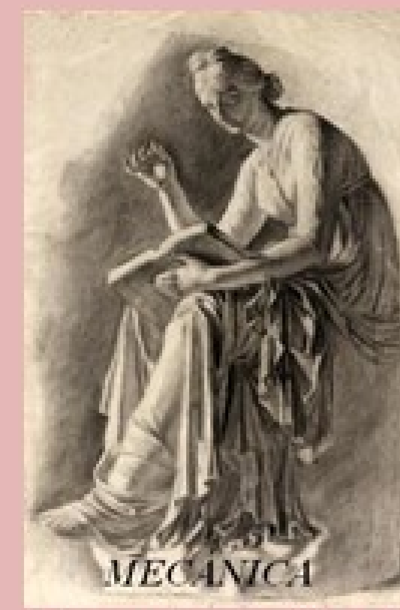
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

DIVISIÓN CIENCIAS BÁSICAS

COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS

BOLETÍN

AGOSTO 2019
SEMESTRE 2020-1



Nueva época, No. 23

Ecuaciones Diferenciales Homogéneas

M. en C. José Luis Flores Silva
Profesor de Asignatura
Facultad de Ingeniería

1. Introducción

Una definición es una convención que distingue a un concepto sobre otros, y por tanto, orienta tanto el discurso como la forma de pensar en cierta área. Es común que palabras de uso cotidiano sugieran definiciones técnicas, de manera que una palabra puede tener significados distintos (posiblemente inspirados por la misma idea genérica), dependiendo del campo de estudio.

Eventualmente, surgen nuevos conceptos a destacar y, si no cambian las palabras, cambian sus connotaciones. Un ejemplo es el de la palabra *homogénea*; su etimología, composición de ὁμός (igual, semejante) y γένος (clase, género), ha inspirado tantas definiciones desde hace tiempo que es difícil saber qué significa sin un contexto: se usa en química, física y matemáticas, entre otras disciplinas.

En un curso básico de ecuaciones diferenciales, encontramos dos tipos diferentes de ellas llamadas homogéneas. A un tipo de ecuación homogénea lo caracteriza el que el conjunto de sus soluciones sea un espacio vectorial. Estas ecuaciones se pueden escribir como una combinación lineal de primeras potencias de la incógnita y sus derivadas igualada a cero:

$$a_n\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_1\frac{dy}{dx}+a_0y=0,$$

en donde los coeficientes a_i pueden ser funciones de x. Históricamente, esta forma de escribir estas ecuaciones motivó el adjetivo *homogénea*, debido a que todos los términos son de primer grado[1].

El otro tipo de ecuación diferencial homogénea, es una clase de ecuaciones de primer orden, que hereda su nombre del álgebra, al intervenir en su definición una función homogénea. A su vez, a dicha función se le llamó originalmente *homogénea* para destacar una propiedad de cambio de escala, cuando el factor de escala es el mismo en todas las variables de la función. La importancia de estas ecuaciones diferenciales en un tratamiento introductorio, es que se pueden convertir en ecuaciones separables. Estas ecuaciones son el tema de esta nota.

2. Definiciones y Ejemplos

Definición 1. Una función $f(x,y)$ se llama *homogénea de grado n* si

$$f(tx,ty)=t^nf(x,y),$$

para cualquier número real t.

Por ejemplo, si $f(x,y)=x^2+y^2$, entonces

$$f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2=t^2(x^2+y^2)=t^2f(x,y),$$

por lo que $f(x,y)$ es homogénea de grado 2. De manera similar, se puede ver que $\sqrt{x^2+y^2}$ y $\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ definen a funciones homogéneas de grados 1 y -1 respectivamente. Como otro ejemplo, la función $g(x,y)=\ln(y/x)$ cumple con:

$$g(tx,ty)=\ln\left(\frac{ty}{tx}\right)=\ln\left(\frac{y}{x}\right)=t^0g(x,y),$$

por lo que $g(x,y)$ es homogénea de grado 0. En general, si $M(x,y)$ y $N(x,y)$ son funciones homogéneas de grado n, entonces su cociente $M(x,y)/N(x,y)$ es una función homogénea de grado 0. Las funciones homogéneas de grado 0 son, en cierto sentido, funciones de una variable:

Proposición 1. Si $f(x,y)$ es homogénea de grado 0, entonces f sólo depende del cociente y/x. Para verificar la afirmación, sustituimos $n=0$ y elegimos $t=1/x$ en la definición 1, para obtener que $f(x,y)=f(1,y/x)=g(y/x)$.

