Asignatura: **Matemáticas avanzadas**. Clave: **1424**; Grupo: **02**; Semestre: **2020-2**
Profesor: **M. en I. Gabriel López Domínguez**. e-mail: **glopezx1y2@hotmail.com**
Horario: 7:00 a 9:00 horas Salón: **J208**
Días: MIE y VIE Fecha: Miércoles 29 de Enero de 2020.

APERTURA

1. Presentación del profesor y bienvenida a los alumnos.
2. Objetivo del curso y especificación del temario.
3. Establecer la forma de evaluación y calificación.
4. Fomento al uso de los servicios universitarios.

OBJETIVO DEL CURSO

El alumno manejará los conceptos fundamentales relacionados con las funciones de variable compleja y el análisis de Fourier, para la resolución de problemas de ingeniería.

TEMARIO

1.	Variable compleja	24.0 horas
2.	Análisis de Fourier. (Series de Fourier)	12.0 horas
3.	Análisis de Fourier. (Transformada de Fourier)	28.0 horas
		Total: 64.0 horas

FORMA DE EVALUACIÓN, CALIFICACIÓN Y ALUMNOS EXENTOS

Para aprobar la asignatura durante el curso es necesario lo siguiente:

1. Aprobar cada uno de los exámenes parciales.
2. Realizar las tareas y series del curso las cuales son obligatorias.
3. Cubrir un mínimo de 95% de asistencia al curso.
4. Los alumnos exentos son aquellos que cubran los 3 puntos anteriores
5. Calificación: **Porcentajes detallados se dan en el cronograma**
    a. Anexo cronograma del curso.
    b. Elementos de evaluación.
    c. Trabajo en equipos.
    d. Elaboración de proyecto escolar.

EXÁMENES FINALES

Aquellos alumnos que no exenten se presentarán al primer examen final (*con identificación oficial*); de ser aprobatorio el examen, se asentará en el acta la calificación correspondiente considerando el trabajo realizado durante el curso. En caso de no ser aprobatorio se realizará un segundo examen final; donde, la calificación obtenida se asentará en el acta. Por otro lado, si algún alumno no termina el curso o no presenta los exámenes finales se asentará NP o CINCO según corresponda.

Nota 1: Aquellos alumnos que por razones extraordinarias no puedan presentar alguno de los ***exámenes parciales o finales*** deberán hacerlo saber por escrito con una semana de anticipación al examen. También, para tener derecho a presentar exámenes finales el estudiante tendrá que haber presentado los exámenes parciales.

Nota 2: Se aceptarán **ALUMNOS OYENTES** siempre y cuando se comprometan a realizar todas las actividades del curso y aprueben *necesariamente* el **segundo** examen final.

1. Variables y funciones.
2. Funciones unívocas y multívocas.
3. Funciones inversas.
4. Transformaciones.
5. Coordenadas curvilíneas.
6. Funciones elementales

La variable $z = x + iy$ es llamada **variable compleja**, al escribir $w = f(z)$ como función de z se identifica a ésta como variable independiente y w como variable dependiente. Cuando hablamos de función es conveniente suponer que es unívoca salvo se diga lo contrario. Al escribir z como función de w se tiene $z = f^{-1}(w)$ y comúnmente se le conoce como función inversa.

La función valuada compleja $w = f(z)$ $z \in C$ se obtiene otra variable compleja $w \in C$. Al escribir $w = u + iv$ y al sustituir $z = x + iy$ se obtiene $u + iv = f(x + iy)$, entonces al considerar la igualdad previa se construyen el conjunto de ecuaciones $u = u(x, y)$ y $v = v(x, y)$ que constituyen las ecuaciones de transformación.

Con base en la transformación $w = f(z)$ y siendo $z = x + iy$ es de notar que las coordenadas rectangulares (x, y) de un punto P en el plano z le corresponden las **coordenadas curvilíneas** (u, v) en el plano w. Al considerar las curvas $u = u(x, y) = c_1$ y $v = v(x, y) = c_2$ asignando c_1 y c_2 constantes se llaman curvas coordenadas.

Ejemplo: Encuentre la imagen en el plano w de la recta $y = 1$ $x \in [-1,1]$ en el plano z usando la transformación $w = z$.

Ejemplo: Encuentre la imagen en el plano w de la recta $y = 1$ $x \in [-1,1]$ en el plano z usando las transformaciones $w = z + 1$, $w = z + i$ y $w = z + 1 + i$.

Ejemplo: Obtenga el mapeo en el plano w de la recta $y = 1$ $x \in [-1,1]$ en el plano z usando la transformación $w = z^2$.

Dada la transformación: **Traslación.** $w = z + \beta$, β constante compleja. Las figuras en el plano z se desplazan o trasladan en la dirección del vector β.

La transformación: **Rotación**. $w = e^{i\theta_0} z$. Las figuras en el plano z se rotan un ángulo θ_0 siendo θ_0 constante real. Si $\theta_0 > 0$ la rotación es en sentido positivo, mientras que $\theta_0 < 0$ la rotación es en sentido negativo.

<u>CIERRE</u>

Estudiar: *Funciones elementales de variable compleja.*

Asignatura: **Matemáticas avanzadas**. Clave: **1424**; Grupo: **02**; Semestre: **2020-2**
Profesor: **M. en I. Gabriel López Domínguez**. e-mail: **glopezx1y2@hotmail.com**
Horario: 7:00 a 9:00 horas Salón: **J208**
Días: MIE y VIE Fecha: Viernes 31 de Enero de 2020.

APERTURA

Con la transformación: **Dilatación**. $w = az$, a constante real; las figuras en el plano z se dilatan (o contraen) en la dirección z si $a > 1$ o $0 < a < 1$.

Cuando analizamos el comportamiento de las funciones $w = z$ y $w = z^2$ es útil pensar que forman parte de un conjunto más amplio de funciones tipo polinomio; entonces, la función polinomial se define como:

$$w = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n = P(z)$$

Donde los coeficientes $a_n \in C, n \in Z^+$ son constantes complejas y el grado del polinomio es $n \in Z^+$.

EJEMPLOS

1. Encuentre la imagen en el plano w de la recta $y = 2x + 4$ en el plano z , $z = x + iy$ bajo el mapeo $w = 2z + 6$.

2. Sea $w = f(z) = z^2$. Hallar los valores que corresponden a $z_1 = -2 + i; \quad z_2 = 1 - 3i$

Determinar la ecuación de la curva en el plano w.

Si c_1 y c_2 son constantes reales, determinar el conjunto de todos los puntos en el plano z que se aplican en las rectas, (a) $u = c_1$, (b) $v = c_2$ en el plano w por medio de la aplicación $w = z^2$.

- Ilustre considerando los casos $c_1 = 2,4,-2,-4$ y $c_2 = 2,4,-2,-4$
- Hallar la imagen de la región en el primer cuadrante acotada por
  $x^2 - y^2 = -2, \quad xy = 1, \quad x^2 - y^2 = -4, \quad xy = 2$
- Las coordenadas curvilíneas del punto en el plano xy cuyas coordenadas rectangulares son $(2,-1)$

3. Sea un cuadrado de vértices 0, 1, 1+i, i en el plano z ¿Cuál será su imagen por aplicación $w = z^2$?

APLICACIONES

Toda función compleja realiza una aplicación unívoca unilateral de un conjunto en otro. Las funciones complejas se utilizan en hidrodinámica y aerodinámica, pues describen el movimiento de un volumen de líquido (o de gas). Las funciones armónicas tienen aplicaciones en áreas tales como el análisis de esfuerzo en placas, el flujo de fluidos en dos dimensiones y la electrostática.

Cuando razonamos el comportamiento de una función de variable compleja dada como $w = f(z)$ es importante comprender casos básicos como $w = z^n, n \in Z^+$ y comenzar a explorar los mapeos cuando n es impar o par. Ahora bien, si consideramos $w = z^n, n \in Z^-$ para comenzar es útil analizar la transformación: **Inversión**. $w = z^{-1} = \frac{1}{z}; z \neq 0$ y continuar el análisis con las construcciones como $w = \frac{1}{z + a}, a = cte.$ ó bien $w = \frac{1}{z + bi}, b = cte.$ para entender escrituras más amplias

Asignatura: **Matemáticas avanzadas**. Clave: **1424**; Grupo: **02**; Semestre: **2020-2**
Profesor: **M. en I. Gabriel López Domínguez**. e-mail: **glopezx1y2@hotmail.com**
Horario: 7:00 a 9:00 horas Salón: **J208**
Días: MIE y VIE Fecha: Viernes 31 de Enero de 2020.

$w = \dfrac{\alpha}{\beta z + \gamma z_0}, \quad z_0 \in C$ donde la importancia consiste en comprender que sucede cuando varían α, β, γ; lo anterior puede ser simplificado con ayuda de la computadora.

La transformación $w = \alpha z + \beta$ donde α y β con constantes complejas dadas, se llama una **transformación lineal**; pues, es una combinación de las transformaciones de traslación, rotación y dilatación.

