UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS

Transformada de Fourier

P R E S E N T A

César Vázquez Lorenzana

Ciudad Universitaria, Cd. Mx., noviembre de 2022

César Vázquez Lorenzana
email: c354rvl@gmail.com

Índice

César Vázquez Lorenzana
email: c354rvl@gmail.com

Presentación

En este trabajo se desarrolla el tema de la transformada de Fourier correspondiente al tema 3 Análisis de Fourier desde la perspectiva de las matemáticas aplicadas en el marco de los contenidos de la asignatura, por lo que se proporcionan los conceptos básicos sobre la teoría de la integral de Fourier, para dar un enfoque general de la transformada y la importancia que tiene en ingeniería.

Se presenta de manera descriptiva las aportaciones que diferentes autores han publicado sobre el tema de la transformada de Fourier, las propiedades y algunas aplicaciones en ingeniería de los conceptos teóricos encontrados en la literatura.

Introducción

Hsu (1987) asegura que el análisis de Fourier se ha convertido en un instrumento indispensable en el tratamiento de física, teoría de comunicaciones, sistemas lineales, etc., mientras que James (2002) llama la atención sobre el impacto de las computadoras digitales en ingeniería y por tanto en las matemáticas requeridas para entender los conceptos en ingeniería,

De Silva (2005) asegura que en los últimos años se he dedicado un considerable esfuerzo en el estudio del control de vibraciones, impacto y ruido en diferentes áreas de la ingeniería civil, mecánica, aeronáutica y aeroespacial, y en la producción e ingeniería de manufactura. Este esfuerzo lleva de los conceptos teóricos a la implementación en ingeniería aplicada en diferentes áreas.

Diversos problemas relacionados con ingeniería incluyen el análisis de señales continuas o discretas que pueden ser digitales, analógicas, mecánicas, térmicas, acústicas, electromagnéticas, biológicas, entre otras; y muchos de los sistemas que modelan el comportamiento de las señales son lineales.

La matemática requerida en el tratamiento de señales es, por excelencia, el análisis de Fourier que puede identificar y recuperar información del fenómeno en estudio mediante una transformación.

En este trabajo se describirán los conceptos y propiedades matemáticas relacionadas con el análisis de Fourier y se parte con la serie compleja de Fourier para llegar a la transformada de Fourier y las aplicaciones en ingeniería.

La transformada de Fourier es una herramienta matemática que se utiliza para transformar señales del dominio del tiempo a funciones definidas en el dominio de la frecuencia donde es posible analizar características que no son fáciles de identificar en el dominio del tiempo.

César Vázquez Lorenzana
email: c354rvl@gmail.com

La integral de Fourier

La serie compleja de Fourier es una herramienta matemática muy importante para tratar problemas de funciones periódicas al descomponer una función $f(t)$ como un combinación lineal de funciones armónicas y presenta sus coeficientes como una función discreta que depende de las frecuencias armónicas de la serie, pero no todas las funciones son periódicas por lo que es necesario desarrollar un procedimiento que trate este tipo de funciones y se pueda expresar como una serie de Fourier.

Considere la serie compleja de Fourier de una función definida en un dominio simétrico en $-p \le t \le p$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t} \tag{1}$$

los coeficientes de la serie compleja de Fourier están definidos por la expresión

$$c_n = \frac{1}{2p}\int_{-p}^{p} f(t) e^{-i\omega_n t} dt \tag{2}$$

donde $i = \sqrt{-1}$ es el número complejo, $T = 2p$ el periodo de la función, p el semiperiodo y $\omega_n = n\frac{2\pi}{T}$ la frecuencia discreta enésima.