Definición 2. Una ecuación diferencial de primer orden se llama *homogénea* si se puede escribir en la forma

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),$$

donde $f(x,y)$ es una función homogénea de grado 0 (que es por tanto una función de y/x).

[1] El concepto relevante hoy en día es que, en estas ecuaciones, el conjunto de sus soluciones sea un espacio vectorial, y no el que, escritas de cierta forma, den la apariencia de homogeneidad. Por ello, sería mejor llamar *ecuaciones lineales* a este tipo de ecuaciones diferenciales. Desafortunadamente, ese nombre ya se usa para una caso relacionado aunque distinto.

Proposición 2. Toda ecuación diferencial homogénea se puede transformar, mediante un cambio de variable, en una ecuación separable. Por la proposición 1, $f(x,y) = g(y/x)$, por lo que es natural hacer $v = y/x$. De aquí obtenemos que $y = vx$ y $\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}$. La ecuación diferencial en las nuevas variables (x, v) es entonces:

$$\frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} = g(v) \Rightarrow \frac{dv}{g(v) - v} = \frac{dx}{x},$$

que es una ecuación con las variables separadas. Usaremos este resultado para resolver un par de ecuaciones.

Ejemplo 1. Resuelve la ecuación diferencial

$$(x^2 + y^2)\, dx - 2xy\, dy = 0.$$

Solución. Al reescribir la ecuación como

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy},$$

podemos ver que es una ecuación homogénea, en el sentido de la definición 2, ya que la función del lado derecho es una función homogénea de grado 0 y por tanto, debe ser función de y/x. Esto se puede ver más claramente si dividimos numerador y denominador por x^2:

$$\frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + (y/x)^2}{2(y/x)}.$$

Al realizar el cambio de variable $v = y/x$ en la ecuación diferencial:

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{1 + v^2}{2v},$$

y separando las variables:

$$\frac{2v\, dv}{1 - v^2} = \frac{dx}{x}.$$

Integrando de ambos lados de la igualdad, obtenemos:

$$-\ln(1 - v^2) + \ln C = \ln x \Rightarrow C = x(1 - v^2).$$

Volviendo a las variables originales al sustituir $v = y/x$, obtenemos la solución general de la ecuación diferencial:

$$Cx = x^2 - y^2. \qquad \blacksquare$$

Dependiendo de qué variable se considere como independiente, también se podría haber despejado la derivada $\frac{dx}{dy}$ al inicio de la solución. La ecuación obtenida también es homogénea, y el cambio de variable adecuado es entonces $w = x/y$.

Ejemplo 2. Resuelve la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Solución. La función del lado derecho es una función homogénea de grado 0, por lo que la ecuación diferencial es homogénea. Al realizar el cambio de variable $v = y/x$, la ecuación se transforma en:

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{(y/x)}{(x/x) + \sqrt{(x^2/x^2) + (y^2/x^2)}} = \frac{v}{1 + \sqrt{1 + v^2}},$$

y separando la ecuación, obtenemos:

$$-\frac{dx}{x} = \frac{\sqrt{v^2 + 1} + 1}{v\sqrt{v^2 + 1}} dv.$$

Las repeticiones generalmente indican simetría; por ello, hacemos el cambio de variable $\omega = \sqrt{v^2 + 1}$, esperando que al menos, se simplifique la integral. El resultado es:

$$-\frac{dx}{x} = \frac{d\omega}{\omega - 1},$$

que al integrar se convierte en:

$$\ln C - \ln x = \ln(\omega - 1) \Rightarrow \frac{C}{x} = \omega - 1.$$

Sustituyendo $\omega = \sqrt{v^2 + 1}$ y $v = y/x$ para volver a las variables originales, y simplificando la expresión, se obtiene:

$$2C\left(x + \frac{C}{2}\right) = y^2.$$

Así, es claro que la solución general es una familia de parábolas horizontales con distancia focal $\frac{C}{2}$ y vértice en $V\left(-\frac{C}{2}, 0\right)$; todas con el mismo foco (llamadas por ello confocales), que es el origen. $\blacksquare$