La transformación:

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

Se llama una **transformación racional o bilineal**. Esta transformación se puede considerar como combinación de las transformaciones de *traslación, rotación, dilatación e inversión*. La transformación bilineal tiene la propiedad de que círculos en el plano z se aplican en círculos en el plano w.

Ejemplos:

1. Encuentre el mapeo de $y = 1,\ x \in [-1, 1]$ usando las transformaciones $w = \dfrac{1}{z}$, $w = \dfrac{1}{z+1}$ y $w = \dfrac{1}{z+i}$

2. Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$ obtener su mapeo mediante la transformación $w = z^{-1}$.

3. Obtenga el mapeo de $y = 1,\ x \in [-1, 1]$ siendo $w = \dfrac{z+1}{z-1}$.

4. Encuentre la transformación bilineal que mapea los tres puntos $z_1 = i$, $z_2 = 1$ y $z_3 = 0$ en los tres puntos $w_1 = 0$, $w_2 = -i$ y $w_3 = 1$ en el plano w respectivamente.

<u>CIERRE</u>

Estudiar: *Funciones elementales.*

Asignatura: **Matemáticas avanzadas**. Clave: **1424**; Grupo: **02**; Semestre: **2020-2**
Profesor: **M. en I. Gabriel López Domínguez**. e-mail: **glopezx1y2@hotmail.com**
Horario: 7:00 a 9:00 horas Salón: **J208**
Días: MIE y VIE Fecha: Miércoles 5 de Febrero de 2020.

APERTURA

Las **funciones exponenciales** están definidas como $w = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + isen\ y)$ donde $e = 2.7182...$ es la base de los logaritmos naturales. Si $a \in R^+$ se define $a^z = e^{z\ln a}$.

Las **funciones trigonométricas o circulares** definidas en términos de funciones exponenciales son:

$$sen\,z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \qquad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \qquad \tan z = \frac{sen\,z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)};$$
$$\csc z = \frac{1}{sen\,z} = \frac{2i}{e^{iz} - e^{-iz}}; \quad \sec z = \frac{1}{\cos z} = \frac{2}{e^{iz} + e^{-iz}}; \quad \cot z = \frac{\cos z}{sen\,z} = \frac{i\left(e^{iz} + e^{-iz}\right)}{e^{iz} - e^{-iz}}$$

Para las funciones trigonométricas complejas, se cumple:

$$sen^2 z + \cos^2 z = 1; \quad 1 + \tan^2 z = \sec^2 z; \quad 1 + \cot^2 z = \csc^2 z;$$
$$sen(-z) = -sen\ z; \quad \cos(-z) = \cos\ z; \quad \tan(-z) = -\tan\ z;$$
$$sen(z_1 \pm z_2) = senz_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 senz_2;$$
$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp sen\ z_1 sen\ z_2;$$
$$\tan(z_1 \pm z_2) = \frac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1 \mp \tan z_1 \tan z_2}$$

Las **funciones hiperbólicas** se definen como:

$$senh\,z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \qquad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \qquad \tanh z = \frac{senh\,z}{\cosh z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}};$$
$$\csc h\,z = \frac{1}{senh\,z} = \frac{2}{e^z - e^{-z}}; \quad \sec h\,z = \frac{1}{\cosh z} = \frac{2}{e^z + e^{-z}}; \quad \coth z = \frac{\cosh z}{senh\,z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}$$

También, para las funciones hiperbólicas complejas son válidas las propiedades siguientes:

$$\cosh^2 z - senh^2 z = 1; \quad 1 - \tanh^2 z = \sec h^2 z; \quad \coth^2 z - 1 = \csc h^2 z;$$
$$senh(-z) = -senh\ z; \quad \cosh(-z) = \cosh\ z; \quad \tanh(-z) = -\tanh\ z;$$
$$senh(z_1 \pm z_2) = senh\ z_1 \cosh z_2 \pm \cosh z_1 senh\ z_2;$$
$$\cosh(z_1 \pm z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 \pm senh\ z_1 senh\ z_2;$$
$$\tanh(z_1 \pm z_2) = \frac{\tanh z_1 \pm \tanh z_2}{1 \pm \tanh z_1 \tanh z_2}$$

Adicionalmente, son válidas las siguientes relaciones:

$$sen\ iz = isenh\ z; \quad \cos\ iz = \cosh\ z; \quad \tan\ iz = i\tanh\ z;$$
$$senh\ iz = isen\ z; \quad \cosh\ iz = \cos\ z; \quad \tanh\ iz = i\tan\ z$$

Funciones logarítmicas:

$$z = e^w, \quad w = \ln z, \quad w = \ln r + i(\theta + 2k\pi) \quad k = 0, \pm 1, \pm 2; \quad z = re^{i\theta} = re^{i(\theta+2k\pi)}$$

Funciones trigonométricas inversas:

$$sen^{-1}z = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right); \quad \cos^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right); \quad \tan^{-1} z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right);$$

$$\csc^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{i+\sqrt{z^2-1}}{z}\right); \quad \sec^{-1} z = \frac{1}{i}\ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right); \quad \cot^{-1} z = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{z+i}{z-i}\right)$$

Funciones hiperbólicas inversas:

$$senh^{-1}z = \ln\left(z + \sqrt{z^2+1}\right); \quad \cosh^{-1} z = \ln\left(z + \sqrt{z^2-1}\right); \quad \tanh^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+z}{1-z}\right);$$

$$\csc h^{-1} z = \ln\left(\frac{1+\sqrt{z^2+1}}{z}\right); \quad \sec h^{-1} z = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-z^2}}{z}\right); \quad \coth^{-1} z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

Funciones algebraicas y trascendentales:

$$P_0(z)w^n + P_1(z)w^{n-1} + \ldots + P_{n-1}(z)w + P_n(z) = 0; \quad P_0(z) \neq 0, n \in z^+, \quad w = f(z)$$

Ejemplo:

Demostrar $sen^2 z + \cos^2 z = 1$

Probar que se cumple: $sen^{-1}z = \frac{1}{i}\ln\left(iz + \sqrt{1-z^2}\right)$ al escoger la rama principal $sen^{-1}z$ de para la cual $sen^{-1}0 = 0$

Sea $w = f(z) = \left(z^2+1\right)^{\frac{1}{2}}$, mostrar que $z = \pm i$ son los puntos de ramificación de $f(z)$.

<u>Límite de una función de variable compleja.</u>

Sea $f(z)$ definida y unívoca en una vecindad de $z = z_0$ con la posible excepción de z_0 (o sea, en una vecindad reducida de z_0). Decimos que el número l es el límite de $f(z)$ cuando z tiende a z_0 y escribimos $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$ si para cualquier número positivo ε (posiblemente muy pequeño) podemos encontrar algún número positivo δ (generalmente depende de ε) tal que $\left|f(z) - l\right| < \varepsilon$ cuando $0 < \left|z - z_0\right| < \delta$.

Profesor: **M. en I. Gabriel López Domínguez**. e-mail: **glopezx1y2@hotmail.com**

Teoremas sobre límites

Si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ y $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = B$, entonces

1. $\lim\limits_{z \to z_0} \{ f(z) + g(z) \} = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) + \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = A + B$

2. $\lim\limits_{z \to z_0} \{ f(z) - g(z) \} = \lim\limits_{z \to z_0} f(z) - \lim\limits_{z \to z_0} g(z) = A - B$

3. $\lim\limits_{z \to z_0} \{ f(z) g(z) \} = \left\{ \lim\limits_{z \to z_0} f(z) \right\} \left\{ \lim\limits_{z \to z_0} g(z) \right\} = AB$

4. $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{\lim\limits_{z \to z_0} f(z)}{\lim\limits_{z \to z_0} g(z)} = \dfrac{A}{B}, \quad B \neq 0$

Por medio de la transformación $w = \dfrac{1}{z}$ el punto $z = 0$ (o sea, el origen) es aplicado en $w = \infty$, llamado el punto en el infinito en el plano w. Análogamente denotamos por $z = \infty$ el punto en el infinito en el plano z.

Límite cuando $z \to \infty$

Decimos que $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = l$ o que $f(z)$ tiende a l cuando z tiende a infinito, si para cualquier $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $M > 0$ tal que $\left| f(z) - l \right| < \varepsilon$ cuando $|z| > M$.

Límite cuando $z \to z_0$

Decimos que $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ o que $f(z)$ tiende a infinito cuando z tiende a z_0, si para cualquier $N > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $\left| f(z) \right| > N$ cuando $0 < |z - z_0| < \delta$.

Continuidad de una función de variable compleja

Sea $f(z)$ definida y unívoca en una vecindad de $z = z_0$ así como en $z = z_0$. La función $f(z)$ se llama continua en $z = z_0$, si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Observe que para que $f(z)$ sea continua en $z = z_0$ debe cumplir:

1. $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = l$ debe existir
2. $f(z_0)$ debe existir, o sea $f(z)$ está definida en z_0

3. $l = f\left(z_0\right)$

<u>Continuidad uniforme</u>

Una función $f\left(z\right)$ es llamada continua en una región si es continua en todos los puntos de la región. Entonces por definición, en cada punto z_0 de la región y para cada $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ (el cual en general depende de ε y del punto particular z_0) tal que $\left|f\left(z\right) - f\left(z_0\right)\right| < \varepsilon$ cuando $\left|z - z_0\right| < \delta$. Si podemos encontrar δ que dependa de ε pero no del punto particular z_0 se dice que $f\left(z\right)$ es uniformemente continua en la región.