Si se considera que $T \to \infty$ entonces la función ya no es periódica en el dominio de la variable independiente, y es posible presentar el siguiente desarrollo para tratar funciones no periódicas

Al presentar la serie compleja de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-i\omega_n \tau} d\tau \, e^{i\omega_n t} \tag{3}$$

plantear que $\Delta\omega = \frac{\omega_{n+1} - \omega_n}{n} = \frac{2\pi}{T}$, donde $\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$ y por tanto $\omega_n = n\Delta\omega$, se obtiene la expresión

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-in\Delta\omega\tau} d\tau \, e^{in\Delta\omega t} \Delta\omega \tag{4}$$

función que resulta como una suma de Riemman del tipo

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n\Delta\omega)e^{in\Delta\omega t}\Delta\omega \tag{5}$$

y al considerar que $T\to\infty$, significa que $\Delta\omega\to 0$ por lo que al determinar el límite de la expresión anterior se obtiene la integral de Fourier de $f(t)$

$$f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau\, e^{i\omega t}d\omega \tag{6}$$

Expresión que resulta en la representación de Fourier de una función no periódica. Hsu (1987) indica que a la expresión anterior se le conoce como identidad de Fourier.

Condiciones de existencia y convergencia

Las condiciones de la integral de Fourier de la función $f(t)$ son:

a) condición suficiente pero no necesaria para la existencia de la integral de Fourier es que $f(t)$ sea absolutamente integrable, es decir, la integral de $|f(t)|$ es finita

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty \tag{7}$$

Las funciones que no satisfacen la ec. (7) pueden tener integral de Fourier y se estudiarán más adelante.

b) si la integral existe, entonces la integral de Fourier converge a

$$\frac{f(t^-)+f(t^+)}{2} \tag{8}$$

donde $f(t^+)$ y $f(t^+)$ son el límite de $f(t)$ por la derecha y por la izquierda, respectivamente.

César Vázquez Lorenzana
email: c354rvl@gmail.com

Forma trigonométrica de la integral de Fourier

Si la función $f(t)$ es una función real, entonces se puede expresar la integral de Fourier como

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left[\cos\omega(t-\tau)+i\,\mathrm{sen}\,\omega(t-\tau)\right]d\tau\, d\omega \qquad (9)$$

de las funciones trigonométricas respecto a ω la parte real es par y la parte imaginaria impar, y resulta el teorema integral de Fourier (Hsu, 1987)

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos\omega(t-\tau)\,d\tau\, d\omega \qquad (10)$$

Al sustituir la identidad $\cos\omega(t-\tau)$ se obtiene la forma trigonométrica de la integral de Fourier

$$f(t)=\int_{0}^{\infty}\left[A(\omega)\cos(\omega t)+B(\omega)\,\mathrm{sen}(\omega t)\right]d\omega \qquad (11)$$

donde los coeficientes de la integral de Fourier son

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\cos(\omega\tau)dt, \qquad B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\,\mathrm{sen}(\omega\tau)dt \qquad (12)$$

expresiones que son las ecuaciones análogas a los coeficientes de la serie trigonométrica de Fourier (O'Neil, 2008).

La integral coseno de Fourier

Si la función real $f(t)$ es una función par, entonces $B(\omega)=0$, y se obtiene la integral coseno de Fourier como

$$f(t)=\int_{0}^{\infty} A(\omega)\cos(\omega t)d\omega, \qquad A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} f(\tau)\cos(\omega\tau)dt \qquad (13)$$

La integral seno de Fourier

Si ahora la función real $f(t)$ es una función par, se tiene que $A(\omega)=0$, y la integral coseno de Fourier resulta ser

$$f(t)=\int_0^\infty B(\omega)\operatorname{sen}(\omega t)d\omega, \qquad B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\tau)\operatorname{sen}(\omega\tau)dt \tag{14}$$

La transformada de Fourier

De la ec. (6) se puede platear la siguiente relación

$$f(t)=\mathfrak{I}^{-1}\left\{\mathfrak{I}\left\{f(t)\right\}\right\} \tag{15}$$

y entonces se define a la integral de Fourier como la transformada de Fourier de $f(t)$ con la expresión

$$F(\omega)=\mathfrak{I}\left\{f(t)\right\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \tag{16}$$

al comparar con la ec. (2), la función $F(\omega)$ es el coeficiente $C(\omega)$ en la representación en integral de Fourier compleja de $f(t)$ (O'Neil, 2008).

La transformada inversa de Fourier de $F(\omega)$ es la integral

$$f(t)=\mathfrak{I}^{-1}\left\{F(\omega)\right\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{17}$$

las ecs. (16) y (17) se conocen como par de transformadas de Fourier.

