conclusión que únicamente habrá giro (existe momento) en torno al eje de sujeción. Además podemos obtener la magnitud al emplear la definición bidimensional, es decir: multiplicando la magnitud de la fuerza por la distancia perpendicular desde el punto del eje hasta un punto de la línea de acción de la fuerza.

**Momento de una fuerza respecto a un eje a partir del momento de esa fuerza respecto a un punto "O" contenido en el eje.**

A través de una manera más general y elegante podemos obtener el momento de una fuerza respecto a un eje si primero obtenemos el momento de esa fuerza respecto a un punto "O" contenido en el eje:

Para ello, consideremos una línea o eje "*L*" y una fuerza $\bar{\mathbf{F}}$**.** Escójase un punto arbitrario "*O*" contenido en "*L*". Por tanto $\bar{\mathbf{M}}_\mathbf{O}$ es el momento producido por $\bar{\mathbf{F}}$ en "*O*". Ahora bien, de la figura podemos deducir que $\bar{\mathbf{M}}_\mathbf{L}$ es la componente de $\bar{\mathbf{M}}_\mathbf{O}$ paralela a "*L*"; si obtenemos un vector unitario de "*L*" $\overline{\mathbf{e}_\mathbf{L}}$, $\bar{\mathbf{M}}_\mathbf{L}$ estará dado por:

$$\bar{\mathbf{M}}_\mathbf{L} = (\bar{\mathbf{e}}_\mathbf{L} \cdot \bar{\mathbf{M}}_\mathbf{O})\bar{\mathbf{e}}_\mathbf{L}$$

De la definición de vector momento se tiene:

$$\bar{\mathbf{M}}_\mathbf{L} = [\bar{\mathbf{e}}_\mathbf{L} \cdot (\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}})]\bar{\mathbf{e}}_\mathbf{L}$$

A $\bar{\mathbf{e}}_\mathbf{L} \cdot (\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}})$ se le conoce como producto triple mixto y se obtiene:

$$\bar{\mathbf{e}}_\mathbf{L} \cdot (\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}}) = (\mathrm{e}_{\mathrm{L_x}} + \mathrm{e}_{\mathrm{L_y}} + \mathrm{e}_{\mathrm{L_z}}) \cdot \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & -\hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ \mathrm{r_x} & \mathrm{r_y} & \mathrm{r_z} \\ \mathrm{F_x} & \mathrm{F_y} & \mathrm{F_z} \end{vmatrix}$$

$$= \mathrm{e}_{\mathrm{L_x}}\left(\mathrm{r_y F_z} - \mathrm{r_z F_y}\right) - \mathrm{e}_{\mathrm{L_y}}(\mathrm{r_x F_z} - \mathrm{r_z F_x}) + \mathrm{e}_{\mathrm{L_z}}(\mathrm{r_x F_y} - \mathrm{r_y F_x})$$

$$\begin{vmatrix} \mathrm{e}_{\mathrm{L_x}} & \mathrm{e}_{\mathrm{L_y}} & \mathrm{e}_{\mathrm{L_z}} \\ \mathrm{r_x} & \mathrm{r_y} & \mathrm{r_z} \\ \mathrm{F_x} & \mathrm{F_y} & \mathrm{F_z} \end{vmatrix} = número\ escalar$$

Se puede observar que el escalar $\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}} \cdot \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{L}} = \bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}} \cdot (\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}})$ nos da la magnitud y sentido del vector $\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{L}}$. El valor absoluto de $\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}} \cdot \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}$ es la magnitud de $\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{L}}$ y si $\bar{\boldsymbol{e}}_{L} \cdot \bar{\boldsymbol{M}}_{O}$ es positivo, apunta en sentido de $\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}}$, si es negativo apunta en sentido opuesto a $\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}}$.

Ahora bien, veamos la siguiente demostración en la cual el resultado de $\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{L}} = \bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}} \cdot \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} = \bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}} \cdot (\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}})\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}}$ **NO** depende de la ubicación del punto sobre la línea de acción de $\bar{\mathbf{F}}$; para visualizarlo, podemos expresar $\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}' + \bar{\mathbf{u}}$ (el vector $\bar{\mathbf{u}}$ es paralelo al vector $\bar{\mathbf{F}}$):

$$\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{L}} = [\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}} \cdot (\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}})]\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}} = \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{L}} = [\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}} \cdot \left((\bar{\mathbf{r}}' + \bar{\mathbf{u}}) \times \bar{\mathbf{F}}\right)]\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}} = [\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}} \cdot (\bar{\mathbf{r}}' \times \bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{F}})]\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}}$$

$$= [\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}} \cdot (\bar{\mathbf{r}}' \times \bar{\mathbf{F}}) + \bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}} \cdot (\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{F}})]\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}}$$

