Sistemas de fuerzas concurrentes

Andrés Álvarez Cid

6 de febrero de 2018

En nuestra vida cotidiana podemos encontrar de forma natural el concepto de fuerza, podemos entenderlas como las interacciones entre objetos de cualquier tipo. Desde el punto de vista formal, podemos definir una fuerza de la siguiente forma: Es la acción de un cuerpo sobre otro capaz de alterar su movimiento.

Es por ello que para que exista una fuerza, deben estar interactuando dos objetos al menos, de otra forma no podemos decir que tal fuerza existe.

Dentro del estudio de las fuerzas es conveniente clasificarlas de acuerdo a sus principales características, una de ellas es su punto de aplicación, esta característica depende también del tipo de cuerpo al que se esté aplicando, por ello también es conveniente clasificar los cuerpos en función de sus características.

En el mundo físico podemos encontrar sustancias de distinta naturaleza, los estados más conocidos son el sólido, líquido y gaseoso, su estudio depende de sus características y existen distintas áreas de la mecánica dedicadas a sus estudio, para nuestros propósitos bastará con saber que muchos de los sólidos los podemos analizar como si se trataran de cuerpos rígidos, es decir aquellos que no sufren deformación debida a fuerzas externas, sin embargo, su estudio es complejo, por ello recurriremos a métodos aproximados y a modelos idealizados que nos permitan resolver los problemas de ingeniería con mayor facilidad.

Un modelo que utilizaremos frecuentemente es el de partícula, intuitivamente podemos pensar en una partícula como un cuerpo muy pequeño, matemáticamente es un cuerpo que no tiene dimensiones, la pregunta importante es ¿cuándo podemos utilizar este modelo?

Y la respuesta es: cuando las dimensiones del objeto sean pequeñas comparadas con su entorno.

Este concepto nos puede ayudar a clasificar las fuerzas o mejor dicho, los sistemas de fuerzas que actúan sobre un objeto. Si las fuerzas actúan sobre una partícula, como ésta no posee dimensiones, tendremos como consecuencia que todas ellas deberán aplicarse al mismo punto, a un sistema con estas características le llamamos un sistema de fuerzas concurrente.

En otro caso, si se aplican varias fuerzas a un cuerpo rígido, por su extensión, puede ocurrir que no todas las fuerzas concurran en un mismo punto, diremos que tenemos un sistema de fuerzas no concurrentes.

Dentro de estos dos sistemas, el más sencillo de analizar es el de fuerzas concurrentes, es por ello que en esta monografía nos dedicaremos exclusivamente a sus estudio, sabiendo que de fondo podemos idealizar el problema como si se tratase de un sistema de fuerzas aplicado a una partícula.

Ya para finalizar esta sección cabe mencionar que este tipo de sistemas se divide en dos grandes grupos, a saber, sistemas contenidos en el plano y sistemas contenidos en el espacio para lo cual están dedicadas las siguientes secciones.

1. Sistemas en el plano

Como su nombre lo indica, los sistemas de fuerzas en el plano están formados por fuerzas que están contenidas dentro de un plano, es por esa razón que se requieren solo dos componentes para representar a cada una de ellas.

Experimentalmente se la mostrado que el comportamiento de las fuerzas no es escalar, ya que los efectos que éstas producen dependen de la dirección en que se aplican y el sentido de ellas. Por tanto se clasifican como cantidades vectoriales, ya que poseen magnitud, dirección y sentido.

Matemáticamente dado un sistema de fuerzas concurrentes, es posible sumarlas de forma vectorial y obtener un vector. Sin embargo lo más importante es el significado físico que este vector puede tener.

Pensemos un poco en la relación que existe entre las fuerzas y los objetos sobre las que actúan, los efectos que las fuerzas producen son variados, sin embargo, resulta que la suma de éstos es efectivamente el efecto que produce el vector suma de fuerzas, es por ello que recibe un nombre especial, llamado vector resultante o más correctamente fuerza resultante del sistema de fuerzas concurrentes.

Las aplicaciones de esta descripción matemática son indiscutibles, ya que podemos tener sistemas de fuerzas concurrentes muy complicados y reducirlos por medio de suma vectorial a una sola fuerza, simplificando el problema que estamos resolviendo.

2. Sistemas en el espacio

Los sistemas de fuerzas que no son planos se pueden catalogar como sistemas espaciales, es decir que requieren tres componentes para la representación de cada fuerza. Nuevamente, al ser concurrentes todas las fuerzas se intersecan en un punto que podemos visualizar como una partícula.

Ejemplos de sistemas de fuerzas en el espacio los podemos encontrar prácticamente en todas las aplicaciones de la ingeniería.

Las grúas de carga son un ejemplo de estos sistemas, ya que los cables que sostienen la carga en general están atados a tres puntos distintos, lo que genera un sistema de fuerzas espacial, también podemos ver que algunos puentes colgantes utilizan este tipo de sistemas de fuerzas.