La ec. (7) es una condición suficiente pero no necesaria para la existencia de la transformada $F(\omega)$, y las funciones $f(t)$ que no satisfacen la condición de la ec. (7) pueden tener transformada de Fourier (Hsu, 1987).

La función $F(\omega)$ en general es una función compleja que puede expresarse como

$$F(\omega)=\left|F(\omega)\right|e^{i\Phi(\omega)} \tag{18}$$

donde $|F(\omega)|$ y $\Phi(\omega)$ se definen como el espectro de magnitud y el espectro de fase de $f(t)$, respectivamente.

Propiedades de la transformada de Fourier

Las propiedades de las transformadas de Fourier de $f(t)$ están relacionadas con transformadas de funciones específicas cuyo resultado se utiliza de manera recurrente en el desarrollo de otras transformadas, en los siguientes párrafos se presentan algunas de ellas.

Linealidad

La integral de Fourier tiene las propiedades de las integrales y al definirse como transformada se trata de una transformación lineal que cumple con las propiedades de linealidad.

Sean dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$, con sus transformadas de Fourier $F_1(\omega)$ y $F_2(\omega)$, y una constante k, entonces

$$\begin{aligned} \Im\left\{k\ f_1(t)\right\} &= k\,F_1(\omega) \\ \Im\left\{f_1(t)+f_2(t)\right\} &= F_1(\omega)+F_2(\omega) \end{aligned} \tag{19}$$

Escalamiento

Sea la función $f(kt)$ la transformada es

$$\Im\left\{f(kt)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(k\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau \tag{20}$$

al utilizar el cambio de variable $u = k\tau$, con $k > 0$ se tiene la definición de la transformada del tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\frac{\omega}{k}u}\frac{du}{k} = \frac{1}{k}F\left(\frac{\omega}{k}\right) \tag{21}$$

si se considera ahora que $k < 0$, se obtiene la ecuación

$$\int_{\infty}^{-\infty} f(u) e^{-i\frac{\omega}{k}u} \frac{du}{k} = -\frac{1}{k} F\left(\frac{\omega}{k}\right) \tag{22}$$

Por lo que se puede plantear la transformada para cualquier valor de la constante k como

$$\Im\left\{ f(kt) \right\} = \frac{1}{|k|} F\left(\frac{\omega}{k}\right) \tag{23}$$

Esta propiedad muestra que cuando se contrae la función en el tiempo, si $|k| < 1$, se presenta una expansión de la función en el dominio de la frecuencia.

Desplazamiento en el tiempo

Sea ahora una función trasladada en el tiempo $f(t - t_0)$ con $t_0 = cte.$, la transformada es

$$\Im\left\{ f(t - t_0) \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau - t_0) e^{-i\omega\tau} d\tau \tag{24}$$

al utilizar el cambio de variable $u = \tau - t_0$, y de sustituir la definición de la transformada de Fourier se obtiene la propiedad de desplazamiento en el tiempo como

$$\Im\left\{ f(t - t_0) \right\} = e^{-i\omega t_0} F(\omega) \tag{25}$$

Desplazamiento en la frecuencia

Sea la función $f(t) e^{i\omega_0 t}$ con $\omega_0 = cte.$, la transformada de la función es

$$\Im\left\{ f(t) e^{i\omega_0 t} \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) e^{-i(\omega - \omega_0)\tau} d\tau \tag{26}$$

de la definición de la transformada de Fourier se presenta la transformada que define la propiedad de desplazamiento en la frecuencia

$$\Im\left\{ f(t) e^{-i\omega_0 t} \right\} = F(\omega - \omega_0) \tag{27}$$

Simetría

Considérese la ec. (17) de la transformada inversa de Fourier

$$2\pi f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{28}$$

al evaluar la función en $-t$

$$2\pi f(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \tag{29}$$

de la definición de la transformada de Fourier de la ec. (16), e intercambiar ω con t se tiene que

$$2\pi f(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t) e^{-i\omega t} dt = \Im\{F(t)\} \tag{30}$$

y finalmente la propiedad de simetría de la transformada de Fourier es

$$\Im\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega) \tag{31}$$

Esta propiedad de simetría también es conocida como propiedad de dualidad (James, 2002)