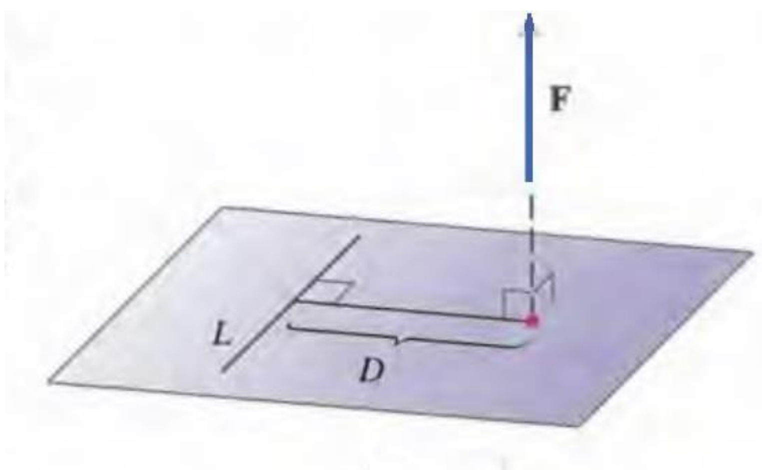
$$\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{L}} = (\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}} \cdot (\bar{\mathbf{r}}' \times \bar{\mathbf{F}}))\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}}$$

El producto vectorial $(\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{F}})$ (según la definición $\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{v}} = |\bar{\mathbf{u}}||\bar{\mathbf{v}}|\, sen\theta\, \bar{\mathbf{e}}$) como son paralelos el ángulo $\theta$ que hay entre ellos es cero, por tanto el producto $\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}} \cdot \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{F}}$ es cero y así queda demostrado que no importa en donde recaiga el vector $\bar{\mathbf{r}}$ sobre $\bar{\mathbf{F}}$

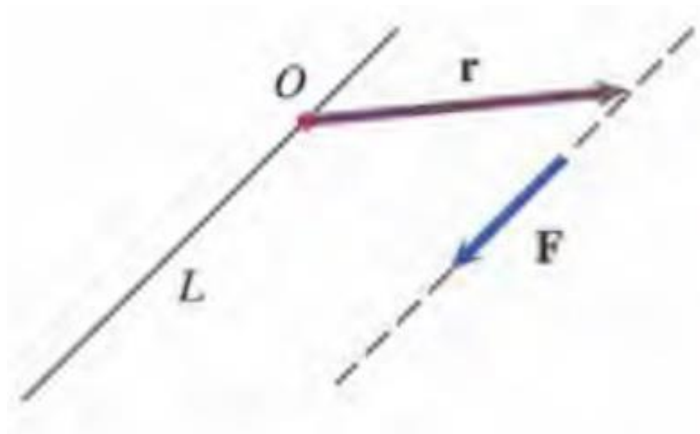
$$\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{L}} = [\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}} \cdot (\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}})]\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}} = (\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}} \cdot (\bar{\mathbf{r}}' \times \bar{\mathbf{F}}))\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}}$$

Acorde con la definición de momento de una fuerza con respecto a un eje, se pueden dilucidar los 3 casos especiales siguientes:

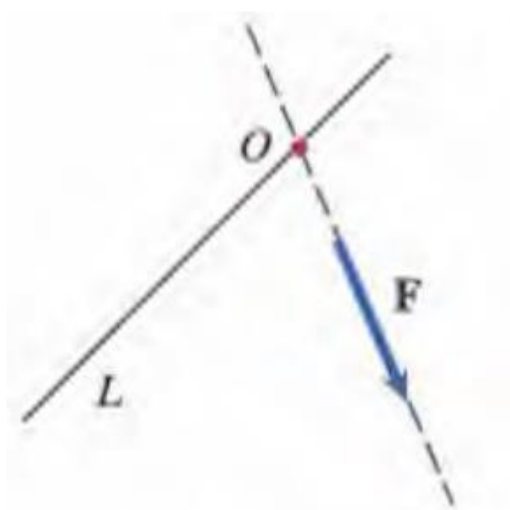
1.- Si la línea de acción de $\bar{\mathbf{F}}$ es perpendicular a un plano que contenga $L$, la magnitud del momento con respecto a $L$, $|\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{L}}| = |\bar{\mathbf{F}}|D$ es igual al producto de la magnitud de la fuerza $|\bar{\mathbf{F}}|$ por la distancia perpendicular $D$ que va de un punto de la recta $L$ al punto de $\bar{\mathbf{F}}$ que corta el plano que contiene a *"D"* y *"L"*.



2.- Cuando la línea de acción de $\overline{\mathbf{F}}$ es paralela a *L*, el momento de $\overline{\mathbf{F}}$ respecto a *L* es nulo: $\overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{L}} = \overline{\mathbf{0}}$, esto debido a que el $\overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} = \overline{\mathbf{r}} \times \overline{\mathbf{F}}$ es perpendicular a $\overline{\mathbf{F}}$ y a *L*, y por tanto la componente paralela $\overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{L}}$ que es la proyección de $\overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}$ sobre la recta *L* es nula también.