<u>EJEMPLOS</u>

Utilizando teoremas sobre límites comprobar:

1. $\displaystyle \lim_{z \to 1+i} \left(z^2 - 5z + 10\right) = 5 - 3i$
2. $\displaystyle \lim_{z \to -2i} \frac{\left(2z+3\right)\left(z-1\right)}{z^2 - 2z + 4} = -\frac{1}{2} + \frac{11}{4}i$
3. $\displaystyle \lim_{z \to 2e^{\frac{\pi}{3}i}} \frac{z^3 + 8}{z^4 + 4z^2 + 16} = \frac{3}{8} - \frac{\sqrt{3}}{8}i$

<u>CIERRE</u>

Estudiar: *Derivada de funciones de variable compleja.*

Asignatura: **Matemáticas avanzadas**. Clave: **1424**; Grupo: **02**; Semestre: **2020-2**
Profesor: **M. en I. Gabriel López Domínguez**. e-mail: **glopezx1y2@hotmail.com**
Horario: 7:00 a 9:00 horas Salón: **J208**
Días: MIE y VIE Fecha: Viernes 7 de Febrero de 2020.

APERTURA

1. Introducción a MATLAB.

Introducción a **matlab**. Basado en el uso de matrices. Algunos comandos: *date, calendar, pwd, ls, dir, help, demo*, etc. Comprensión del significado de vector, dimensión (*size*), suma de vectores, producto punto (*dot*) y producto cruz (*cross*). Solución de ecuaciones algebraicas *solve*, obtención de límite de funciones *limit*, aproximación a la derivada *diff*, cálculo de integrales *int*; raíces de polinomios *roots*, determinante de una matriz *det*(A); etc. Realizar operaciones de suma, resta, producto y división con números complejos, identificando módulo y argumento.

Comprensión para graficar funciones dadas en forma explícita, establecer dominio de la variable independiente mediante el concepto de partición y establecer la variable dependiente. Comando útiles asociados a la descripción de gráficas: *plot*, *xlabel, ylabel, zlabel, title, grid, legend, figure, hold on*, *hold off*. Con base en lo anterior invocar al editor mediante *edit* y hacer uso de archivos **script** identificados como *archivo.m* y después modificarlos para graficar algunas funciones: Constante, Identidad, Valor absoluto, Cuadrática, Cúbica, Polinomial, Raíz cuadrada, Raíz cúbica, Trigonométricas (seno y coseno); etc. Comprensión del concepto de mapeo de una función de variable compleja.

Comprender la sintaxis para graficar ecuaciones dadas en forma paramétrica con el comando *plot y plot3* asociados a dos y tres dimensiones. Casos particulares: círculo, elipse, hipérbola y una hélice. Introducción a curvas en el espacio y determinación de ejes coordenados. Comentar la importancia de poder graficar en otros sistemas coordenados tal como: *coordenadas polares, cilíndricas o esféricas*. Graficar algunas funciones: Cardioide, Espiral de Arquímides, Astroide, Folio de Descartes, Lemniscata.

Dar la idea fundamental para graficar superficies definiendo el dominio en el plano X-Y mediante una retícula usando *meshgrid* y posteriormente proceder a la gráfica de superficies usando *surf*. Algunos ejemplos son: planos en el espacio, cilindros, conos, paraboloides, paraboloides hiperbólicos, etc. También identificar visualmente la intersección de superficies en el espacio. Asociar curvas de nivel y contornos.

A continuación se procede con la gráfica las funciones seno y coseno en el plano y se crea el ***script*** en el editor para ser ejecutado en la línea de comandos.

1. Código en matlab:
```
%UNAM.FI.DCB
%MATEMÁTICAS AVANZADAS
%FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS
x=-2*pi:0.1:2*pi;
y1=sin(x);
y2=cos(x);
plot(x,y1,x,y2);
xlabel('EJE X');
ylabel('EJE Y');
title('FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS');
grid;
legend('sen x','cos x');
```

Ahora, se resuelve en matlab el siguiente ejemplo:

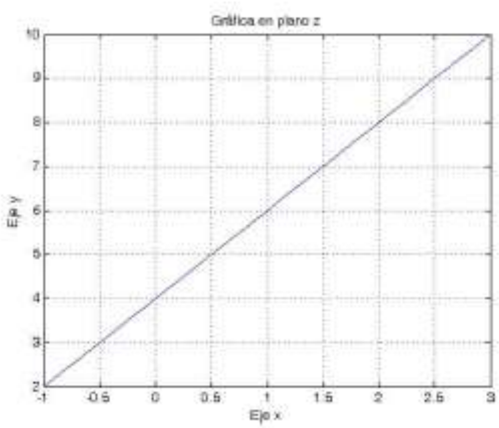
2. Encuentre la imagen en el plano w de la recta $y=2x+4, \quad x\in[-1,3]$ en el plano z, $z=x+iy$ bajo el mapeo $w=2z+6$.

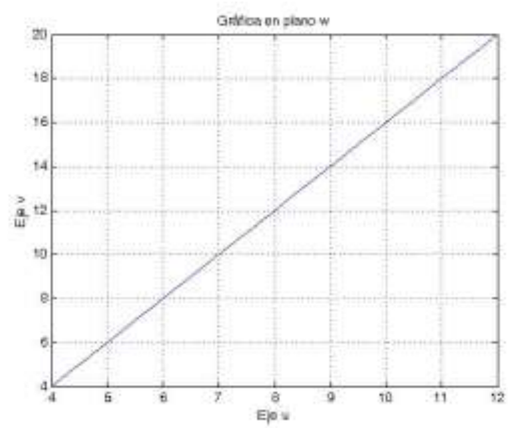
Las líneas de código en el script de matlab son:

```
x=-1:0.1:3;
y=2*x+4;
plot(x,y);
xlabel('Eje x');
ylabel('Eje y');
grid;
title('Gráfica en plano z');

figure();
z=x+i*y;
w=2*z+6;
plot(w);
grid;
xlabel('Eje u');
ylabel('Eje v');
title('Gráfica en plano w');
```

Las gráficas en el plano z y en el plano w se muestran a continuación:





Ejemplo: Dada la función $y=\dfrac{1}{2}x$ y considerando $z=x+iy$; trazar el mapeo (usando **matlab**) en el plano w mediante las transformaciones:

$$w_1=z;\quad w_2=2z;\quad w_3=z+1;\quad w_4=z+i;\quad w_5=z^2$$

Ejemplo: Dado $z_1=1+2i$ obtener el mapeo (usando **matlab**) de $w=z_1 z$.

Ejemplo: Usando **matlab** analizar el mapeo de $w=\dfrac{z+1}{z-1}$

Derivada de la función de una variable compleja

Se llama derivada de la función $w = f(z)$ en el punto z si existe el límite $\frac{dw}{dz} = f'(z) = \underset{\Delta z \to 0}{lím} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \underset{\Delta z \to 0}{lím} \frac{\Delta w}{\Delta z} \to \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$ cuando Δz tiende a cero.

Funciones analíticas

Si la derivada $f'(z)$ existe en todo punto z de una región $\Re$, entonces diremos que $f(z)$ es analítica en $\Re$ y nos referiremos a ella como una función analítica en $\Re$. Los términos **regular** y **holomorfa** son usados algunas veces como sinónimos de analítica.

Ecuaciones Cauchy-Riemann

Una condición necesaria para que $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ sea analítica en una región $\Re$ es que, en $\Re$, u y v satisfagan las condiciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ que satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann son llamadas algunas veces *funciones conjugadas*.

Ejemplos:

1. Obtenga la derivada de la función $f(z) = z^2$ y verificar que se cumplen las condiciones de Cauchy-Riemann.

2. Dada $u(x,y) = x^2 - y^2 + 2x$, encuentre la función conjugada $v(x,y)$ tal que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ es una función analítica de z en todo el plano z.

3. Verificar que las partes real e imaginaria de las siguientes funciones satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann y deducir entonces que cada función es analítica.

$$(a) \quad f(z) = z^2 + 5iz + 3 - i, \quad (b) \quad f(z) = ze^{-z}, \quad (c) \quad f(z) = sen\, 2z$$

FUNCIONES ARMÓNICAS

Dada $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ y si las segundas derivadas parciales de u y v con respecto a x e y existen y son continuas en una región $\Re$, entonces de las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Se obtiene

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

Las partes real e imaginaria de una función analítica satisfacen la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=0 \qquad \nabla^2\psi=0 \qquad \nabla^2\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

El operador ∇^2 es llamado usualmente el *laplaciano*.

