UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

MATEMÁTICAS AVANZADAS

SERIE DE EJERCICIOS

FUNCIONES ANALÍTICAS

Elaboró: Ing. Juan Aguilar Pascual

1. Comprobar que las partes real e imaginaria de la función $f(z) = z + 2$ satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $\mathbb{R}^2$.

2. Demostrar que la función $f(z) = (1 + 2i)\bar{z} - (1 - 2i)$ en ningún punto es analítica.

3. Dada la función $f(z) = sen(z)$

a) Escribirla en la forma $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

b) Demostrar, a partir del inciso anterior, que f es analítica en todo $\mathbb{C}$.

c) Comprobar, a partir de los incisos anteriores, que $f'(z) = \cos(z)$.

4. Determinar en dónde la función $f(z) = -2(x^2 + y^2 - xy) - i(x^2 - y^2 + 4xy + 1)$ es analítica; donde lo sea, obtener su derivada y escribir esta última en términos de z.

5. Obtener una función analítica $f(z)$ tal que $Re[f'(z)] = 2(x - y)$ y $f(i) = i$.

6. Determinar los puntos singulares de la función

$$f(z) = \frac{e^z}{z(z^2 + 4)}$$

es decir, los puntos donde no es analítica.

7. Calcular, mediante la regla de L'Hôpital, el siguiente límite

$$\lim_{z \to 0} \frac{z - sen(z)}{z^3}$$

8. Dada la función $f(z) = (1 + 2i)z$, comprobar que las curvas

$$Re[f(z)] = 1 \qquad \text{e} \qquad Im[f(z)] = -2$$

son ortogonales, es decir, que se intersecan en ángulo recto. Dibujar ambas curvas.

9. Dada la función $f(z) = (2 - i)z^2 - 2i$, comprobar que las familias de curvas

$$Re[f(z)] = \alpha \qquad \text{e} \qquad Im[f(z)] = \beta$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, son ortogonales, es decir, que se intersecan en ángulo recto.

10. Comprobar que el ángulo entre las rectas

$$x = a \qquad \text{y} \qquad y = b$$

en el plano z, donde $a, b \in \mathbb{R}$, se preserva tanto en magnitud como en sentido bajo la transformación $f(z) = (1 - 2i)z - (2 - i)$.

11. Comprobar que el ángulo entre las curvas

$$y = x \qquad \text{y} \qquad y = 2 - x$$

en el plano z, se preserva tanto en magnitud como en sentido bajo la transformación $f(z) = -z^2 - (1 + i)$. Dibujar los dos pares de curvas en sus respectivos planos.

12. Determinar la armónica conjugada de la función

$$u(x, y) = ax + by + c$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, es decir, otra función $v(x, y)$ tal que $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en $\mathbb{C}$.

13. Determinar si existe la armónica conjugada de la función

$$u(x, y) = x^2 - xy - y^2 - 2x + y$$

es decir, determinar si existe otra función $v(x, y)$ tal que $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea analítica en $\mathbb{C}$. En caso afirmativo, obtenerla.

14. Determinar el valor de la constante $C \in \mathbb{R}$ de tal manera que exista la armónica conjugada de la función

$$u(x, y) = -x^2 - xy + 2Cy^2 - 2x - y$$

es decir, el valor de $C \in \mathbb{R}$ para el cual existe $v(x, y)$ tal que $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en $\mathbb{C}$. Para dicho valor, obtener la armónica conjugada.

15. Obtener la función $f(z)$ entera tal que $Im[f(z)] = x^2 - y^2 + 2x - y$ y $f(1) = 1 + 3i$.