3. Interpretación geométrica

Las curvas solución de una ecuación diferencial homogénea son semejantes entre sí debido a una propiedad geométrica relacionada con los cambios de escala. Si el plano XY se expande (o contrae) desde el origen de manera que cada punto se mueve t veces su distancia original al origen, entonces *cualquier curva solución se transforma en otra curva solución.* Es fácil ver esto al sustituir $y' = ty$, $x' = tx$ en la ecuación diferencial $\frac{dy}{dx} = f(y/x)$ y ver que se obtiene $\frac{dy'}{dx'} = f(y'/x')$.

Por otra parte, supongamos que

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

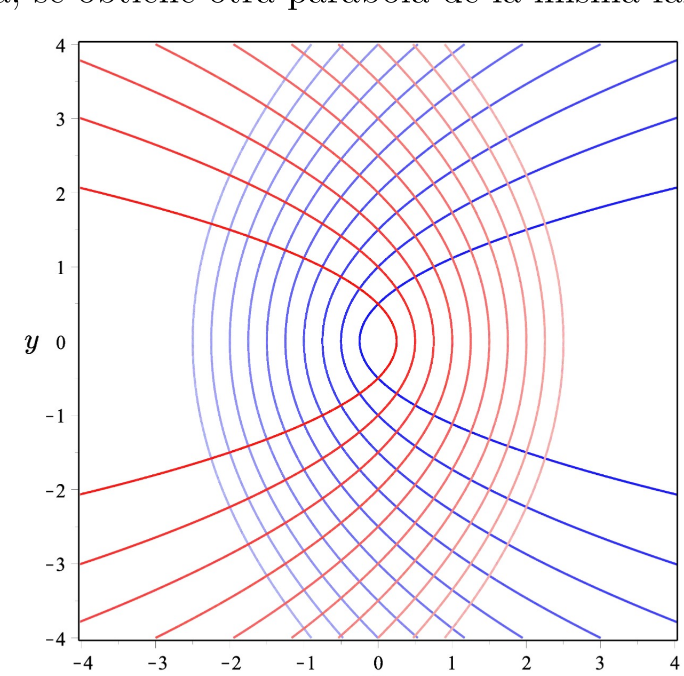
es la ecuación diferencial de una familia de curvas con la propiedad de invariancia ante expansiones desde el origen. Entonces, al realizar la expansión $y' = ty$, $x' = tx$, la derivada en el nuevo punto (x', y') es

$$\frac{dy'}{dx'} = \frac{d(ty)}{d(tx)} = \frac{dy}{dx},$$

por lo tanto, $f(x,y) = f(tx, ty)$, es decir, la ecuación diferencial es necesariamente homogénea. Podemos resumir:

Proposición 3. Las familias de curvas semejantes ante expansiones desde el origen están caracterizadas por ser soluciones generales de ecuaciones diferenciales homogéneas.

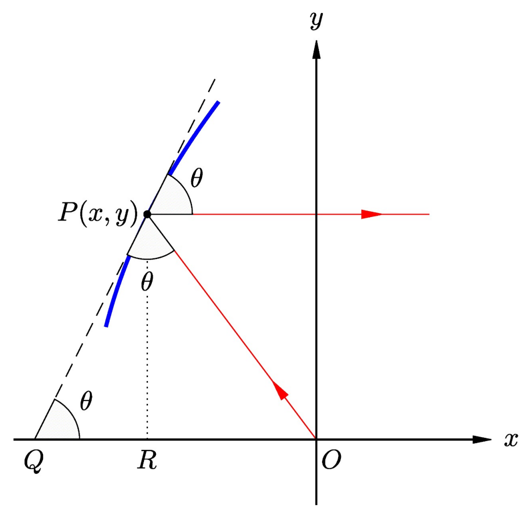
A continuación se muestran algunas curvas solución a la ecuación del ejemplo 2, donde se puede apreciar la semejanza entre curvas de una misma familia: al expandir una parábola, se obtiene otra parábola de la misma familia.