Ejemplo: Demostrar que $u(x,y)=e^{-x}\left(x\,sen\,y-y\cos y\right)$ es armónica; encontrar v tal que $f(z)=u+iv$ es analítica. Hallar $f(z)$.

FAMILIAS ORTOGONALES

Si $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ es analítica; entonces las familias de curvas de un parámetro $u(x,y)=\alpha,\quad v(x,y)=\beta$ donde α y β son constantes, son *ortogonales*, es decir, cada elemento de una familia es perpendicular a cada elemento de la otra familia en su punto de intersección. Las curvas imágenes correspondientes en el plano w consistente de rectas paralelas a los ejes u y v, constituyen también familias ortogonales. Cuando la función $f(z)$ es analítica el ángulo entre dos curvas C_1 y C_2 en el plano z será igual (en magnitud y sentido) al ángulo entre las curvas imágenes C_1' y C_2' correspondientes en el plano w.

CURVAS

Si $\phi(t)$ y $\psi(t)$ son funciones de variable real t supuestas continuas en $t_1\le t\le t_2$, las ecuaciones paramétricas $z=x+iy=\phi(t)+i\,\psi(t)=z(t)$ definen una *curva continua* o *arco* en el plano z que une los puntos $a=z(t_1)$ y $b=z(t_2)$. Si $t_1\ne t_2$ mientras $z(t_1)=z(t_2)$, los puntos finales coinciden y la curva se llama *cerrada*. Una curva cerrada que no se interseca a sí misma se llama *curva simple cerrada*. Si $\phi(t)$ y $\psi(t)$ tienen derivadas continuas en $t_1\le t\le t_2$ la curva es llamada frecuentemente una *curva lisa o arco*.

CIERRE

Estudiar: *Gradiente, Divergencia, Rotacional y Laplaciano*.

Asignatura: **Matemáticas avanzadas**. Clave: **1424**; Grupo: **02**; Semestre: **2020-2**
Profesor: **M. en I. Gabriel López Domínguez**. e-mail: **glopezx1y2@hotmail.com**
Horario: 7:00 a 9:00 horas Salón: **J208**
Días: MIE y VIE Fecha: Miércoles 12 de Febrero de 2020.

APERTURA

DERIVADA

Dada $z = x + iy$ y considerando el parámetro t entonces $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{dx}{dt} + i\dfrac{dy}{dt}$ conocida como la velocidad.

Coordenadas conjugadas: $F(x, y) = F\left(\dfrac{z+\bar{z}}{2}, \dfrac{z-\bar{z}}{2i}\right) = G(z, \bar{z})$

Operadores: $\dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial z} + \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$; $\quad \dfrac{\partial}{\partial y} = i\left(\dfrac{\partial}{\partial z} - \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}\right)$

Operador nabla: $\nabla \equiv \dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y} = 2\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}$; $\quad \overline{\nabla} \equiv \dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y} = 2\dfrac{\partial}{\partial z}$

Considerando $A(x, y) = P(x, y) + iQ(x, y)$, entonces el **Gradiente**, la **Divergencia**, el **Rotacional** y el **Laplaciano** son:

$$\nabla A = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\big(P(x,y) + iQ(x,y)\big) = 2\frac{\partial B}{\partial \bar{z}}$$

$$\nabla \cdot A = \mathrm{Re}\{\overline{\nabla}A\} = \mathrm{Re}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P + iQ)\right\} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

$$\nabla \times A = \mathrm{Im}\{\overline{\nabla}A\} = \mathrm{Im}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(P + iQ)\right\} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\nabla \circ \nabla \equiv \nabla^2 \equiv \mathrm{Re}\{\overline{\nabla}\nabla\} = \mathrm{Re}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

Ejemplo: Sea $f(z) = \dfrac{1+z}{1-z}$ hallar $f'(z)$

Ejemplo: Demostrar $\dfrac{d}{dz}\ln z = \dfrac{1}{z}$

Ejemplo: Derivar $f(z) = \cos^2(2z + 3i)$

Ejemplo: Calcular el límite $\lim\limits_{z \to i} \dfrac{z^{10}+1}{z^6+1}$

Profesor: **M. en I. Gabriel López Domínguez**. e-mail: **glopezx1y2@hotmail.com**

Ejemplo: Sea $A(x,y)=2xy-ix^2y^3$ hallar $\nabla A, \quad \nabla\cdot A, \quad \nabla\times A, \quad \nabla^2 A$

APLICACIÓN DE UN SEMI-PLANO SOBRE UN CÍRCULO

Sea z_0 cualquier punto P en el semi-plano superior del plano z denotado por $\Re$. La transformación

$$w=e^{i\theta_0}\left(\frac{z-z_0}{z-\bar{z}_0}\right)$$

Aplica este semi-plano superior de una manera biunívoca sobre el interior $\Re'$ del círculo de radio unitario $|w|=1$, y recíprocamente. Cada punto del eje x se aplica sobre la frontera del círculo.

LA TRANSFORMACIÓN DE CHRISTOFFEL-SCHWARZ

Considere un polígono en el plano w teniendo vértices en $w_1, w_2, \ldots, w_n$ con ángulos interiores correspondientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ respectivamente. Los puntos $w_1, w_2, \ldots, w_n$ se aplican respectivamente en los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sobre el eje real del plano z.

Una transformación que aplica el interior $\Re$ del polígono del plano w sobre el semi-plano superior $\Re'$ del plano z y la frontera del polígono sobre el eje real, está dada por

$$\frac{dw}{dz}=A(z-x_1)^{\alpha_1/\pi-1}(z-x_2)^{\alpha_2/\pi-1}\cdots(z-x_n)^{\alpha_n/\pi-1}$$

$$w=A\int(z-x_1)^{\alpha_1/\pi-1}(z-x_2)^{\alpha_2/\pi-1}\cdots(z-x_n)^{\alpha_n/\pi-1}\,dz+B$$

Donde A y B son constantes complejas.

Considérese tener en cuenta:

1. Tres de los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ se pueden elegir arbitrariamente.
2. Las constantes A y B determinan el tamaño, orientación y posición del polígono.
3. Es conveniente escoger un punto x_n en el infinito.
4. Polígonos abiertos infinitos se pueden considerar casos límites de polígonos cerrados.

La transformación de Schwarz-Christoffel se aplica a problemas de flujo de fluidos y de la teoría de potencial electrostático. Matemáticos alemanes, Schwarz (1843-1921) y Christoffel (1829-1900).

CIERRE

Estudiar: *Integral de una función de variable compleja*.

Asignatura: **Matemáticas avanzadas**. Clave: **1424**; Grupo: **02**; Semestre: **2020-2**
Profesor: **M. en I. Gabriel López Domínguez**. e-mail: **glopezx1y2@hotmail.com**
Horario: 7:00 a 9:00 horas Salón: **J208**
Días: MIE y VIE Fecha: Viernes 14 de Febrero de 2020.

APERTURA

INTEGRALES INDEFINIDAS

Si $f(z)$ y $F(z)$ son analíticas en una región $\Re$ tal que $F'(z)=f(z)$, entonces $F(z)$ se llama *integral indefinida o antiderivada* de $f(z)$ denotada por $F(z)=\int f(z)\,dz$.

INTEGRALES COMPLEJAS DE LÍNEA

Sea $f(z)$ continua en todos los puntos de una curva C de longitud finita. Se llama integral compleja de línea definida desde a a b lo largo de la curva C.

$$\int_a^b f(z)\,dz, \quad \int_C f(z)\,dz$$

Si $f(z)$ es analítica en todos los puntos de una región $\Re$ y si C es una curva en $\Re$, entonces $f(z)$ es integrable a lo largo de C. Si $f(z)=u(x,y)+i\,v(x,y)$, entonces

$$\int_C f(z)\,dz=\int_C (u+iv)(dx+i\,dy)=\int_C u\,dx-v\,dy+i\int_C v\,dx+u\,dy$$

PROPIEDADES DE LAS INTEGRALES

Si $f(z)$ y $g(z)$ son integrables a lo largo de C, entonces

1. $\int_C \{f(z)+g(z)\}\,dz=\int_C f(z)\,dz+\int_C g(z)\,dz$
2. $\int_C A\,f(z)\,dz=A\int_C f(z)\,dz$, A es una constante
3. $\int_a^b f(z)\,dz=-\int_b^a f(z)\,dz$
4. $\int_a^b f(z)\,dz=\int_a^m f(z)\,dz+\int_m^b f(z)\,dz$, a, b, m están en C
5. $\left|\int_C f(z)\,dz\right|\le ML$ donde $|f(z)|\le M$ o sea M es una cota superior de $|f(z)|$ sobre C y L es la longitud de C.

REGIONES SIMPLE Y MULTIPLEMENTE CONEXAS

Una región $\Re$ se llama simplemente conexa si cualquier curva simple cerrada contenida en $\Re$ se puede contraer a un punto sin salirnos de $\Re$. Una región $\Re$ que no es simplemente conexa se llama múltiplemente conexa.

