FUNCIONES ANALÍTICAS

1. Compruebe que las partes real e imaginaria de la función $f(z)=z+2$, satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en $\mathbb{R}^2$.

2. Demuestre que la función $f(z)=(1+2i)\overline{z}-(1-2i)$ en ningún punto es analítica.

3. Dada la función $f(z)=sen(z)$

   a. Escríbala en la forma $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.
   b. Demuestre, a partir del inciso anterior, que f es analítica en todo $\mathbb{C}$.
   c. Compruebe, a partir de los incisos anteriores, que $f'(z)=\cos(z)$.

4. Determine en dónde la función $f(z)=-2(x^2+y^2-xy)-i(x^2-y^2+4xy+1)$ es analítica; donde lo sea, obtenga su derivada y escriba esta última en términos de z.

5. Obtenga una función analítica $f(z)$ tal que $\text{Re}\left[f'(z)\right]=2(x-y)$ y $f(i)=i$.

6. Determine los puntos singulares de la función

$$f(z)=\frac{e^z}{z(z^2+4)}$$

   Es decir, los puntos donde no es analítica.

7. Calcule, mediante la regla de L'Hôpital, el siguiente límite

$$\lim_{z\to 0}\frac{z-sen(z)}{z^3}$$

8. Dada la función $f(z)=(1+2i)z$, compruebe que las curvas

$$\text{Re}\left[f(z)\right]=1 \text{ e } \text{Im}\left[f(z)\right]=-2$$

   Son ortogonales, es decir, que se intersecan en el ángulo recto. Dibuje ambas curvas.

9. Dada la función $f(z)=(2-i)z^2-2i$, compruebe que las familias de curvas donde $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$, son ortogonales, es decir, que se intersecan en el ángulo recto.

FUNCIONES ANALÍTICAS

10. Compruebe que el ángulo entre las rectas

$$x = a \quad \text{y} \quad y = b$$

en el plano z , donde $a, b \in \mathbb{R}$, se preserva tanto en magnitud como en sentido bajo la transformación $f(z) = (1-2i)z - (2-i)$.

11. Compruebe que el ángulo entre las curvas

$$y = x \quad \text{y} \quad y = 2 - x$$

en el plano z , se preserva tanto en magnitud como en sentido bajo la transformación $f(z) = -z^2 - (1+i)$. Dibuje los dos pares de curvas en sus respectivos planos.

12. Determine la armónica conjugada de la función

$$u(x, y) = ax + by + c$$

donde $a, b, c \in \mathbb{R}$, es decir, otra función $v(x, y)$ tal que $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en $\mathbb{C}$.

13. Determine si existe la armónica conjugada de la función

$$u(x, y) = x^2 - xy - y^2 - 2x + y$$

es decir, determine si existe otra función $v(x, y)$ tal que $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea analítica en $\mathbb{C}$. En caso afirmativo, obtenerla.

14. Determine el valor de la constante $C \in \mathbb{R}$ de tal manera que exista la armónica conjugada de la función

$$u(x, y) = -x^2 - xy + 2Cy^2 - 2x - y$$

es decir, el valor de $C \in \mathbb{R}$ para el cual existe $v(x, y)$ tal que $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ es analítica en $\mathbb{C}$. Para dicho valor, obtenga la armónica conjugada.

15. Obtenga la función $f(z)$ entera tal que $\mathrm{Im}\left[f(z)\right] = x^2 - y^2 + 2x - y$ y $f(1) = 1 + 3i$.

16. Si la función $v(x, y) = x + sen(2x)\cosh(2y)$ es armónica, ¿cuál es la función analítica $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$?.

17. Determine si la función $f(z) = z^2 + \bar{z}^2$ es entera, es decir analítica en todo el plano complejo.

FUNCIONES ANALÍTICAS

18. Demuestre que si $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ es una función analítica con $f'(z)\neq 0$, representadas por las ecuaciones $u=c_1$ y $v=c_2$, donde c_1 y c_2 son constantes, son ortogonales en el plano complejo.

19. Determine una función analítica cuya parte real sea la función $u(x,y)=x^3-3xy^2$.

20. Demuestre que si $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ es una función analítica, entonces sus partes reales (u) e imaginaria (v) son funciones armónicas.

21. Determine si las siguientes funciones son o no armónicas, y si son o no conjugadas

    a. $\varphi_1(x,y)=e^x\cos y+x^2-y^2$
    b. $\varphi_2(x,y)=e^x sen\, y+2xy$

22. Si la función $v(x,y)=-sen(\pi x)senh(\pi y)$ es armónica, ¿cuál es la función analítica $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$?