La transformada de derivadas

Sea la función $f(t)$ definida por la ec. (17) de la transformada de Fourier, al derivar la función se obtiene la expresión

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\Im^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} i\omega F(\omega) e^{i\omega t} d\omega \tag{32}$$

ecuación que tiene la forma de la ec. (17) de la transformada inversa de Fourier, por lo que

$$f'(t) = \Im^{-1}\{i\omega F(\omega)\} \tag{33}$$

si se plantea la derivada enésima de la función $f(t)$ se presenta la identidad

$$f^{(n)}(t) = \mathfrak{F}^{-1}\left\{(i\omega)^n F(\omega)\right\} \tag{34}$$

que al plantear la transformada de la derivada enésima de una función $f(t)$ resulta como

$$\mathfrak{F}\left\{f^{(n)}(t)\right\} = (i\omega)^n F(\omega) \tag{35}$$

expresión que se conoce como la propiedad de derivación con respecto del tiempo.

Transformada de funciones especiales

En esta sección se desarrollan las transformadas de funciones especiales como son las funciones impulso, signo y escalón unitario, funciones que no son absolutamente integrables pero que sin embargo existe su transformada de Fourier, definida como la transformada generalizada de Fourier.

Función pulso rectangular

Sea la función pulso rectangular definida como

$$p_a(t) = \begin{cases} 1, & |t| < \dfrac{a}{2} \\ 0, & |t| > \dfrac{a}{2} \end{cases} \tag{36}$$

La transformada del pulso rectangular es

$$\mathfrak{F}\left\{p_a(t)\right\} = \int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\omega\tau} d\tau = -\frac{1}{i\omega}\left(e^{-i\omega\frac{a}{2}} - e^{i\omega\frac{a}{2}}\right) \tag{37}$$

al sustituir la identidad $\operatorname{sen}(\theta) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$

$$\mathfrak{F}\left\{p_a(t)\right\} = \frac{2}{\omega}\operatorname{sen}\left(\omega\frac{a}{2}\right) \tag{38}$$

César Vázquez Lorenzana
email: c354rvl@gmail.com

La función pulso rectangular es una función par al satisfacer la propiedad $p_a(t) = p_a(-t)$, por lo que su transformada es una función real.

Función impulso unitario

La función impulso unitario se define con la expresión

$$\delta_a(t) = \frac{1}{a} p_a(t) \tag{39}$$

La transformada de la función impulso unitario es

$$\Im\{\delta_a(t)\} = \frac{2}{a\omega} \operatorname{sen}\left(\omega \frac{a}{2}\right) \tag{40}$$

Función delta de Dirac

La función delta de Dirac se define a partir de la función impulso unitario como

$$\delta(t) = \lim_{a \to 0} \delta_a(t) = \lim_{a \to 0} \frac{1}{a} p_a(t) \tag{41}$$

la transformada de la delta de Dirac resulta como

$$\Im\{\delta(t)\} = \lim_{a \to 0} \frac{2}{a\omega} \operatorname{sen}\left(\omega \frac{a}{2}\right) \tag{42}$$

al aplicar el límite se tiene la transformada de la delta de Dirac

$$\Im\{\delta(t)\} = 1 \tag{43}$$

Propiedades de la Delta de Dirac

a) $$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\,dt = 1 \tag{44}$$

b) $$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - t_0)\,dt = f(t_0) \tag{45}$$

c) $$t\delta(t) = 0 \tag{46}$$

De la propiedad de simetría se puede presentar la transformada de la constante

$$\Im\left\{1\right\} = 2\pi\,\delta\left(-\omega\right) = 2\pi\,\delta\left(\omega\right) \tag{47}$$

dado que la función delta de Dirac es par, entonces $\delta\left(-\omega\right) = \delta\left(\omega\right)$

Función escalón unitario (Heaviside)