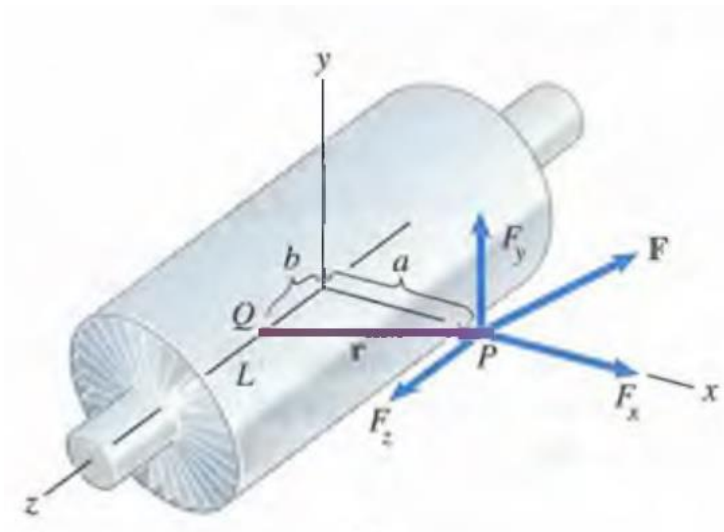



3.- Cuando la línea de acción de $\overline{\mathbf{F}}$ corta a *L*, el momento de $\overline{\mathbf{F}}$ respecto a *L* es nulo. Como se puede escoger cualquier punto sobre la línea de acción de $\overline{\mathbf{F}}$ para evaluar el momento, podemos evaluar $\overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}$ en el punto donde $\overline{\mathbf{F}}$ corta a *L*, por tanto $\overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}} = \overline{\mathbf{0}}$ y la componente paralela también lo es.



Ahora bien, para demostrar que $\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{L}}$ es el momento de $\bar{\mathbf{F}}$ alrededor de $L$, regresemos al caso de la turbina:

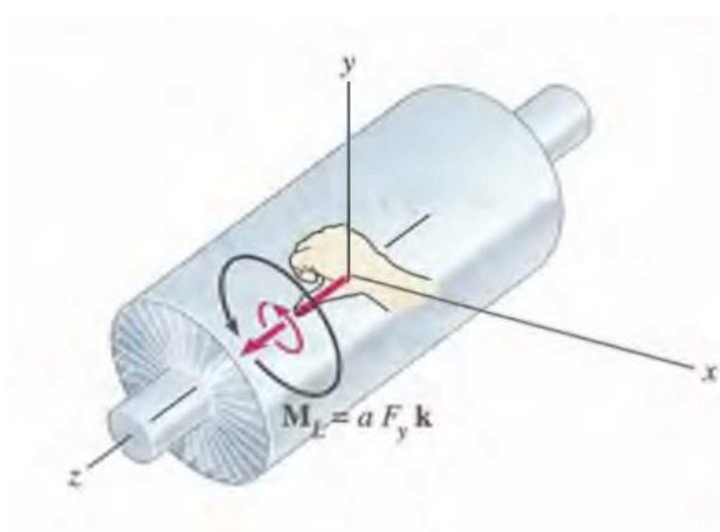
Sea $Q$ un punto sobre $L$ a una distancia $b$ del origen, $\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{QP}} = \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{P}} - \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{Q}} = a\hat{\mathbf{i}} - b\hat{\mathbf{j}}$ es el vector relativo que va de $Q$ contenido en la línea $L$ a $P$ (punto de aplicación de la fuerza), por tanto el momento de $\bar{\mathbf{F}}$ respecto de $m$ es:




$$\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{m}} = \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{QP}} \times \bar{\mathbf{F}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a & 0 & -b \\ \mathrm{F_x} & \mathrm{F_y} & \mathrm{F_z} \end{vmatrix} = b\mathrm{F_y}\hat{\mathbf{i}} - (a\mathrm{F_z} + b\mathrm{F_x})\hat{\mathbf{j}} + a\mathrm{F_y}\hat{\mathbf{k}}$$

Debido a que la línea está contendida en el eje $z$, el vector unitario de $L$ es $\bar{e} = \hat{k}$ el momento respecto con la línea $L$ es:

$$\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{L}} = [\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}} \cdot \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{m}}]\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}} = (\bar{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}} \cdot (\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{mp}} \times \bar{\mathbf{F}})\hat{\mathbf{k}} = (1 \cdot \alpha\mathrm{F_y})\hat{\mathbf{k}} = \alpha\mathrm{F_y}\hat{\mathbf{k}}$$



**Definición de sistemas equivalentes**

Las interacciones sobre los cuerpos se pueden caracterizar mediante un conjunto particular de fuerzas y momentos; no obstante estos pueden ser complicados en cuanto su análisis. Se dice que los sistemas de fuerzas son equivalentes si producen sobre un cuerpo los mismos efectos externos; es decir, si causan la misma aceleración y los mismos momentos sobre él. Por tanto, si solo es de interés la fuerza y el momento total ejercidos, se pueden representar con un sistema mucho más sencillo llamado ***Resultante***: Resultante de un sistema de fuerzas es el sistema equivalente más simple, y puede estar constituido por una sola fuerza, un par de fuerzas, o una fuerza y un par de fuerzas .