Profesor: **M. en I. Gabriel López Domínguez**. e-mail: **glopezx1y2@hotmail.com**

FORMA COMPLEJA DEL TEOREMA DE GREEN

Sea $F(z,\bar{z})$ continua y con derivadas parciales continuas en una región $\Re$ y sobre su frontera C, donde $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$ son las coordenadas conjugadas complejas. Entonces, el Teorema de Green se puede escribir en la forma $\oint_C F(z,\bar{z})\,dz = 2i\iint_{\Re}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}\,dA$ donde dA representa el elemento diferencial de área $dxdy$.

TEOREMA DE CAUCHY-GOURSAT

Sea $f(z)$ analítica en una región $\Re$ y sobre su frontera C. Entonces

$$\oint_C f(z)\,dz = 0.$$

Este teorema fundamental, llamado usualmente el **Teorema integral de Cauchy** es válido para regiones simple y múltiplemente conexas.

TEOREMA DE MORERA

Sea $f(z)$ continua en una región $\Re$ simplemente conexa y supongamos que

$$\oint_C f(z)\,dz = 0$$

Alrededor de cada curva simple cerrada C en $\Re$. Por esta razón, $f(z)$ es analítica en $\Re$. Este teorema, debido a Morera (1856-1909), se llama con frecuencia el *recíproco del teorema de Cauchy*.

INTEGRALES DEFINIDAS

Sea una función de valor complejo F de una variable real t

$$F(t)=u(t)+iv(t),\quad a\le t\le b$$

$$\int_a^b F(t)dt=\int_a^b u(t)dt+i\int_a^b v(t)dt$$

$$\operatorname{Re}\int_a^b F(t)dt=\int_a^b \operatorname{Re}[F(t)]dt$$

Para cada constante compleja $\gamma=c_1+ic_2$

$$\int_a^b \gamma F(t)dt=\int_a^b (c_1u-c_2v)\,dt+i\int_a^b (c_2u+c_1v)\,dt$$

$$\int_a^b \gamma F(t)\,dt = (c_1 + ic_2)\left(\int_a^b u\,dt + i\int_a^b v\,dt\right) = \gamma\int_a^b F(t)\,dt$$

Consideremos que el valor de la integral definida es un número complejo diferente de cero. Si r_0 es el módulo y θ_0 es el argumento de ese número entonces $r_0 e^{i\theta_0} = \int_a^b F(t)\,dt$

Se tiene: $\left|\int_a^b F(t)\,dt\right| \le \int_a^b |F(t)|\,dt$

Se tiene: $\left|\int_a^\infty F(t)\,dt\right| \le \int_a^\infty |F(t)|\,dt$

CONTORNOS

Un arco C es un conjunto de puntos $z = (x, y)$ en el plano complejo tal que $x = x(t), \quad y = y(t); \quad a \le t \le b$ donde $x(t)$ y $y(t)$ son funciones continuas del parámetro real t.

Ejemplo: Analizar $z(t) = \begin{cases} t + it & 0 \le t \le 1 \\ t + i & 1 \le t \le 2 \end{cases}$

Ejemplo: Analizar la curva cerrada simple $z(t) = \cos t + isent, \quad 0 \le t \le 2\pi$.

Longitud de arco $L = \int_a^b |z'(t)|\,dt$; si $t = \phi(r), \quad c \le r \le d$ entonces $L = \int_c^d |z'(\phi(r))|\phi'(r)dr$; por lo que $L = \int_c^d |z'(r)|\,dr$.

Ejemplos: Evaluar $\int_0^\pi e^{it}\,dt$; Evaluar $\int_0^\infty e^{-zt}\,dt, \quad \operatorname{Re} z > 0$; Derivar la función $f(t) = e^{it}$.

CIERRE

Estudiar: *Integrales de línea de variable compleja*.

Asignatura: **Matemáticas avanzadas**. Clave: **1424**; Grupo: **02**; Semestre: **2020-2**
Profesor: **M. en I. Gabriel López Domínguez**. e-mail: **glopezx1y2@hotmail.com**
Horario: 7:00 a 9:00 horas Salón: **J208**
Días: MIE y VIE Fecha: Miércoles 19 de Febrero de 2020.

APERTURA

INTEGRALES DE LÍNEA

La integral de línea depende del contorno C y de la función f , es decir : $\int_C f(z)dz \quad o \quad \int_\alpha^\beta f(z)dz$; al considerar el contorno $z(t)=x(t)+iy(t), \quad a\le t\le b$ entonces $\alpha=z(a), \quad \beta=z(b)$. Si la función $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ es continua por tramos en C se define la integral de línea de f a lo largo de C cómo $\int_C f(z)dz=\int_a^b f[z(t)]z'(t)dt$, donde

$f[z(t)]z'(t)=\{u[x(t),y(t)]+iv[x(t),y(t)]\}[x'(t)+iy'(t)]$

$$\text{Así } \int_C f(z)dz=\int_C udx-vdy+i\int_C vdx+udy$$

El contorno $-C$ se describe por medio de la ecuación $z=z(-t)$ donde $-b\le t\le -a$, es decir

$$\int_{-C} f(z)dz=\int_{-b}^{-a} f[z(-t)][-z'(-t)]dt=-\int_C f(z)dz$$

Propiedades:

1. $\int_C \gamma\, f(z)dz=\gamma\int_C f(z)dz$
2. $\int_C [f(z)+g(z)]dz=\int_C f(z)dz+\int_C g(z)dz$
3. Si C consta de un contorno C_1, desde α_1 hasta β_1 y de un contorno C_2, desde α_2 hasta β_2, donde $\beta_1=\alpha_2$ se cumple $\int_C f(z)dz=\int_{C_1} f(z)dz+\int_{C_2} f(z)dz$

Con base en lo anterior

$\left|\int_C f(z)dz\right|\le\int_a^b\left|f[z(t)z'(t)]\right|dt; \quad |f(z)|\le M$ siempre que z se encuentre en el contorno C entonces:

$$\left|\int_C f(z)dz\right|\le M\int_a^b|z'(t)|dt=ML; \quad L=\int_a^b|z'(t)|dt$$

Ejemplo: Calcular la integral $I_1=\int_{C_1} z^2dz$ donde C_1 es el segmento de recta que va desde $z=0$ hasta $z=2+i$.

Asignatura: **Matemáticas avanzadas**. Clave: **1424**; Grupo: **02**; Semestre: **2020-2**
Profesor: **M. en I. Gabriel López Domínguez**. e-mail: **glopezx1y2@hotmail.com**
Horario: 7:00 a 9:00 horas Salón: **J208**
Días: MIE y VIE Fecha: Miércoles 19 de Febrero de 2020.

Ejemplo: Evalúe la integral de contorno $\int_C z^2 dz$ a lo largo de la trayectoria C de $-1+i$ a $5+3i$ y formada por dos segmentos de recta, el primero de $-1+i$ a $5+i$ y el segundo de $5+i$ a $5+3i$.

Ejemplo: Demuestre que $\int_C (z+1)dz = 0$ donde C es la frontera del cuadrado con vértices en $z=0$, $z=1$, $z=1+i$, $z=i$.

Ejemplo: Calcular $\int_C f(z)\,dz$ donde $f(z) = y - x - 3x^2 i$ y C es

a) Es el segmento de recta que va desde $z=0$ a $z=1+i$
b) Consta de dos segmentos, uno que va de $z=0$ a $z=i$ y el otro, de $z=i$ a $z=1+i$

De acuerdo al Teorema de Green para integrales de línea en el cálculo de variables reales

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(Q_x - P_y\right)dx\,dy$$

Al considerar la función $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ que es analítica en toda la región R del plano z se tiene

$$\int_C u\,dx - v\,dy = -\iint_R \left(v_x + u_y\right)dx\,dy\,; \qquad \int_C v\,dx + u\,dy = \iint_R \left(u_x - v_y\right)dx\,dy$$

Al considerar las ecuaciones Cauchy-Riemann, los integrandos de estas dos integrales dobles son cero en toda la región R.

Un dominio simplemente conexo D es un dominio tal que todo contorno simple cerrado dentro del mismo, encierra solo puntos de D.

Ejemplo: Calcular $\int_C \bar{z}\,dz$ donde C es $x = 3t,\ y = t^2 \quad -1 \le t \le 4$.

Ejemplo: Calcular $\oint_C \frac{1}{z}dz$ donde C es $x = \cos t,\ y = sen\,t \quad 0 \le t \le 2\pi$.

TEOREMA DE COUCHY-GOURSAT

Si una función es analítica dondequiera en un dominio simplemente conexo D, entonces para todo contorno simple cerrado C, dentro de D, se cumple

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

Goursat (1858-1936)

Ejemplo: Probar el teorema de Cauchy-Goursat para una región múltiplemente conexa.

Ejemplo: Sea $f(z)$ analítica en una región R limitada por dos curvas simples C_1 y C_2 y también sobre C_1 y C_2. Probar que $\oint_{C_1} f(z)\,dz = \oint_{C_2} f(z)\,dz$, donde C_1 y C_2 se recorren en el sentido positivo relativo a sus interiores.