La función escalón unitario se define como

$$u\left(t\right) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \tag{48}$$

Para obtener la transformada de la función escalón, se propone la siguiente combinación de funciones

$$u\left(-t\right) + u\left(t\right) = 1 \tag{49}$$

al considerar que $U\left(t\right) = \Im\left\{u\left(t\right)\right\}$, de las propiedades de simetría y de la transformada de una constante, ec.(47), la transformada de la ec. (49) es

$$U\left(-\omega\right) + U\left(\omega\right) = 2\pi\delta\left(\omega\right) \tag{50}$$

debido a que la función escalón no es función par ni impar, es posible expresarla como

$$U\left(\omega\right) = \pi\delta\left(\omega\right) + iB\left(\omega\right) \tag{51}$$

lo que significa que la parte imaginaria es una función impar tal que $-B\left(\omega\right) = B\left(-\omega\right)$

De la relación entre la función escalón y la delta de Dirac se tiene que

$$\frac{du\left(t\right)}{dt} = \delta\left(t\right) \tag{52}$$

la transformada de la expresión anterior, con la propiedad de la transformada de una derivada y de la delta de Dirac, resulta como

$$i\omega U(t)=1 \tag{53}$$

al sustituir la expresión de la transformada de la función escalón, ec. (51) y de la propiedad de la delta de Dirac, ec. (46)

$$\begin{aligned} &i\omega\left[\pi\delta(\omega)+iB(\omega)\right]=1 \\ &\omega B(\omega)=-1 \end{aligned} \tag{54}$$

Por lo que la transformada de la función escalón es finalmente la expresión

$$U(\omega)=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{i\omega} \tag{55}$$

Función signo

Sea la función signo definida en su forma alternativa como

$$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases} -1, & |t|<0 \\ 1, & |t|>0 \end{cases} \tag{56}$$

ecuación que se puede expresar como

$$\operatorname{sgn}(t)=u(t)-u(-t) \tag{57}$$

La transformada de la función signo, al emplear la ec. (55), es

$$\begin{aligned} &S(\omega)=U(\omega)-U(-\omega) \\ &S(\omega)=\left[\pi\delta(\omega)+\frac{1}{i\omega}\right]-\left[\pi\delta(-\omega)-\frac{1}{i\omega}\right] \end{aligned} \tag{58}$$

$$S(\omega)=\frac{2}{i\omega} \tag{59}$$

La función signo es una función impar al satisfacer la propiedad $-\operatorname{sgn}(t)=\operatorname{sgn}(-t)$, por lo que su transformada es una función imaginaria pura.

César Vázquez Lorenzana
email: c354rvl@gmail.com

La convolución

Se define como la convolución de las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ la integral

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau \tag{60}$$

Propiedades de la convolución

a) conmutatividad

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_2(\tau) f_1(t-\tau) d\tau \tag{61}$$

b) asociatividad

$$\left[f_1(t) * f_2(t) \right] * f_3(t) = f_1(t) * \left[f_2(t) * f_3(t) \right] \tag{62}$$

El teorema de convolución en el tiempo

Sean dos funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ con sus transformadas de Fourier $F_1(\omega)$ y $F_2(\omega)$, entonces el teorema de convolución en el tiempo se define con la expresión

$$\mathfrak{F}\left\{ f_1(t) * f_2(t) \right\} = F_1(\omega) F_2(\omega) \tag{63}$$

El teorema de convolución en la frecuencia

La convolución de las transformadas de las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ y la propiedad de simetría definen el teorema de convolución en la frecuencia con la expresión

$$\mathfrak{F}^{-1}\left\{ F_1(\omega) * F_2(\omega) \right\} = 2\pi f_1(t) f_2(t) \tag{64}$$

reescribiendo la expresión, se tiene la forma

$$\mathfrak{F}\left\{ f_1(t) f_2(t) \right\} = \frac{1}{2\pi} \left[F_1(\omega) * F_2(\omega) \right] \tag{65}$$

César Vázquez Lorenzana
email: c354rvl@gmail.com

Aplicación de la transformada de Fourier

Todo sistema lineal relaciona una función de entrada y una función de salida con las características y propiedades del sistema, por lo que es posible aplicar el principio de superposición (Hsu, 1987) y muchos de los problemas en ingeniería tienen características de los sistemas lineales.