Para que la condición de dos sistemas equivalentes se cumpla, hay que transformar a uno de ellos en el otro por medio de una o varias de las siguientes operaciones:

a) Reemplazar dos o más fuerzas que actúan sobre la misma partícula por su resultante

b) Descomponer una fuerza en dos componentes

c) Cancelar dos fuerzas iguales y opuestas que actúan sobre la misma partícula

d) Unir a la misma partícula dos fuerzas iguales y opuestas

e) Mover una fuerza a lo largo de su línea de acción.

Cada operación se puede comprobar o justificar con base en el principio de Stevin, principio de equilibrio*,propiedad de transmisibilidad de las fuerzas* y adición de sistemas de fuerzas en equilibrio*.

*Principio de Equilibrio:

“Cuando la resultante de un sistema de fuerzas concurrentes es cero, se dice que el sistema está en equilibrio

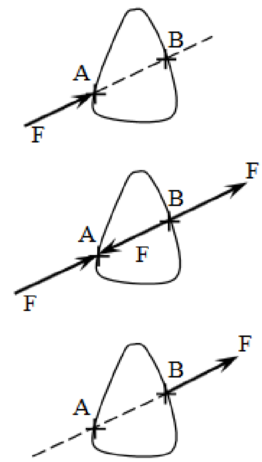
$$\sum_{i=1}^{n} \overline{\mathbf{F}_\mathbf{i}} = \overline{\mathbf{R}} = \overline{\mathbf{0}}$$

*Adición de sistemas de fuerzas en equilibrio:

Si se tiene un sistema de fuerzas en equilibrio y se le agrega otro sistema de fuerzas igualmente en equilibrio, su resultante seguirá siendo cero. También podemos encontrar el caso en que se tenga un sistema de fuerzas que causa cierto efecto sobre un cuerpo, si se le añade un sistema de fuerzas en equilibrio, el efecto sobre el cuerpo no cambia.

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \overline{\mathbf{F}_\mathbf{i}} = \overline{\mathbf{R}}_\mathbf{1} = \overline{0}, \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{m}} \overline{\mathbf{F}_\mathbf{i}} = \overline{\mathbf{R}}_\mathbf{2} = \overline{\mathbf{0}};\ \overline{\mathbf{R}}_\mathbf{1} + \overline{\mathbf{R}}_\mathbf{2} = \overline{\mathbf{0}}$$

*Teorema de Transmisibilidad de las fuerzas:




Considere el cuerpo “x” sujeto a la acción de la fuerza F aplicada en el punto *A*, cuya línea de acción es *AB* y produce ciertos efectos externos. Si al cuerpo se le adiciona un sistema de fuerzas en equilibrio y de magnitud F sobre la misma línea de acción pero en el punto *B*, no se alteran los efectos externos producidos. Se observa que la fuerza aplicada en *A* y la de sentido contrario aplicada en *B*, constituyen un sistema en equilibrio el cual puede suprimirse de modo que la fuerza F sobre *A* produce los mismos efectos externos que aplicada en *B* y se puede enunciar como sigue:

“Las fuerzas pueden deslizarse sobre su línea de acción sin que se alteren los efectos externos que producen.

*Dos sistemas se definen como equivalentes si cumplen con las siguientes condiciones:*

La suma vectorial de las fuerzas del sistema 1 es igual a la suma de las fuerzas del sistema 2.

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{i}} = \sum_{k=1}^{m} \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}$$

Además si la suma vectorial de los momentos del sistema 1 respecto de un punto “O” es igual a la suma de los momentos del sistema 2 respecto del mismo punto.

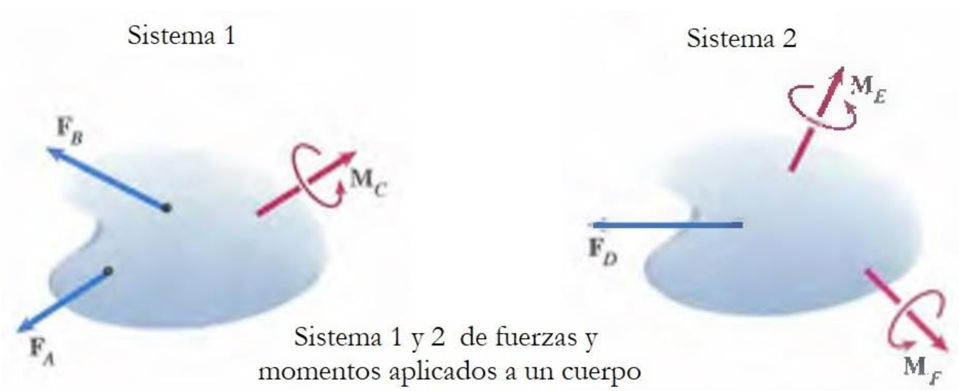
$$\sum \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}^{\bar{\mathbf{S}}_1} = \sum \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}^{\bar{\mathbf{S}}_2}$$

Además con estas condiciones se puede demostrar que la suma de los momentos respecto de cualquier punto es igual para ambos sistemas.