En ocasiones, el hecho de que la ecuación diferencial sea homogénea puede hacer más claro algún aspecto de un problema, como se muestra en la siguiente aplicación.

4. La forma de un espejo

Se desea encontrar la forma que debe tener un espejo de modo que todos los rayos de luz emitidos por un punto, se reflejen en el espejo a lo largo de una sola dirección.



Situamos el origen del sistema de coordenadas del plano XY en el punto donde emanan los rayos de luz y elegimos la orientación del eje x de modo que coincida con la dirección de los rayos reflejados. En la figura se ilustra un rayo de luz que sale del origen O, toca al espejo en el punto $P(x, y)$ y se refleja horizontalmente. La recta $\overline{PQ}$ es la tangente al espejo en el punto $P(x, y)$. El ángulo de reflexión es el ángulo entre $\overline{PQ}$ y el rayo reflejado, al que denotamos por θ. El ángulo de incidencia es el ángulo $\angle OPQ$. Como los ángulos de incidencia y reflexión en un espejo deben ser iguales, $\angle OPQ = \theta$. Por otra parte el ángulo $\angle PQO$ y θ son iguales, ya que son ángulos alternos entre paralelas. Entonces el triángulo $\triangle OPQ$ es isósceles, por lo que los segmentos $\overline{OQ}$ y $\overline{OP}$ son iguales. La longitud del segmento $\overline{OP}$ es la distancia del origen al punto $P(x, y)$: $\overline{OP} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Del punto $P(x, y)$ bajamos una vertical que intersecta al eje x en el punto R. Las coordenadas de $P(x, y)$ son $x = -\overline{OR}$ (por estar a la izquierda sobre el eje x) y $y = \overline{PR}$. Como la distancia $\overline{OQ}$ es igual a la distancia $\overline{OP}$, tenemos que la distancia $\overline{QR} = \overline{OQ} - \overline{OR} = \sqrt{x^2 + y^2} - (-x)$. Por lo tanto,

$$\tan\theta = \frac{\overline{PR}}{\overline{QR}} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Esta expresión es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva; esto es, la derivada en el punto $P(x, y)$. Al espejo lo caracteriza entonces la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Por la propiedad 3, las curvas solución de esta ecuación son semejantes, de modo que, a pesar de que hay un número infinito de soluciones, es posible decir que la forma del espejo es única. De la solución al ejemplo 2, sabemos que la solución general es una familia de parábolas horizontales. El espejo debe ser entonces una parábola con foco en el origen y lo que distingue a una solución de otra es la distancia focal de la parábola y si refleja los rayos hacia la derecha o hacia la izquierda.

5. Ecuaciones Reducibles a Homogéneas

Existen clases de ecuaciones que se pueden reducir a ecuaciones homogéneas; por ejemplo, las ecuaciones de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right),$$

se pueden reducir a homogéneas trasladando el origen de coordenadas al punto de intersección (x_0, y_0) de las rectas

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0, \end{cases}$$

lo que se consige mediante el cambio de variables $u = x - x_0$, $v = y - y_0$. Si las rectas son paralelas, no se puede realizar este proceso; pero en ese caso, el término $a_2x + b_2y$ es proporcional a $a_1x + b_1y$ y la ecuación diferencial es entonces de la forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{k(a_1x + b_1y) + c_2}\right) = F\left(a_1x + b_1y\right),$$

que se convierte en ecuación separable después del cambio de variable $u = a_1x + b_1y$.

