UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
DEPARTAMENTO DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
SEGUNDO EXAMEN FINAL
RESOLUCIONES

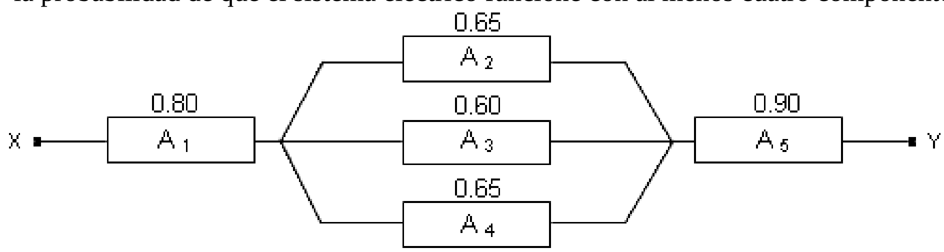
SEMESTRE 2011-1 — **TIPO 1**
DURACIÓN MAX. 2.5 HORAS — **2010, DICIEMBRE 13**

NOMBRE____
Apellido Paterno **Apellido Materno** **Nombre (s)**

1. Considérese un sistema eléctrico integrado como se muestra en el diagrama, donde se indica las probabilidades de que los componentes A_1, A_2, A_3, A_4 y A_5 del sistema operen de modo correcto. Los componentes del sistema funcionan de manera independiente. Para que funcione el sistema una corriente eléctrica debe pasar del nodo X al nodo Y. Calcular:

a) la probabilidad de que el sistema eléctrico funcione.

b) la probabilidad de que el sistema eléctrico funcione con al menos cuatro componentes.



15 Puntos
Resolución

a) Sea F el evento que representa el sistema eléctrico funciona.
Sea A_i el evento que representa el componente i funciona, $i = 1, 2, 3, 4, 5$.
Por independencia de eventos:

$$P(F) = P(A_1)\left[1 - P\left(\overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}\right)\right]P(A_5) = P(A_1)\left[1 - P\left(\overline{A_2}\right)P\left(\overline{A_3}\right)P\left(\overline{A_4}\right)\right]P(A_5) =$$
$$= (0.8)\left[1 - (0.35)(0.4)(0.35)\right](0.9) \approx 0.6847$$

b) Sea $F_{(4\ ó\ 5)}$ el evento que representa el sistema eléctrico funciona con al menos cuatro componentes. Por independencia de eventos:

$$P\left(F_{(4\ ó\ 5)}\right) = P(A_1)P\left(A_2 \cap A_3 \cap \overline{A_4}\right)P(A_5) + P(A_1)P\left(A_2 \cap \overline{A_3} \cap A_4\right)P(A_5) + P(A_1)P\left(\overline{A_2} \cap A_3 \cap A_4\right)P(A_5) +$$
$$+ P(A_1)P(A_2 \cap A_3 \cap A_4)P(A_5) =$$
$$F_{(4\ ó\ 5)} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P\left(\overline{A_4}\right)P(A_5) + P(A_1)P(A_2)P\left(\overline{A_3}\right)P(A_4)P(A_5) +$$
$$+ P(A_1)P\left(\overline{A_2}\right)P(A_3)P(A_4)P(A_5) + P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) =$$
$$= P(A_1)P(A_5)\left[P(A_2)P(A_3)P\left(\overline{A_4}\right) + P(A_2)P\left(\overline{A_3}\right)P(A_4) + P\left(\overline{A_2}\right)P(A_3)P(A_4) + P(A_2)P(A_3)P(A_4)\right]$$

sustituyendo valores

$$F_{(4\ ó\ 5)} = (0.8)(0.9)\left[(0.65)(0.6)(0.35) + (0.65)(0.4)(0.65) + (0.35)(0.6)(0.65) + (0.65)(0.6)(0.65)\right] \approx 0.5008$$

2. En la tienda UNAM se adquirieron tres computadoras de un tipo a \$5000 cada una. Las venderá a \$10000 cada una. El fabricante se comprometió a readquirir cualquier computadora que no se haya vendido después de un periodo especificado a \$2000 cada una. Sea X el número de computadoras vendidas y supóngase que $P(0)=0.1$, $P(1)=0.2$, $P(2)=0.3$ y $P(3)=0.4$. Con $U(X)$ denotando la utilidad asociada con la venta de X unidades, la información dada implica que $U(X)= \text{Ingreso} - \text{Costo} = 10000X + 2000(3-X) - 15000 = 8000X - 9000$. Calcular la utilidad esperada y la varianza.