Por ejemplo, sea el cuerpo mostrado en la figura al cual actúan dos sistemas, el sistema 1 está formado por $\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{A}}, \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{B}}\ y \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{C}}$ y el sistema 2 por $\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{D}}, \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{E}}$ **y** $\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{F}}$

Por tanto para la primera condición se tiene:

$$\sum \bar{\mathbf{F}}_{\bar{\mathbf{S}}_1} = \sum \bar{\mathbf{F}}_{\bar{\mathbf{S}}_2} \quad ; \quad \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{D}}$$




Sistema 1 y 2 de fuerzas y momentos aplicados a un cuerpo

Y para la segunda:

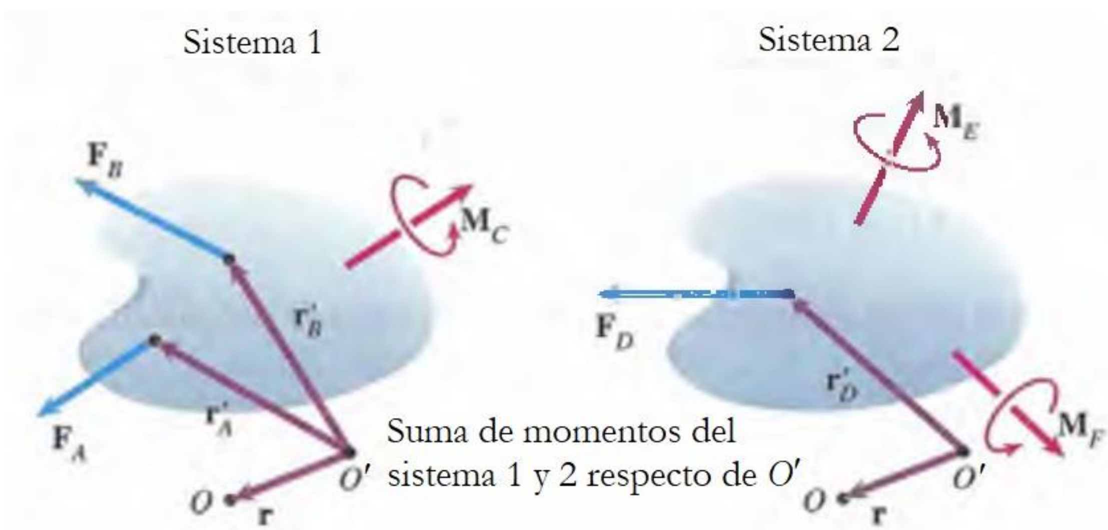
$$\sum \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}^{\bar{S}_1} = \sum \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}^{\bar{S}_2}$$

$$\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{A}} \times \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{B}} \times \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{D}} \times \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{D}} + \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{E}} + \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{F}}$$


Satisfechas estas condiciones se puede elegir otro punto O' y demostrar que las sumas de los momentos también son iguales:

$$\sum \overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{O'}}^{\bar{S}_1} = \sum \overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{O'}}^{\bar{S}_2}$$

$$\overline{\boldsymbol{r}'}_{\boldsymbol{A}} \times \overline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{r}'}_{\boldsymbol{B}} \times \overline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{B}} + \overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{C}} = \overline{\boldsymbol{r}'}_{\boldsymbol{D}} \times \overline{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{D}} + \overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{E}} + \overline{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{F}}$$



Si se traza un vector $\bar{r}$ que va de O’ a O, las relaciones entre los vectores $\bar{r}\ y\ \overline{r'}$ son

$$\overline{\mathbf{r}'}_{\mathbf{A}} = \bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{A}} \quad , \quad \overline{\mathbf{r}'}_{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{B}} \quad , \quad \overline{\mathbf{r}'}_{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{D}}$$

Por lo tanto la segunda condición queda:

$$(\bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{A}}) \times \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{A}} + (\bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{B}}) \times \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{C}} = (\bar{\mathbf{r}} + \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{D}}) \times \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{F}}$$

$$\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{A}} \times \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{B}} \times \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{D}} \times \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{F}}$$

Reagrupando términos y aplicando las condiciones anteriores nos queda

$$\bar{\mathbf{r}} \times (\bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{B}}) + \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{A}} \times \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{A}} + \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{B}} \times \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{B}} + \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{C}} = \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{D}} \times \bar{\mathbf{F}}_{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{F}}$$

$$\bar{\mathbf{r}} \times \sum \bar{\mathbf{F}}_{\bar{\mathbf{S}}_1} + \sum \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}^{\bar{\mathbf{S}}_1} = \bar{\mathbf{r}} \times \sum \bar{\mathbf{F}}_{\bar{\mathbf{S}}_2} + \sum \bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}^{\bar{\mathbf{S}}_2}$$

Y así se llega a la conclusión de que las sumas de los momentos de los sistemas respecto a cualquier punto son equivalentes.