Al igual que los sistemas de fuerzas contenidos en el plano, podemos pensar en los efectos que cada una de las fuerzas produce por separado y sumarlos para ver el efecto resultante. Al realizar la experimentación, veremos que dicho efecto es el que producirá la suma vectorial de las fuerzas que están actuando sobre la partícula.

Por lo tanto podemos concluir que dado un sistema de fuerzas concurrentes complicado, es decir que incluya muchas fuerzas, podemos transformarlo en un sistema de fuerzas más sencillo, en este caso una sola fuerza.

Para obtener esta fuerza, es necesario realizar la suma vectorial de cada fuerza del sistema, para ello es importante recordar como se realiza dicha suma.

Dadas las fuerzas correspondientes a un sistema de fuerzas espacial en forma de componentes cartesianas, es posible sumarlas si sumamos cada una de sus componentes correspondientes, es decir, todas las componentes a lo largo del eje x, todas las componentes a lo largo de eje y, todas las componentes a lo largo del eje z.

Realizado este procedimiento obtenemos las componentes cartesianas de la fuerza resultante.

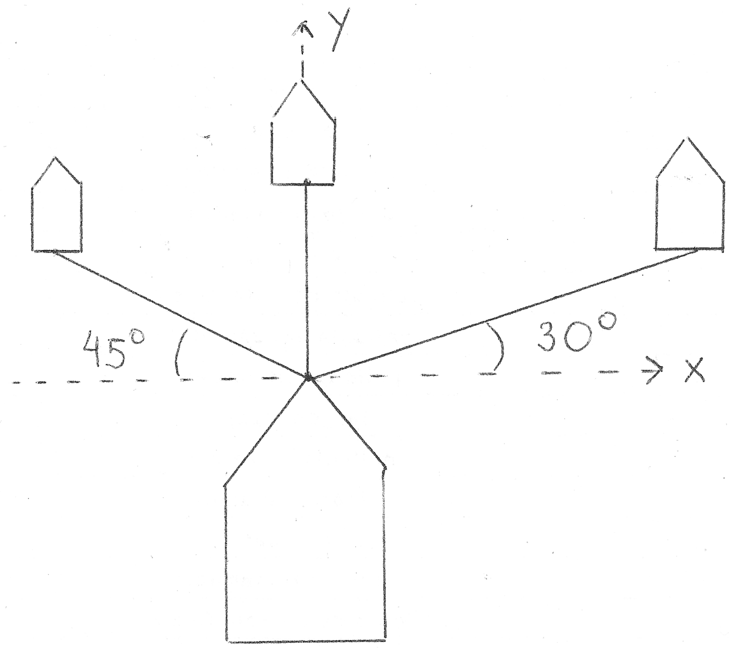

Figura 1: Buques remolque

3. Ejemplos

3.1. Sistema de fuerzas en el plano

Tres buques remolcan un barco como se muestra en la figura 1. Si cada buque ejerce una tonelada de fuerza sobre su respectivo cable, determine la fuerza total ejercida sobre el barco.

Lo primero que debemos observar es que la dirección de las fuerzas es la misma que la de los cables que jalan al barco. Comencemos por calcular la forma vectorial de la fuerza ejercida por el primer buque, como su cable forma un ángulo de 45^o, solo necesitamos proyectar la fuerza de $1[ton]$ sobre los ejes coordenados.

$$\bar{F}_1 = -cos(45)\hat{\imath} + sen(45)\hat{\jmath}$$

La componente sobre el eje x es negativa, ya que su sentido es contrario al del eje mencionado. Con las otras dos fuerzas restantes podemos hacer algo similar, observando que la segunda fuerza no tiene componente horizontal.

$$\bar{F}_2 = \hat{j}$$
$$\bar{F}_3 = cos(30)\hat{i} + sen(30)\hat{j}$$

Sustituyendo el valor de las funciones trogonométricas involucradas, obtenemos:

$$\bar{F}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{j}$$
$$\bar{F}_2 = \hat{j}$$
$$\bar{F}_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{i} + \frac{1}{2}\hat{j}$$

Finalmente, sumamos las tres fuerzas ejercidas.

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \bar{F}_3$$
$$\bar{R} = \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}\right)\bar{i} + \left(\frac{3 + \sqrt{2}}{2}\right)\bar{j}$$
$$\bar{R} = 0{,}1589\bar{i} + 2{,}21\bar{j}[ton]$$

La magnitud de la fuerza total, la obtenemos por medio del módulo del vector $\bar{R}$.
$R = 2{,}21[ton]$

3.2. Sistema de fuerzas en el espacio

Se sabe que la antena mostrada en la figura 2 puede soportar una fuerza horizontal máxima de $1{,}5[ton]$ ejercida en su punta. Si se aplica una fuerza de $10[ton]$ en cada cable. ¿Resistirá la antena?