Algunas de las principales aplicaciones de la transformada de Fourier están en el análisis de señales en el dominio de la frecuencia de un sistema lineal (Hsu, 1987; James, 2002) y las ecuaciones diferenciales lineales no son la excepción dado que la respuesta también puede estudiarse en el dominio de la frecuencia, donde es posible identificar la relación de la señal de entrada con la señal de salida mediante un producto de funciones.

En esta sección se describirán estas dos aplicaciones relevantes de manera general con el análisis de la transformada de Fourier.

Filtrado de señales

El proceso de aplicar un filtro a una señal se define como la operación matemática de multiplicar una función que modula las amplitudes de otra función en una región definida en el dominio de las frecuencias, mientras que en el dominio de la variable tiempo t el filtrado se define con la convolución de funciones.

En forma general, si $\varphi(t)$ es la función filtro, entonces el efecto de filtrar una función $f(t)$ con la función $\varphi(t)$ resulta en una nueva función $g(t)$ definida por la convolución

$$g(t)=\varphi(t)*f(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\tau)f(t-\tau)d\tau \tag{66}$$

la convolución de la función $g(t)$ es

$$G(\omega)=\Psi(\omega)F(\omega) \tag{67}$$

La nueva función $G(\omega)$ resulta de multiplicar dos funciones en el dominio de la frecuencia, donde la función filtro $\Psi(\omega)$ modifica las amplitudes de la función $F(\omega)$.

Si se considera como la función filtro un pulso rectangular $P_{\omega_0}(\omega)$ de ancho ω_0, y se multiplica con la función $F(\omega)$

$$F_{\omega_0}(\omega)=P_{\omega_0}(\omega)F(\omega) \tag{68}$$

el resultado es una función en la que son anuladas las amplitudes de la función $F(\omega)$ que están fuera de la región del ancho de banda ω_0 del pulso rectangular centrado en el origen.

La función filtro $P_{\omega_0}(\omega)$ se conoce como función de transferencia (O'Neil, 2008) y su transformada inversa, por propiedad de simetría de la ec. (31) resulta ser

$$\mathfrak{F}^{-1}\left\{P_{\omega_0}(\omega)\right\} = \frac{1}{\pi t}\operatorname{sen}\left(t\frac{\omega_0}{2}\right) \tag{69}$$

expresión que se conoce como función de muestreo de Shannon, y que aplicada en el filtrado de señales se define como filtro de paso bajo (O'Neil, 2008).

En el dominio del tiempo la nueva función filtrada se obtiene con la convolución

$$f_{\omega_0}(t) = \frac{1}{\pi t}\operatorname{sen}\left(t\frac{\omega_0}{2}\right) * f(t) \tag{70}$$

Si se considera una combinación lineal de pulsos rectangulares del tipo

$$\Psi_{\omega_{1,0}}(\omega) = P_{\omega_1}(\omega) - P_{\omega_0}(\omega) \tag{71}$$

y se utiliza para filtrar una función $F(\omega)$ fuera de rango de frecuencias

$$\frac{\omega_0}{2} < |\omega| < \frac{\omega_1}{2} \tag{72}$$

entonces a este tipo de filtrado se conoce como filtrado en paso de banda y busca filtrar los efectos de la señal fuera del ancho de banda definido (O'Neil, 2008).

El filtro de la señal en el dominio del tiempo es

$$\phi_{\omega_{1,0}}(t) = \frac{1}{\pi t}\left[\operatorname{sen}\left(t\frac{\omega_1}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(t\frac{\omega_0}{2}\right)\right] \tag{73}$$

Ecuaciones diferenciales lineales

Diversos problemas en ingeniería son modelados con ecuaciones diferenciales lineales del tipo

$$L\left[y(t)\right] = f(t) \tag{74}$$

donde en el dominio de la variable del tiempo t el operador diferencial lineal $L[\ ]$ es quien relaciona la señal de entrada $f(t)$ con la señal de salida $y(t)$ que resulta ser la solución de la ecuación diferencial lineal.