15 Puntos

Resolución

Dada la función de utilidad y la función de probabilidad de X

$U(X) = 8000X - 9000$

x	0	1	2	3
$f_X(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

Al aplicar valor esperado a la utilidad, se tiene

$E[U(X)] = E[8000X - 9000] = 8000E[X] - 9000$

calculado el valor esperado con la función de probabilidad

$$E[X] = \sum_{\forall x} x\, f_x(x) = 1(0.2) + 2(0.3) + 3(0.4) = 2$$

sustituyendo en la utilidad esperada

$E[U(X)] = 8000[2] - 9000 = 7000$

Para la varianza de la utilidad

$Var[U(X)] = Var(8000X - 9000) = (8000)^2\, Var(X)$

Al calcular la varianza de X con la función de probabilidad, se sabe que

$Var[X] = E(X^2) - [E(X)]^2$

entonces el segundo momento con respecto al origen

$$E[X^2] = \sum_{\forall x} x^2\, f_x(x) = 1^2(0.2) + 2^2(0.3) + 3^2(0.4) = 5$$

$Var[X] = 5 - [2]^2 = 1$

La varianza de la utilidad es

$Var[U(X)] = (8000)^2 = 64000000$

En promedio la utilidad será de \$7000 con desviación estándar \$8000 por la venta de las computadoras.

3. Considere que X y Y son variables aleatorias que se distribuyen conjuntamente, como lo indica la función de probabilidad

$f_{XY}(x,y)$		$x=0$	$x=1$	$x=2$
y	0	0.10	0.08	0.06
	1	0.04	0.20	0.14
	2	0.02	0.06	0.30

a) Calcular $P(X \leq 1\,,\ Y \geq 1)$

b) Determinar $P(X \leq 1 \mid Y \geq 1)$

c) Obtener la covariancia entre las variables aleatorias.

d) ¿Son variables aleatorias conjuntas estadísticamente independientes?

20 Puntos
Resolución

a) De la función de probabilidad, la que se pide es

$P(X \le 1\ ,\ Y \ge 1) = f_{XY}(0,1) + f_{XY}(0,2) + f_{XY}(1,1) + f_{XY}(1,2) = 0.04 + 0.02 + 0.20 + 0.06 = 0.32$

b) La probabilidad pedida es

$P(X \le 1 \mid Y \ge 1) = \dfrac{P(X \le 1\ ,\ Y \ge 1)}{P(Y \ge 1)} = \dfrac{P(X \le 1 \cap Y \ge 1)}{P(Y \ge 1)}$

La función marginal de probabilidad de Y a partir de la definición

$f_Y[y] = \sum_{\forall x} f_{XY}(x,y)$

y	0	1	2
$f_Y(y)$	0.24	0.38	0.38

entonces la probabilidad de que $P(Y \ge 1) = 0.38 + 0.38 = 0.76$

sustituyendo en la probabilidad condicional

$P(X \le 1 \mid Y \ge 1) = \dfrac{0.32}{0.76} \approx 0.4211$

c) La covariancia de las variables aleatorias conjuntas, se define por

$Cov(X\ ,\ Y) = E\left[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\right] = E(XY) - E(X)E(Y)$