**Par de fuerzas y sus propiedades**

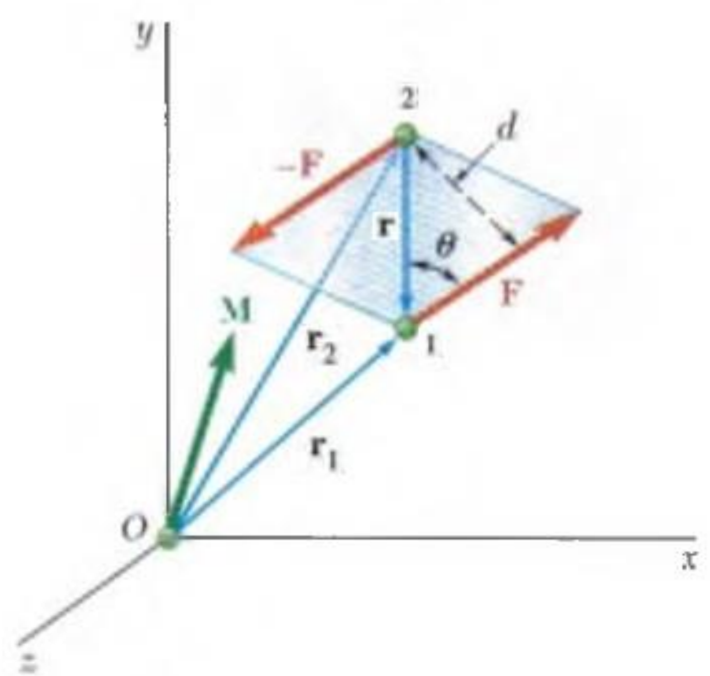
Hasta este punto se han estudiado los efectos de las fuerzas y momentos sobre un cuerpo rígido; como se vio en líneas anteriores, se es posible simplificar (sistema equivalente más simple) un sistema de fuerzas y momentos sin alterar los efectos externos. Una de las ideas fundamentales que se emplea en dicha transformación se denomina ***un par***.

**Pares de fuerzas (Momento de un par)**

Un par de fuerzas se define de la siguiente manera: *Dos fuerzas* $\bar{\mathbf{F}}$ y $-\bar{\mathbf{F}}$ *que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y de sentidos opuestos forman un* ***par***. La suma de las componentes de las dos fuerzas siempre será el cero vector; sin embargo, la suma de los momentos producidos por las dos fuerzas con respecto de un punto dado no es el cero vector. Esto quiere decir que las dos fuerzas no causan que el cuerpo sobre el que actúan se mueva sobre una línea (traslación) pero sí tienden a hacerlos rotar.

El momento de un par es la suma de los momentos de las fuerzas respecto de un punto “O”.

Si se definen los vectores de posición $\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{1}}$y $\bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{2}}$ como los representativos del punto “O” a un punto sobre la línea de acción de la fuerza $\bar{\mathbf{F}}$ y $-\bar{\mathbf{F}}$ respectivamente, por tanto, la suma de los momentos queda:

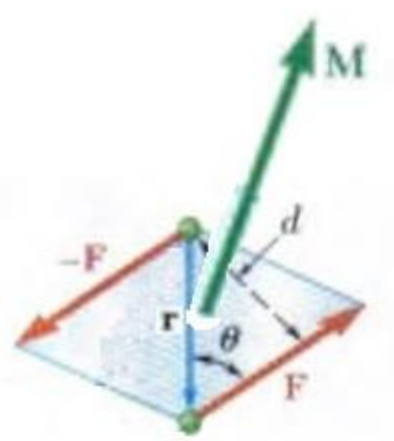



$$\bar{\mathbf{r}}_1 \times \bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{r}}_2 \times -\bar{\mathbf{F}} = (\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_2) \times \bar{\mathbf{F}}$$

Si trazamos un vector que va de $\bar{\mathbf{r}}_2$ a $\bar{\mathbf{r}}_1$ y lo nombramos $\bar{\mathbf{r}}$, esto es $\bar{\mathbf{r}}_1 - \bar{\mathbf{r}}_2 = \bar{\mathbf{r}}$, podemos concluir que la suma de los momentos de $\bar{\mathbf{F}}$ y $-\bar{\mathbf{F}}$ , con respecto al punto O, está representada por el vector:

$$\bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}}$$

Al vector $\bar{\mathbf{M}}$ se le conoce como *momento del par*, el cual es un vector perpendicular al plano que contiene las dos fuerzas y su magnitud está dada por definición del producto vectorial:

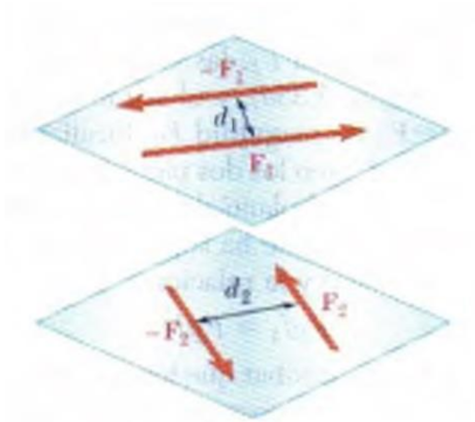



$$\mathrm{M} = |\bar{\mathbf{r}}||\bar{\mathbf{F}}|\, sen\, \theta = \mathrm{F}d$$

Donde $d$ es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de $\bar{\mathbf{F}}$ y $-\bar{\mathbf{F}}$ y $\theta$ es el ángulo entre $\bar{\mathbf{F}}$ (o $-\bar{\mathbf{F}}$) y $\bar{\mathbf{r}}$. El sentido lo proporciona la regla de la mano derecha.