Ejemplo: Analizar $\int_C dz = 0$, $\int_C z\ dz = 0$, $\int_C z^2\ dz = 0$.

Ejemplo: Hallar el valor numérico $\oint_C \frac{dz}{z-a}$ donde C es una curva simple cerrada y $z = a$ está

a) Fuera de C
b) Dentro de C

Ejemplo: Analizar $\int_B \frac{dz}{z^2\left(z^2+9\right)} = 0$; donde B consta de la circunferencia $|z| = 2$ descrita en la dirección positiva, y de la circunferencia $|z| = 1$ descrita en la dirección negativa.

La función $F(z)$ es una integral indefinida, o antiderivada de f y se escribe $F(z) = \int f(z)dz$; es decir, $F(z)$ es una función analítica cuya derivada es $f(z)$.

Una integral definida se puede evaluar como el cambio en el valor de la integral indefinida, esto es

Ejemplos: Calcular $\int_0^{1+i} z^2\,dz$; evaluar $\int_{-1}^{1} z^{\frac{1}{2}}\,dz$

Ejemplo: Calcular $\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{it}\ dt$

Ejemplo: Integrar $\int_C \bar{z}\,dz$ donde C es el círculo $|z| = 1$

Ejemplo: Integrar $\int_0^{\infty} e^{-zt}\ dt, \quad \operatorname{Re} z > 0$

<u>TEOREMA DE MORERA</u>

Si una función f es continua en todo un dominio simplemente conexo D y si para cada contorno cerrado simple C que se encuentra en D

Asignatura: **Matemáticas avanzadas**. Clave: **1424**; Grupo: **02**; Semestre: **2020-2**
Profesor: **M. en I. Gabriel López Domínguez**. e-mail: **glopezx1y2@hotmail.com**
Horario: 7:00 a 9:00 horas Salón: **J208**
Días: MIE y VIE Fecha: Miércoles 19 de Febrero de 2020.

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

Entonces f es analítica en todo D.

Morera (1856-1909)

<u>FÓRMULA DE LA INTEGRAL DE CAUCHY</u>

Teorema: Se establece que f sea analítica dondequiera, dentro y sobre un contorno cerrado simple C tomado en sentido positivo. Si z_0 es un punto cualquiera interior a C, entonces

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

Ejemplo: Comprobar que $\int_C \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}\,dz = \frac{\pi}{5}$; donde C es la circunferencia $|z| = 2$ tomado en sentido positivo.

Ejemplo: Calcular $\oint_C \frac{\cos z}{z-1}\,dz$ donde C es el contorno triangular dado por los puntos $z=0$, $z = 2+2i$, $z = 2-2i$

Ejemplo: Calcular $\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{\cos z}{(z^2+1)}\,dz$, donde C es el círculo $|z-2i| = 2$.

<u>EXTENSIÓN DE LA FÓRMULA INTEGRAL DE CAUCHY</u>

Si una función $f(z)$ es analítica en cierto dominio, entonces posee derivadas de todos los órdenes en dicho dominio. Estas derivadas son también analíticas en el dominio. Si $f(z)$ es analítica a lo largo de un contorno cerrado simple C así como en su interior y si z_0 es un punto del interior de C, entonces

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz\,.$$

Ejemplo: Determine el valor de $\oint_C \frac{z^3+2z+1}{(z-1)^3}\,dz$, donde C es el contorno $|z| = 2$

Ejemplo: Calcular $\oint_C \frac{\cos z}{(z-1)^3(z-5)^2}\,dz$, donde C es el círculo $|z-4| = 2$

<u>CIERRE</u>

Estudiar: *Integración alrededor de contornos diferentes.*

Asignatura: **Matemáticas avanzadas**. Clave: **1424**; Grupo: **02**; Semestre: **2020-2**
Profesor: **M. en I. Gabriel López Domínguez**. e-mail: **glopezx1y2@hotmail.com**
Horario: 7:00 a 9:00 horas Salón: **J208**
Días: MIE y VIE Fecha: Viernes21 de Febrero de 2020.

APERTURA

Ejemplo: Integrar $\oint\limits_{|z|=4} \dfrac{e^z}{z-\pi i}\,dz$

Ejemplo: Calcular $\oint\limits_C \dfrac{e^z}{(z+2i)^3}\,dz$ donde C está dada por $|z+3i|=2$ recorrida una vez en sentido negativo.

Ejemplo: Integrar $g(z)=\dfrac{z^2+1}{z^2-1}$ en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj alrededor de una circunferencia de radio 1 y con centro en el punto

$$(a)\ z=1 \qquad (b)\ z=\frac{1}{2} \qquad (c)\ z=-1+\frac{1}{2}i \qquad (d)\ z=i\ .$$

Ejemplo: Integrar $g(z)=(z^2-1)^{-1}\tan z$ alrededor del círculo $C:|z|=\dfrac{3}{2}$ (en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj).

Ejemplo: Analizar $\oint\limits_C \dfrac{dz}{z^n}=\begin{cases} 2\pi i & n=1 \\ 0 & n\in z \end{cases}$ si C es un contorno que contiene al origen.

Ejemplo: Hallar el valor numérico de $\oint\limits_C \dfrac{dz}{(z-a)^n},\quad n=2,3,4,\ldots$ donde $z=a$ está dentro de la curva simple cerrada C.

Ejemplo: Evalúe la integral $\oint\limits_C \dfrac{dz}{z-2-i}$ alrededor de cualquier contorno que contenga al punto $z=2+i$.

Ejemplo: Evaluar la integral $\oint\limits_C \dfrac{z}{(z-1)(z+2i)}\,dz$ en algún contorno que contenga a los puntos $z=1,\quad z=-2i$.

Ejemplo: Integrar $\oint\limits_C \dfrac{dz}{z^2+1}$ donde C es el círculo $|z|=3$

Ejemplo: Integrar $\oint\limits_C \dfrac{5z+7}{z^2+2z-3}\,dz$ donde C es el círculo $|z-2|=2$

Profesor: **M. en I. Gabriel López Domínguez**. e-mail: **glopezx1y2@hotmail.com**

SUCESIONES CONVERGENTES O DIVERGENTES

$$\{u_n(z)\} = u_1(z), u_2(z), \ldots, u_n(z)$$

Sumas parciales $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$, convergencia $\lim_{n\to\infty} u_n(z) = 0$

Convergencia absoluta

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ se llama absolutamente convergente si la serie de valores absolutos $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ converge.

Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ converge, pero $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n(z)|$ no converge, decimos que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ es condicionalmente convergente.

$u_n(z)$ converge uniformemente, o es uniformente convergente.

El residuo de la serie es:

$$R_n(z) = u_{n+1}(z) + u_{n+2}(z) + \cdots = S(z) - S_n(z)$$
$$|R_n(z)| = |S(z) - S_n(z)| < \varepsilon \quad \forall \quad n > N$$

<u>CIERRE</u>

Estudiar: *Criterios de convergencia de series.*

Asignatura: **Matemáticas avanzadas**. Clave: **1424**; Grupo: **02**; Semestre: **2020-2**
Profesor: **M. en I. Gabriel López Domínguez**. e-mail: **glopezx1y2@hotmail.com**
Horario: 7:00 a 9:00 horas Salón: **J208**
Días: MIE y VIE Fecha: Miércoles 26 de Febrero de 2020.

APERTURA

Ejemplo: Demuestre que $\sum_{j=1}^{\infty} z^{j-1} = \frac{1}{1-z}, \quad |z|<1$

Ejemplo: Usar la expresión para la suma de una serie geométrica para sumar $\sum_{n=0}^{\infty} e^{inz}$. Determinar la región de convergencia.

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ diverge si $\lim_{n\to\infty} u_n(z) \neq 0$, considerar $\lim_{n\to\infty} |u_n(z)| \neq 0$

Ejemplo: Demostrar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} z^{n-1}$ diverge para $|z| \geq 1$

CRITERIO DEL COCIENTE

Sea la serie $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(z)$ y $\Gamma = \lim_{j\to\infty} \left|\frac{u_{j+1}(z)}{u_j(z)}\right|$

a) La serie converge si $\Gamma < 1$ y la convergencia es absoluta.

b) La serie diverge sí $\Gamma > 1$.

c) Cuando el límite no existe y $\Gamma = 1$ no se proporciona información acerca de la convergencia de la serie.

Ejemplo: Usar el criterio del cociente y el criterio del término n-ésimo para estudiar la convergencia de la serie $\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j j 2^{j+1} z^{2i}$.

Definición: Convergencia uniforme

Decimos que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(z)$, cuya n-ésima suma parcial es $S_n(z)$, converge uniformemente a $S(z)$ en la región R si para todo $\varepsilon > 0$ existe un número N que no depende de z tal que para todo z de R

$$|S(z) - S_n(z)| < \varepsilon, \quad \forall \quad n > N$$

Teorema: Criterio M de Weierstrass

Sea $\sum_{j=1}^{\infty} M_j$ una serie convergente cuyos términos $M_1, M_2, \ldots$ son constantes positivas. La serie $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(z)$ converge uniformemente en una región R si $|u_j(z)| \leq M_j$, para todo z de R.