Ejemplo 3. Encuentra la solución general a la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x + y - 2}{1 - x}.$$

Solución. El sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 3x + y - 2 = 0 \\ \quad\;\; 1 - x = 0 \end{cases}$$

tiene por solución $x = 1$, $y = -1$; conviene por tanto, el cambio de variable $u = x - 1$, $v = y + 1$. Al sustituir este cambio de variable en la ecuación diferencial, obtenemos:

$$\frac{dv}{du} = -\frac{3u + v}{u}.$$

Esta ecuación diferencial es homogénea, por lo que hacemos un nuevo cambio de variable: $w = v/u$, con el que la ecuación se transforma en:

$$w + u\frac{dw}{du} = -3 - w.$$

Separando variables e integrando:

$$\frac{dw}{2w + 3} = -\frac{du}{u} \Rightarrow \tfrac{1}{2}\ln(2w + 3) = \ln\left(\frac{k}{u}\right)$$

Simplificando y sustituyendo $w = v/u$:

$$2w + 3 = \frac{C}{u^2} \Rightarrow u(3u + 2v) = C,$$

en donde $C = k^2$. Volviendo a las variables originales, encontramos la solución general:

$$(x - 1)(3x + 2y - 1) = C. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4. Encuentra la solución general a la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + y + 1}{2x + 2y - 1}$$

Solución. En este caso, las rectas $x + y + 1 = 0$ y $2x + 2y - 1 = 0$ son paralelas, así que hacemos el cambio de variable $u = x + y$. Al sustituir en la ecuación diferencial, obtenemos

$$\frac{du}{dx} - 1 = -\frac{u + 1}{2u - 1}.$$

Simplificando y separando variables:

$$\frac{du}{dx} = \frac{u - 2}{2u - 1} \Rightarrow \frac{2u - 1}{u - 2}du = dx,$$

integrando:

$$2u + 3\ln(u - 2) = x + C.$$

Finalmente, volvemos a las variables originales:

$$x + 2y + 3\ln(x + y - 2) = C. \qquad \blacksquare$$

En otros casos, algunas ecuaciones se pueden convertir a homogéneas mediante la sustitución $y = z^m$, donde m es una constante propia del problema, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5. Encuentra la solución general a la ecuación

$$2x^4y\frac{dy}{dx} + y^4 = 4x^6.$$

Solución. La sustitución $y = z^m$ lleva a:

$$2mx^4z^{2m-1}\frac{dz}{dx} + z^{4m} = 4x^6.$$

La única manera en que esta ecuación sea homogénea es que todos los términos tengan el mismo grado, para lo que es necesario que se cumpla:

$$4 + (2m - 1) = 4m = 6.$$

de donde $m = 3/2$. Realizamos entonces el cambio de variable $y = z^{3/2}$ en la ecuación diferencial y obtenemos:

$$2x^4\left(z^{3/2}\right)\left(\tfrac{3}{2}z^{1/2}\right)\frac{dz}{dx} + z^6 = 4x^6,$$

al despejar la derivada, es más claro que la ecuación es homogénea:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{4x^6 - z^6}{3x^4z^2},$$

que, con el cambio de variable $w = z/x$ se transforma en:

$$w + x\frac{dw}{dx} = \frac{4 - w^6}{3w^2} \Rightarrow x\frac{dw}{dx} = \frac{4 - w^6 - 3w^3}{3w^2}.$$

Separando variables:

$$\frac{3w^2\,dw}{w^6 + 3w^3 - 4} = -\frac{dx}{x}.$$

Usando fracciones parciales encontramos que

$$\frac{3w^2}{w^6 + 3w^3 - 4} = \frac{3}{5}\left(\frac{w^2}{w^3 - 1} - \frac{w^2}{w^3 + 4}\right),$$

lo que podemos integrar para obtener:

$$\tfrac{1}{5}\left[\ln\left(w^3 - 1\right) - \ln\left(w^3 + 4\right)\right] = \ln\left(\frac{k}{x}\right).$$