Si echamos un vistazo al vector $\bar{\mathbf{r}}$ este al ser un vector de posición relativo (a los vectores $\bar{\mathbf{r}}_2$ y $\bar{\mathbf{r}}_1$), es independiente del punto "O" (que es el origen del sistema de referencia), por lo que se obtendría el mismo resultado si los momentos de $\bar{\mathbf{F}}$ y $-\bar{\mathbf{F}}$ se hubieran calculado con respecto de otro sistema de referencia con el origen en O'. Por tanto el momento $\bar{\mathbf{M}}$ del par, es un *vector libre* (un vector libre es aquel que los efectos producidos sobre un cuerpo no están ligados a la posición de aplicación y por tanto no se alteran), que puede ser aplicado en cualquier punto.

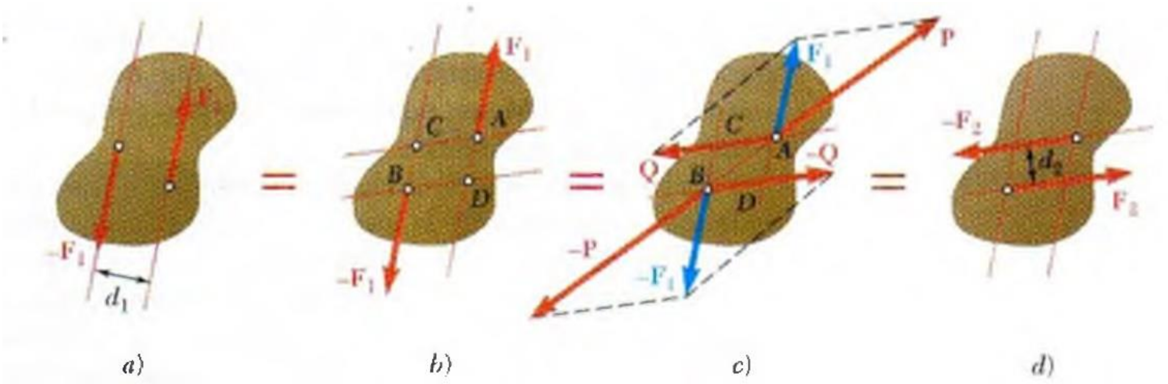
Dos pares, uno constituido por $\bar{\mathbf{F}}_1$ y $-\bar{\mathbf{F}}_1$ y el otro por$\bar{\mathbf{F}}_2$ y $-\bar{\mathbf{F}}_2$ tendrán momentos iguales si $\mathrm{F}_1\mathrm{d}_1 = \mathrm{F}_2\mathrm{d}_2$ , estos pueden estar en el mismo plano o en planos paralelos y con el mismo sentido (es decir, sentido de las manecillas del reloj o contrario a ellas).




**Pares equivalentes**

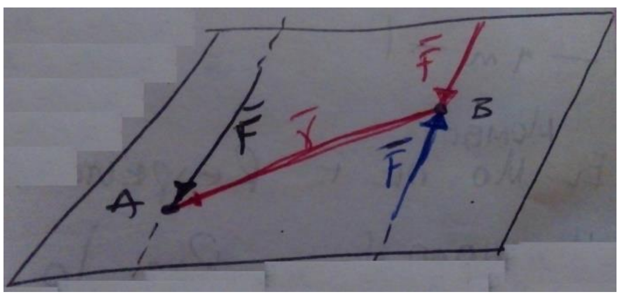
Si dos o más pares tienen el mismo momento (tanto dirección, sentido así cómo magnitud), se puede esperar que los pares tengan el mismo efecto sobre el cuerpo en el que actúan. Por más que esto suene razonable, no debe aceptarse de inmediato, ya que aunque la intuición es buena para las ciencias (como lo es la mecánica), no debe ser aceptada como un sustituto del razonamiento lógico. Antes de dar esta conclusión por sentada, hay que demostrarlo con base en la evidencia teórica (con el lenguaje de las matemáticas) como experimental (uso del método científico). Para ello se utilizan las operaciones de transformación para sistemas equivalentes (mencionadas arriba) basadas en el principio de Stevin, de equilibrio, de transmisibilidad y adición de sistemas de fuerzas en equilibrio.

Para transformar un par en su equivalente primero hay que ubicar el par inicial, luego trazar las intersecciones de las líneas de acción de ambos pares, después, descomponer las fuerzas del par inicial en sus componentes, de tal forma que una de ellas (la componente de cada una de las fuerzas) esté contenida en las líneas de acción del par final y así obtener el equivalente (ver figura).