Teorema: Sea $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(z)$ una serie que converge uniformemente a $S(z)$ en cierta región R. Sea $f(z)$ una función acotada en R, es decir, tal que $|f(z)| \leq k$ (k es constante) en todo punto de R. Entonces, en R

$$\sum_{j=1}^{\infty} f(z)u_j(z) = f(z)u_1(z) + f(z)u_2(z) + \cdots = f(z)S(z)$$

La serie converge uniformemente a $f(z)S(z)$.

Ejemplo: $\sum_{j=1}^{\infty} e^z z^{j-1} = \frac{e^z}{1-z}$

Teorema: Integración término a término

Sea $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(z)$ una serie que converge uniformemente a $S(z)$ en R y suponga que todos los términos $u_1(z), u_2(z), \ldots$ son continuos en R. Sea C un contorno en R, entonces

$$\int_C S(z)dz = \sum_{j=1}^{\infty} \int_C u_j(z)dz = \int_C u_1(z)dz + \int_C u_2(z)dz + \cdots,$$

Es decir, cuando una serie de funciones continuas que converge uniformemente se integra término a término, la serie que resulta de la operación tiene por suma la integral de la suma de la serie original.

Teorema: Analiticidad de la suma de una serie

Si $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(z)$ converge uniformemente a $S(z)$ para todo z en R y si $u_1(z), u_2(z), \ldots$ son funciones analíticas en R entonces $S(z)$ es analítica en R.

Teorema: Diferenciación término a término

Sea $\sum_{j=1}^{\infty} u_j(z)$ una serie que converge uniformemente a $S(z)$ en una región R. Si $u_1(z), u_2(z), \ldots$ son funciones analíticas en R, entonces en todo punto interior de dicha región $\frac{dS}{dz} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{du_j(z)}{dz}$.

<u>SERIES DE POTENCIAS</u>

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n; \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

Ejemplo: Desarrollar la función e^z como a) Serie de Maclaurin; b) Serie de Taylor en $z = i$

Ejemplo: Desarrollar la función $f(z)=\dfrac{1}{1-z}$ en la serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z+1)^n$ ¿Cuáles son los valores de z para los que la serie debe converger a $f(z)$?

TEOREMA

Consideremos el desarrollo en serie de Taylor de una función $f(z)$ alrededor de z_0. El mayor círculo dentro del cual esta serie converge a $f(z)$ en cada punto es $|z-z_0|=a$, donde a es la distancia entre z_0 y la singularidad de $f(z)$ más cercana.

Ejemplo: Calcular el radio del círculo máximo en todo punto del cual el desarrollo indicado es válido

$$f(z)=\frac{1}{z^2+1}=\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-2)^n$$

Ejemplo: Obtenga la serie de Maclaurin de

$$Si(z)=\int_0^z f(z')\,dz'$$

Donde $f(z')=\dfrac{sen\ z'}{z'},\quad z'\neq 0;\quad f(0)=1,\quad z'=0$

La función $Si(z)$ se conoce como **función seno integral** y no puede evaluarse en términos de funciones elementales. Aparece frecuentemente al resolver problemas de radiación electromagnética.

Ejemplo: Mediante un producto de series, obtenga el desarrollo de Maclaurin de $f(z)=e^z\left(\dfrac{1}{1-z}\right)$.

Ejemplo: Obtenga la serie de Maclaurin de $\dfrac{e^z-1}{\cos z}$ a partir de las series de Maclaurin de e^z-1 y $\cos z$.

Aplicación

Las integrales de Fresnel $C(P)$ y $S(P)$ se usan en óptica y en el diseño de antenas de microondas. Están definidas por

$$C(P)=\int_0^P \cos\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt \quad y \quad S(P)=\int_0^P sen\left(\frac{\pi t^2}{2}\right)dt;\quad p\geq 0,\quad t\in R$$

$$F(P)=C(P)+i\,S(P)=\int_0^P e^{\frac{i\pi t^2}{2}}\,dt$$

Ejemplo: Desarrollar $f(z)=\dfrac{z}{z^2-z-2}$ en serie de Taylor alrededor del punto $z=1$.

Ejemplo: Desarrollar $f(z)=\dfrac{z}{(z+1)^2(z-2)}$ en serie de Maclaurin.

CIERRE

Estudiar: *Series de Laurent.*

Asignatura: **Matemáticas avanzadas**. Clave: **1424**; Grupo: **02**; Semestre: **2020-2**
Profesor: **M. en I. Gabriel López Domínguez**. e-mail: **glopezx1y2@hotmail.com**
Horario: 7:00 a 9:00 horas Salón: **J208**
Días: MIE y VIE Fecha: Viernes 28 de Febrero de 2020.

APERTURA

Serie de Laurent, así llamada en honor a su descubridor, el matemático francés Paul Mathieu Hermann Laurent (1841-1908). El desarrollo de una serie de Laurent de una función $f(z)$ es de la forma

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\cdots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+c_1(z-z_0)^1+\cdots$$

Donde la serie converge a $f(z)$ en cierto dominio o región.

Teorema de Laurent

Sea $f(z)$ una función analítica en un dominio anular D definido por $r_1<|z-z_0|<r_2$. Si z pertenece a D, $f(z)$ puede representarse mediante un desarrollo en serie de Laurent

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n=\cdots+c_{-2}(z-z_0)^{-2}+c_{-1}(z-z_0)^{-1}+c_0+c_1(z-z_0)+c_2(z-z_0)^2+\cdots$$

Los coeficientes están dados por

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz$$

Donde C es cualquier contorno cerrado simple contenido en D y tal que la frontera interna $|z-z_0|=r_1$ quede confinada por C. La serie converge uniformemente en toda región anular de D centrada en z_0. La serie de Laurent de una función es única en una región anular dada.

Definición: punto singular aislado

El punto z_p es un punto singular aislado de $f(z)$ si $f(z)$ no es analítica en z_p pero sí en una vecindad punteada de z_p.

Ejemplo: Desarrolle $f(z)=\dfrac{1}{z-3}$ en una serie de Laurent en potencias de $(z-1)$. Determine el dominio a que la serie converge a $f(z)$.

Ejemplo: Desarrolle $f(z)=\dfrac{1}{(z+1)(z+2)}$ en una serie de Laurent en potencias de $(z-1)$ que sea válida en un dominio anular que contenga el punto $z=\dfrac{7}{2}$. Determine el dominio en el que la serie converge a $f(z)$.

Cauchy-Goursat

Sea C un contorno cerrado y simple y sea $f(z)$ una función analítica en el interior de C y sobre C, entonces $\oint_C f(z)dz=0$

Asignatura: **Matemáticas avanzadas**. Clave: **1424**; Grupo: **02**; Semestre: **2020-2**
Profesor: **M. en I. Gabriel López Domínguez**. e-mail: **glopezx1y2@hotmail.com**
Horario: 7:00 a 9:00 horas Salón: **J208**
Días: MIE y VIE Fecha: Viernes 28 de Febrero de 2020.

Ejemplo: Demuestre $\oint_{|z|=r} z^n\,dz = 0; \quad n = -2, -3, \ldots$

Ejemplo: Desarrolle $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ en una serie de Laurent que sea válida en una vecindad punteada de $z = 1$. Determine el dominio de validez de la serie.

Para entender el cálculo de residuos es preciso estar familiarizado con las series de Laurent; los residuos son una valiosa herramienta para la evaluación de muchas clases de integrales.

Definición: Residuo

Sea $f(z)$ una función analítica sobre un contorno simple cerrado C y en todo punto del interior de C, salvo z_0. Entonces el residuo de $f(z)$ en z_0, que se denota por $Res\left[f(z), z_0\right]$ está definido por

$$Res\left[f(z), z_0\right] = \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$$

Considere

$$f(z) = \cdots + c_{-2}(z-z_0)^{-2} + c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

Para evaluar el residuo $Res\left[f(z), z_0\right]$ tomamos un círculo de radio r centrado en z_0, entonces

$$Res\left[f(z), z_0\right] = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z-z_0|=r} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n\,dz = \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \oint_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^n\,dz$$

Donde $\oint_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^n\,dz = \begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$

Todas las integrales valen cero excepto la que corresponde a $n = -1$, entonces $Res\left[f(z), z_0\right] = c_{-1}$

Teorema: El residuo de la función $f(z)$ en el punto singular aislado z_0 es igual al coeficiente de $(z-z_0)^{-1}$ en la serie de Laurent que representa a $f(z)$ en una región anular dada por $0 < |z-z_0| < R$

Ejemplo: Sea $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ haciendo uso del teorema del residuo hallar $\dfrac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz$ donde el contorno es $|z-1| = 1$.