para los valores esperados

$E[XY] = \sum_{\forall y} \sum_{\forall x} xy\, f_{XY}(x,y)$

$E[X] = \sum_{\forall x} x\, f_X(x)$

$E[Y] = \sum_{\forall y} y\, f_Y(y)$

La función marginal de probabilidad de X a partir de la definición

$f_X[x] = \sum_{\forall y} f_{XY}(x,y)$

x	0	1	2
$f_X(x)$	0.16	0.34	0.50

Los valores esperados son

$E[XY] = (1)(1)(0.2) + (1)(2)(0.06) + (2)(1)(0.14) + (2)(2)(0.3) = 1.8$

$E[X] = (1)(0.34) + (2)(0.50) = 1.34$

$E[Y] = (1)(0.38) + (2)(0.38) = 1.14$

sustituyendo en la covariancia los promedios

$Cov(X\ ,\ Y) = 1.8 - (1.34)(1.14) = 0.2724$

Existe asociación lineal positiva.

d) Por independencia de variables aleatorias conjuntas, se sabe que

$f_{XY}(x,y) = f_X(x)\, f_Y(y)$

sustituyendo valores tanto de la función conjunta como en las marginales, se tiene

$f_{XY}(0,0) = f_X(0)\, f_Y(0)$

$$0.10 \neq (0.16)(0.24) = 0.0384$$

por lo tanto se concluye que **no** son independientes.

4. Estadísticas publicadas por una oficina de seguridad de la Dirección de Tránsito de una gran ciudad muestra que, en promedio, en la noche de un fin de semana uno de cada diez conductores maneja en estado de ebriedad. Si 400 conductores se inspeccionan al azar en una noche de sábado, ¿cuál es la probabilidad de que el número de conductores ebrios sea:

a) menor que 32?

b) mayor que 49?

c) por lo menos 35 pero menor que 47?

20 Puntos

Resolución

Sea X la variable aleatoria que representa el número de conductores que manejan en estado de ebriedad, en sábado por la noche.

$$X \sim Binomial\left(n = 400\ ,\ p = \frac{1}{10}\right)$$

dado que n es grande y p es pequeña, se aproxima por distribución normal

$$Y \sim Normal\left(\mu = np\ ,\ \sigma^2 = npq\right)$$

sustituyendo

$$Y \sim Normal\left(\mu = 40\ ,\ \sigma^2 = 36\right)$$

a) Se va a calcular y con la tabla de la función de distribución acumulativa normal estándar

$$P(Y \leq 32) \approx P\left(Z \leq \frac{32 - 40 + \frac{1}{2}}{6}\right) = P(Z \leq -1.25) = 0.1056$$

b) Se pide calcular y usando tablas

$$P(Y \geq 49) \approx P\left(Z \geq \frac{49 - 40 - \frac{1}{2}}{6}\right) = P(Z \geq 1.42) = 1 - F_Z(1.42) = 1 - 0.9222 = 0.0778$$

c) A calcular

$$P(35 \leq Y \leq 47) \approx P\left(\frac{35 - 40 - \frac{1}{2}}{6} \leq Z \leq \frac{47 - 40 + \frac{1}{2}}{6}\right) = P(-0.91 \leq Z \leq 1.25) = F_Z(1.25) - F_Z(-0.91) =$$

$$= 0.8944 - 0.1814 = 0.713$$

Otra posible solución sin emplear el factor de corrección por continuidad, o bien, directamente por distribución binomial.

Se va a calcular y con la tabla de la función de distribución acumulativa normal estándar

$$P(Y \leq 32) \approx P\left(Z \leq \frac{32 - 40}{6}\right) = P(Z \leq -1.33) = 0.0918$$

Se pide calcular y usando tablas

$$P(Y \geq 49) \approx P\left(Z \geq \frac{49 - 40}{6}\right) = P(Z \geq 1.5) = 1 - F_Z(1.5) = 0.0668$$

Entre 35 y 47 personas ebrias

$$P(35 \leq Y \leq 47) \approx P\left(\frac{35 - 40}{6} \leq Z \leq \frac{47 - 40}{6}\right) = P(-0.83 \leq Z \leq 1.17) = F_Z(1.17) - F_Z(-0.83) = 0.6757$$

5. Dada la función de probabilidad de una población uniforme

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{4} & ; \quad x = 0,1,2,3 \\ 0 & ; \quad en\ otro\ caso \end{cases}$$