Para comenzar, debemos observar que las tres fuerzas tienen la misma dirección que los cables y su sentido va de la punta de la antena a los puntos de anclaje, por lo tanto, lo que haremos es encontrar los vectores que parten del punto H y llegan a los puntos A, B, C respectivamente.

$$\bar{r}_A = -10\hat{j} - 20\hat{k}$$
$$\bar{r}_B = -10\hat{i} - 20\hat{k}$$
$$\bar{r}_C = 8\hat{i} + 6\hat{j} - 20\hat{k}$$

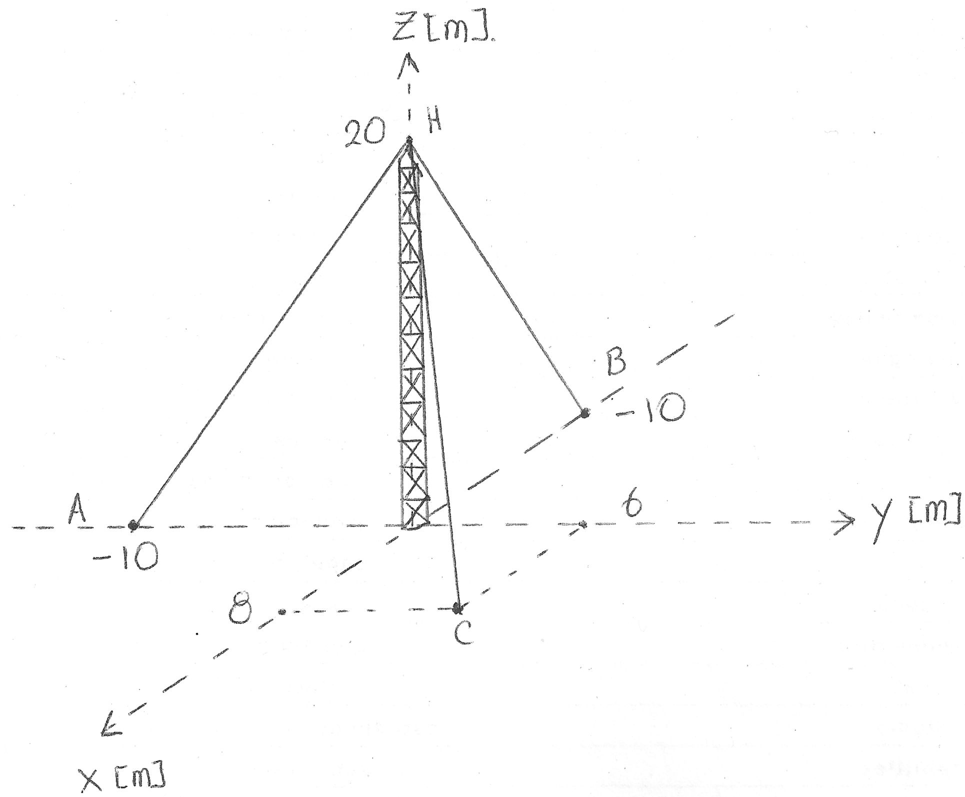

Figura 2: Antena

Para obtener las direcciones correspondientes, será necesario transformar los vectores a unitarios, es decir que posean magnitud uno.

$$|\bar{r}_A| = \sqrt{10^2 + 20^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$$
$$|\bar{r}_B| = \sqrt{10^2 + 20^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$$
$$|\bar{r}_C| = \sqrt{8^2 + 6^2 + 20^2} = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}$$

Dividiendo cada vector entre su magnitud:

$$\bar{r}_A = -\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{k}$$
$$\bar{r}_B = -\frac{1}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{k}$$
$$\bar{r}_C = \frac{4}{5\sqrt{5}}\hat{i} + \frac{3}{5\sqrt{5}}\hat{j} - \frac{2}{\sqrt{5}}\hat{k}$$

Para obtener las fuerzas ejercidas sobre la punta de la antena en forma vectorial, simplemente multiplicamos cada vector unitario por la magnitud de la fuerza aplicada, en este caso $10[ton]$ para cada cable.

$$\bar{F}_A = -\frac{10}{\sqrt{5}}\hat{j} - \frac{20}{\sqrt{5}}\hat{k}$$
$$\bar{F}_B = -\frac{10}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{20}{\sqrt{5}}\hat{k}$$
$$\bar{F}_C = \frac{8}{\sqrt{5}}\hat{i} + \frac{6}{\sqrt{5}}\hat{j} - \frac{20}{\sqrt{5}}\hat{k}$$

La suma de las fuerzas actuantes nos da la resultante del sistema de fuerzas.

$$\bar{R} = \bar{F}_A + \bar{F}_B + \bar{F}_C$$
$$\bar{R} = -\frac{2}{\sqrt{5}}\hat{i} - \frac{4}{\sqrt{5}}\hat{j} - \frac{60}{\sqrt{5}}\hat{k}[ton]$$

Finalmente, calculemos la magnitud de la componente horizontal de la resultante, es decir el vector formado por las componentes en los ejes x y y.

$$\left|\bar{R}\right| = \sqrt{\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+16}{5}} = \sqrt{\frac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2[ton]$$

Por lo tanto, podemos concluir que la antena no soportará esa fuerza horizontal ejercida por los cables.