Simplificando, y sustituyendo de vuelta $w = z/x$:

$$\frac{w^3 - 1}{w^3 + 4} = \frac{C}{x^5} \Rightarrow \frac{z^3 - x^3}{z^3 + 4x^3} = \frac{C}{x^5},$$

donde $C = k^5$. Sustituyendo de vuelta $z^3 = y^2$, encontramos la solución general:

$$\frac{y^2 - x^3}{y^2 + 4x^3} = \frac{C}{x^5}. \qquad \blacksquare$$

6. Comentarios Finales

La principal ventaja de las ecuaciones diferenciales homogéneas en un primer curso, es que siempre se pueden convertir en ecuaciones separables mediante un cambio de variable conocido de antemano. En otras palabras, para un estudiante frente a un examen, la importancia de reconocer una ecuación diferencial homogénea (o convertir a una ecuación homogénea) es que la solución es metódica y relativamente fácil de desarrollar. Para un profesor, la importancia del tema es que el estudiante está obligado a entender y ejercitar técnicas importantes como la separación de variables y el cambio de variable.

Más allá de un primer tratamiento, es conveniente entender la interpretación geométrica de semejanza. No sólo es útil es casos tan particulares como el espejo parabólico. Un ejemplo más sistemático es la base de un tipo de análisis de puntos singulares de la ecuación de primer orden de la forma

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0.$$

Si consideramos expansiones en series de potencias de las funciones M y N, y conservamos sólo términos de primer grado, la ecuación que queda por estudiar (quizá después de una traslación como se explica en la sección 5) es de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy},$$

que es homogénea [1, pp. 45-49].

Hay que admitir, sin embargo, que el análisis de puntos singulares se puede hacer de otras maneras, y que no son muchas las ecuaciones diferenciales en la práctica que aparecen de manera natural como homogéneas. Aún si es necesario tratar con una ecuación homogénea, otros métodos más generales pueden resolverlas (los ejemplos 1, 2 y 3 se pueden escribir fácilmente como ecuaciones exactas, por decir algo). Incluso el cambio de variable que usamos no es único: las ecuaciones homogéneas también son separables cuando se cambian a coordenadas polares y podría haber otros cambios de variable en casos específicos. También hay que recordar que existe un tipo distinto (y mucho más importante) de ecuación homogénea, que debe remitirnos a la idea de espacios vectoriales. Razones como éstas han sido usadas para exponer el punto de vista de que ecuaciones diferenciales de este tipo forman parte de un contenido anticuado que es poco aplicable [6].

Sin duda, argumentos como el anterior, tienen la intención de propiciar el debate en torno a estos temas más que sugerir realmente que se olviden. Quizá esto sea parte de un proceso que va afinando la connotación que tiene la palabra *homogénea* en la materia de ecuaciones diferenciales. ¿Qué queremos que signifique la expresión "ecuación homogénea"? ¿Un cierto tipo de ecuación diferencial de primer orden útil como fuente de ejercicios? ¿Una ecuación diferencial de primer orden con propiedades geométricas de autosemejanza ante cambios de escala? ¿Ecuaciones diferenciales que tienen como soluciones espacios vectoriales?

De manera cautelosa, a lo largo del mundo, algunas universidades han ido modificando sus planes de estudio para reflejar un cambio de enfoque en el tratamiento de las ecuaciones de primer orden. El tema de ecuaciones homogéneas de primer orden sigue presente en libros de texto (por ejemplo [4], [5]), aunque su mención explícita varía en énfasis. La manera en que, en el futuro, se enseñen y clasifiquen este tipo de ecuaciones diferenciales depende de las prioridades de quienes las usan en la práctica. El lector tiene, como actor activo en los papeles de estudiante y de ingeniero, la última palabra.

Referencias

[1] Ford, Lester R. *Differential Equations*. McGraw-Hill, 1955.

[2] Kiseliov , A.; Krasnov , M.; Makarenko , G.: *Problemas de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias*. Ediciones Quinto Sol, 2001.

[3] Brenner, J. L. *Problems in Differential Equations*. W. H. Freeman and Company, 1966.

[4] Zill, Dennis G.; Cullen, Michael R. *Ecuaciones Diferenciales con Problemas con Valores en la Frontera*. CENGAGE Learning, 2009.

[5] Nagle, R. Kent. *Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*. Addison Wesley, 2005.

[6] Rota, Gian Carlo. *Ten Lessons I Wish I Had Learned Before I Started Teaching Differential Equations*. https://web.williams.edu/Mathematics/lg5/Rota.pdf