Al plantear la transformada de Fourier de la ecuación diferencial se obtiene una ecuación en el dominio de la frecuencia del tipo

$$Z(\omega)Y(\omega)=F(\omega) \tag{75}$$

Si se plantea la solución de la ecuación diferencial en el dominio de la frecuencia

$$Y(\omega)=H(\omega)F(\omega)=\frac{F(\omega)}{Z(\omega)} \tag{76}$$

y a la función $H(\omega)$ se le conoce como la función de transferencia del sistema lineal.

Comparando con la interpretación del filtrado de señales, la función de transferencia es aquella que tiene las propiedades y características del sistema lineal, que opera como un filtro que modula la señal de entrada para dar como resultado la señal de salida, y el problema de resolver una ecuación diferencial resulta en un producto de funciones en el dominio de la frecuencia lo que facilita la solución de la ecuación diferencial lineal si la señal de entrada cambia debido a que la función transferencia es invariante y relaciona las señales de entrada y salida.

En el dominio de la variable original del sistema lineal, el tiempo, la señal de salida se obtiene al desarrollar la transformada inversa de Fourier, con la convolución

$$y(t)=\mathfrak{F}^{-1}\{H(\omega)F(\omega)\}=h(t)*f(t) \tag{77}$$

Conclusiones

Se describieron los conceptos matemáticos relacionados con la transformada de Fourier para el análisis de señales y se presentaron las generalidades de dos aplicaciones relevantes en ingeniería como son el filtrado de señales y la solución de ecuaciones diferenciales lineales.

El análisis de señales en las áreas de las telecomunicaciones, procesamiento de voz, audio, imagen, vibraciones mecánicas, y sistemas eléctricos y electrónicos es importante para identificar posibles problemas en la respuesta de un sistema, como la resonancia; recuperación de señales alteradas por ruido; proporcionar mantenimiento adecuado a sistemas cuya respuesta no es la esperada; o ejecutar alguna acción si la respuesta del sistema es específica.

Aplicaciones específicas en ingeniería relacionadas con el control de las vibraciones se presentan en las áreas de maquinaria, tránsito de vehículos, procesos de impacto, dinámica de estructuras, construcción, procesos industriales, control de calidad, flujo de fluidos, barcos y aeronaves (De Silva, 2005); procesamiento de voz e imagen, tecnología digital y telecomunicaciones (James, 2002) y en la práctica de la ingeniería la implementación de los modelos teóricos en modelos computacionales son de gran relevancia por lo que el uso de algoritmos adecuados para el cálculo de la transformada de Fourier es de gran importancia (James, 2002) por lo que se deja de tarea la investigación de los métodos numéricos de la transformada de Fourier al lector.

Referencias bibliográficas

Chaparro, L. F. y Akan, A. (2019). *Signals and systems using MATLAB*. (3ª ed.). Academic Press.

Coordinación de Ciencias Aplicadas (2019). Programa de estudio matemáticas avanzadas. DCB, FI, UNAM. Recuperado el 17 de junio de 2022, de https://dcb.ingenieria.unam.mx/wp-content/themes/tempera-child/CoordinacionesAcademicas/CA/MA/Documentos/Programa2016.pdf

De Silva, Clarence W. (Ed.) (2005). *Vibration and shock handbook*. CRC Press.

Hsu, Hwei. P. (1987). *Análisis de Fourier*. Addison-Wesley.

Hsu, Hwei. P. (1995). *Theory and problems of signals and systems*. McGraw-Hill.

James, Glyn (2002). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. (2ª ed.). Pearson Educación.

O'neil, Peter V. (2008). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. (6ª ed.). Cengage Learning.

Zill, Dennis G. y Dewar, Jacqueline M. (2008). *Matemáticas avanzadas para ingeniería 2: Cálculo vectorial, análisis de Fourier y análisis complejo*. (3ª ed.). McGraw-Hill.

Zill, Dennis G. y Wright, Warren S. (2012). *Matemáticas avanzadas para ingeniería*. (4ª ed.). McGraw-Hill.