Teorema de los residuos
Sea C un contorno cerrado y simple y sea $f(z)$ una función analítica sobre C y en todo punto de su interior, excepto las singularidades aisladas $z_1, z_0, \ldots, z_n$. Entonces,

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz = Res[f(z), z_1] + Res[f(z), z_2] + \cdots Res[f(z), z_n]$$

Que puede escribirse de manera más compacta como

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[f(z), z_k]$$

Ejemplo: Calcule $\frac{1}{2\pi i}\oint_C z\, sen\left(\frac{1}{z}\right)dz$ integrada alrededor de $|z| = 2$.

Ejemplo: Determine $\oint_C \frac{1}{z(z-1)}dz$, donde C es el círculo $|z-1| = 6$ usando el teorema del residuo.

Sea $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-z_0)^n$ el desarrollo de $f(z)$ en serie de Laurent alrededor del punto singular aislado z_0.

$$f(z) = \cdots + c_{-2}(z-z_0)^{-2} + c_{-1}(z-z_0)^{-1} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

Definición: Parte principal
Los términos de la serie de Laurent que contienen exclusivamente potencias negativas de $(z-z_0)$ se conoce como parte principal.

Definición: Polo de orden N
Decimos que una función tiene un polo de orden N en z_0 si la potencia más negativa de $(z-z_0)$ que aparece en la parte principal de su desarrollo en serie de Laurent alrededor del punto singular z_0 es $-N$.

Definición: Singularidad esencial aislada
Decimos que una función posee una singularidad esencial aislada en z_0 si la parte principal de su desarrollo en serie de Laurent alrededor del punto singular aislado z_0 contiene un número infinito de términos distintos de cero.

Ejemplo: $sen\left(\frac{1}{z}\right) = z^{-1} - \frac{1}{3!}z^{-3} + \frac{1}{5!}z^{-5} - \cdots$ posee una singularidad esencial en $z = 0$.

Ejemplo: $\frac{e^{\frac{1}{z-1}}}{(z-1)^2} = (z-1)^{-2} + (z-1)^{-3} + \frac{1}{2!}(z-1)^{-4} + \cdots$ la función dada tiene una singularidad esencial en $z = 1$.

Definición: Punto singular removible o evitable
Decimos que la función $f(z)$ tiene un punto singular removible (o evitable) en z_0 si la singularidad en z_0 se puede eliminar por medio de una definición adecuada de $f(z)$ en dicho punto.

Ejemplo: La función $f(z)=\dfrac{senh\, z}{z}$ no tiene polo en $z=0$

Ejemplo: Funciones multiformes como $\log z$, $\dfrac{1}{\sqrt{z-1}}$ presentan ramas analíticas cuyos módulos se hacen infinitos en los puntos singulares $z=0,\ z=1$ respectivamente. Dichos puntos singulares no son polos, sino puntos de ramificación.

Reglas para determinar la existencia de un polo

Regla 1: Sea z_0 un punto singular aislado de $f(z)$. Si existe el límite $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^N f(z)$ y si dicho límite no es cero ni infinito, entonces $f(z)$ tiene un polo de orden N en z_0.

Regla 2: Si el polo $f(z)$ en z_0 es de orden N, entonces $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^n f(z)=\begin{cases}0 & n>N\\ \infty & n<N\end{cases}$

Ejemplo: Estudie las singularidades de $f(z)=\dfrac{z\cos z}{(z-1)(z^2+1)^2(z^2+3z+2)}$.

Cálculo de residuos

Para obtener el residuo de una función $f(z)$ en $z=z_0$ se encuentra el desarrollo de Laurent de $f(z)$ en torno a $z=z_0$. En el caso donde $z=z_0$ es un polo de orden k se calcula c_{-1} como

$$c_{-1}=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left\{(z-z_0)^k f(z)\right\}$$

Si $k=1$ (polo simple) el resultado está dado por $c_{-1}=\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$.

Ejemplo: Determine el residuo de $f(z)=\dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$.

Ejemplo: Determine el residuo de $f(z)=\dfrac{e^z}{(z^2+1)z^2}$ en todos los polos.

CIERRE

Estudiar: *Integrales reales mediante el cálculo de residuos.*

Asignatura: **Matemáticas avanzadas**. Clave: **1424**; Grupo: **02**; Semestre: **2020-2**
Profesor: **M. en I. Gabriel López Domínguez**. e-mail: **glopezx1y2@hotmail.com**
Horario: 7:00 a 9:00 horas Salón: **J208**
Días: MIE y VIE Fecha: Miércoles 4 de Marzo de 2020.

APERTURA

Evaluación de integrales reales mediante el cálculo de residuos.

El método es el mismo para todas las integrales de la forma $\int_0^{2\pi} R(sen\theta, \cos\theta)d\theta$. Las funciones R son cocientes de polinomios de $sen\theta$ y $\cos\theta$.

La expresión dada se transforma en una integración de contorno en el plano z, por medio del siguiente cambio de variables:

$$z = e^{i\theta}, \quad dz = e^{i\theta} i\, d\theta, \quad d\theta = \frac{dz}{i\,z}$$

$$sen\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \frac{z - z^{-1}}{2i}; \quad \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

Ejemplo: Utilizando residuos calcular: a) $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{k + sen\theta}, \quad k > 1$ y b) $I = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 - 4sen\theta} d\theta$.

INTEGRALES IMPROPIAS:

$$\int_{-\infty}^{k} f(x)dx; \quad \int_{k}^{\infty} f(x)dx; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Ejemplo: Calcular $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx$ usando el cálculo de residuos.

Teorema: Sea $f(z)$ una función con la siguiente propiedad en el semiplano $\operatorname{Im} z \geq 0$. Existen tres constantes $k > 1$, R_0 y μ tales que $|f(z)| \leq \frac{\mu}{|z|^k}$, para todo $|z| \geq R_0$ en el semiplano considerado. Luego, si C_1 es el arco semicircular $Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $R > R_0$, tenemos $\lim_{R \to \infty} \int_{C_1} f(z)dz = 0$.

Si tenemos una función racional $\lim_{R \to \infty} \int_{C_1} \frac{P(z)}{Q(z)} dz = 0$ donde P, Q son polinomios con $grado\ Q - grado\ P \geq 2$.

Teorema: Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios de x y supongamos que el $grado\ Q$ es superior al de P en dos unidades o más. Supongamos además que $Q(x)$ es distinto de cero para todo valor real de x, entonces $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{res} \frac{P(z)}{Q(z)}$ en todos los polos del semiplano superior.

Ejemplo: Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + x^2 + 1} dx$.

Asignatura: **Matemáticas avanzadas**. Clave: **1424**; Grupo: **02**; Semestre: **2020-2**
Profesor: **M. en I. Gabriel López Domínguez**. e-mail: **glopezx1y2@hotmail.com**
Horario: 7:00 a 9:00 horas Salón: **J208**
Días: MIE y VIE Fecha: Miércoles 4 de Marzo de 2020.

Tipo de integrales aplicadas en la transformada de Fourier:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos px\,dx \quad y \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) sen\, px\,dx$$

Donde $f(x)$ es una función racional de x y p una constante real.

Ejemplo: Calcular $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3x)}{(x-1)^2+1}dx$.

Teorema: Sea $f(z)$ una función con la siguiente propiedad en el semiplano $\operatorname{Im} z \geq 0$. Existen tres constantes $k>0$, R_0 y μ tales que $|f(z)| \leq \frac{\mu}{|z|^k}$, para todo $|z| \geq R_0$ en el semiplano considerado. Entonces, si C_1 es el arco semicircular $Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $R > R_0$, tenemos $\underset{R\to\infty}{lím}\int_{C_1} f(z)e^{ivz}dz$ cuando $v>0$

Lema de Jordan

$$\underset{R\to\infty}{lím}\int_{C_1}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{ivz}dz = 0, \quad v>0, \quad grado\,Q - grado\,P \geq 1$$

$$\int_{-R}^{+R}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{ivx}\,dx + \int_{C_1}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{ivz}dz = 2\pi i\sum_{res}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{ivz}$$

En todos los polos del semiplano superior.

Usando el lema de Jordan

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}e^{ivx}\,dx = 2\pi i\sum_{res}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{ivz}, \quad v>0, \quad Q(x)\neq 0, \quad -\infty < x < \infty$$

Grado de Q superior al grado de P al menos en uno.

Considerando $e^{ivz} = \cos(vz) + i sen(vz)$, sea para el semiplano superior

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}(\cos(vx) + i sen(vx))dx = 2\pi i\sum_{res}\frac{P(z)}{Q(z)}e^{ivz}$$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(vx)\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \operatorname{Re}\left[2\pi i\sum_{res}e^{ivz}\,\frac{P(z)}{Q(z)}\right] \text{ y } \int_{-\infty}^{+\infty}sen(vx)\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \operatorname{Im}\left[2\pi i\sum_{res}e^{ivz}\,\frac{P(z)}{Q(z)}\right]$$

$grado\ Q - grado\ P \geq 1, \quad Q(x)\neq 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad v>0$.

<u>CIERRE</u>

Estudiar: *Series de Fourier.*