**Par de Transporte o traslación de una fuerza**

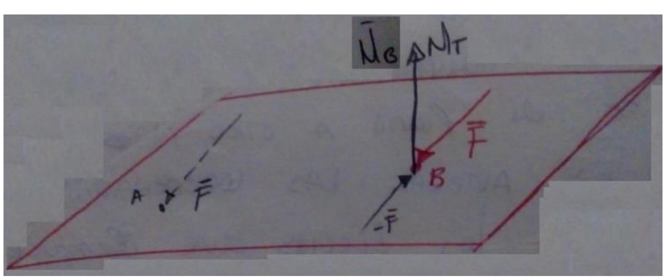
Como simplificación en la resolución de algunos problemas, en ocaciones es conveniente trasladar o transportar una fuerza de un punto a otro, no obstante el fin no es alterar las coordenadas vectoriales, si no, se modifican los efectos externos que dicha fuerza produce.



Sea la fuerza $\bar{\mathbf{F}}$ de la figura, su línea de acción para por el punto "A", la cual quiere transportarse al punto B sin alterar los efectos externos que produce (tanto traslacionales como rotacionales). Se añadirá un sistema de fuerzas en equilibrio de la misma magnitud que $\bar{\mathbf{F}}$, sentidos opuestos y que la linea de acción sea paralela y que pase por el punto B.

Si observamos con detenimiento la fuerza $\bar{\mathbf{F}}$ en "A" y su opuesta en "B" son un par de fuerzas dados por $\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{T}} = \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}}$ o bien su magnitud dada por $|\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{T}}| = D|\bar{\mathbf{F}}|$, a este par se le llama **Par de trasnporte** debido a que ahora queda una fuerza $\bar{\mathbf{F}}$ pero aplicada en el "B" y el par $\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{T}}$.

También podemos observar que el momento ocasionado por la fuerza $\bar{\mathbf{F}}$ que está en "A" sobre el punto "B" $\bar{\mathbf{M}}_{\mathbf{B}} = \bar{\mathbf{r}}_{\mathbf{BA}} \times \bar{\mathbf{F}}$ produce los mismo efectos que el par de transporte dado por $\bar{\mathbf{F}}$ que está en "A" y $-\bar{\mathbf{F}}$ que está en "B".



**Sistema General de Fuerzas y su sistema fuerza-par equivalente.**

Recordemos que pueden haber sistemas de fuerzas en el plano y en el espacio; un sistema general de fuerzas en el plano y/o en el espacio son aquellos en los que se componen de fuerzas que se clasifican en colineales, concurrentes, paralelas, de fuerzas que ni son paralelas ni concurrentes y recordemos que sus efectos pueden ser de traslación y/o rotación. Para todos ellos es posible encontrar un sistema equivalente más simple o también llamado resultante y puede estar formado por una fuerza o un par de fuerzas. Sin embargo para el caso de un sistema en el espacio puede complicarse, ¿Por qué? Veamos lo siguiente: imaginemos un sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo y contiene un número muy grande de ellas, además, están dentro de las clasificaciones ya mencionadas; se le puede obtener un sistema equivalente más simple (*resultante*) por una fuerza que pasa por un punto especifico (generalmente el origen del sistema de referencia al cual está ese sistema de fuerzas) y un par, es decir, por tres fuerzas únicamente, si hacemos la comparación, obviamente el *resultante* es mucho más simple que el original, sin embargo podemos tener un sistema de tres o dos fuerzas que actúen sobre ese cuerpo, el cual al elegir un origen podemos obtener su sistema equivalente de una fuerza y un par, claramente podemos ver que este sistema no es más simple que el original; sin embargo este resultante puede ser más atractivo en la resolución de problemas por el simple hecho de que está en función del origen o un punto especifico y, un sistema fuerza-par puede ser equivalente a una infinidad de sistemas´fuerza-par.

Para reducir un sistema de fuerzas cualquiera en su equivalente más simple fuerza-par se procede con lo siguiente: elegir un sistema de referencia. Cada una de las fuerzas se deben transportar al origen del sistema de referencia acompañadas de sus pares de transporte, con el fin de no alterar los efectos externos. Todas las fuerzas se reducen a una *resultante* llamada $\overline{\mathbf{R}}$ al igual que todos los pares a uno *resultante* $\overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}^{\overline{\mathbf{R}}}$ que si nos referimos a las condiciones de equivalencia nos queda:

Para la suma vectorial de las fuerzas:

$$\overline{\mathbf{R}} = \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{m}} \overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}$$

Y para la suma vectorial de los momentos:

$$\sum \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}^{\overline{\mathbf{R}}} = \sum_{\mathbf{k}=1}^{\mathbf{m}} \overline{\mathbf{M}}_{\mathbf{O}}^{\overline{\mathbf{F}}_{\mathbf{k}}}$$

Recuerde que si se cambia el punto de referencia en el que se aplique el sistema, los resultados serán distintos, no obstante, será otro sistema equivalente.

Bibliografía


[1] A. Bedford y W. Fowler, Mecánica para Ingeniería, Estática, Edición en español, Naucalpan de Juarez Estado de México: Addison Wesley Longman de México SA. de CV., 2000.

[2] I. J. O. Castelazo, «Mecánica Clásica,» [En línea]. Available: http://profesores.dcb.unam.mx/users/juanoc/.

[3] E. R. J. J. D. F. M. Ferdinand P. Beer, Mecánica Vectorial para ingenieros, Estática Undécima Edición, Mc Graw Hill, 2017.