Calcular la probabilidad de que una muestra aleatoria de tamaño 36, seleccionada con reemplazo, dé un promedio muestral mayor que 1.45 pero menor de 1.75

15 Puntos

Resolución

Se tiene una función de probabilidad de una variable aleatoria uniforme discreta**,** se sabe que su media está dada por

$$\mu_X = \sum_{\forall x} x\, f_X(x)$$

sustituyendo

$$\mu_X = \frac{1}{4}(0+1+2+3) = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

y su variancia está dada por

$$\sigma_X^2 = \sum_{\forall x} (x-\mu_X)^2\ f_X(x)$$

sustituyendo

$$\sigma_X^2 = \frac{1}{4}\left[\left(0-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(1-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(2-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(3-\frac{3}{2}\right)^2\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{9}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{9}{4}\right] = \frac{5}{4}$$

De acuerdo con la población dada se sabe que

$$X_i \sim Uniforme(k=4)$$

Por el Teorema del Límite Central, para una muestra aleatoria grande, en este caso $n = 36$, entonces

$$\bar{X} \sim Normal\left(\mu_{\bar{X}} = \mu_X, \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}\right)$$

sustituyendo

$$\bar{X} \sim Normal\left(\mu_{\bar{X}} = \frac{3}{2}\ ,\ \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\frac{5}{4}}{36} = \frac{5}{144}\right)$$

La probabilidad a calcular para la media de la muestra es

$$P(1.45 \le \bar{X} \le 1.75) \approx P\left(\frac{1.45-1.5}{\frac{\sqrt{5}}{12}} \le Z \le \frac{1.75-1.5}{\frac{\sqrt{5}}{12}}\right) = P\left(\frac{12(1.45-1.5)}{\sqrt{5}} \le Z \le \frac{12(1.75-1.5)}{\sqrt{5}}\right) =$$

$$= P(-0.27 \le Z \le 1.34)$$

por propiedades de la función de distribución acumulativa normal estándar

$$P(1.45 \le \bar{X} \le 1.75) \approx F_Z(1.34) - F_Z(-0.27) = 0.9099 - 0.3936 = 0.5163$$

6. Se llevó a cabo una investigación para estudiar la relación entre la velocidad [en pies por segundo] y el ritmo de zancadas [en número de pasos por segundo] de entre 11 corredores de maratón, se tienen los siguientes datos:

$$\sum_{n=1}^{11}(Velocidad) = 205.4 \qquad \sum_{n=1}^{11}(Velocidad)^2 = 3880.08$$

$$\sum_{n=1}^{11}(Ritmo) = 35.16 \qquad \sum_{n=1}^{11}(Ritmo)^2 = 112.681$$

$$\sum_{n=1}^{11}(Velocidad)(Ritmo) = 660.13$$

Obtener la ecuación de la recta de regresión que se utilizaría para pronosticar el ritmo de zancadas a partir de la velocidad.

15 Puntos

Resolución

Del enunciado se tiene $n = 11$ y se sabe que la recta de regresión es

$\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$

donde

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{11} x_i y_i - \frac{\sum_{i=1}^{11} x_i \sum_{i=1}^{11} y_i}{11}}{\sum_{i=1}^{11} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{11} x_i\right)^2}{11}} = \frac{660.13 - \frac{(205.4)(35.16)}{11}}{3880.08 - \frac{(205.4)^2}{11}} = \frac{3.5969}{44.7018} \approx 0.0805$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1 \bar{x}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{n=1}^{11}(Velocidad)}{n} = \frac{205.4}{11} = 18.6727$$

y

$$\bar{y} = \frac{\sum_{n=1}^{11}(Ritmo)}{n} = \frac{35.16}{11} = 3.1964$$

entonces

$$\hat{\beta}_0 = 3.1964 - (0.0805)(18.6727) \approx 1.6932$$

por lo tanto el modelo está dado por

$$\hat{y} = 0.0805x + 1.6932$$