1. La empresa encargada de vigilar la calidad de los concretos hidráulicos de los pavimentos en la Ciudad de México ha obtenido 100 muestras de cilindros de concreto hidráulico a lo largo de 5 km de pavimentos. El departamento de estadística de la empresa, ha agrupado la información de la resistencia a la ruptura (en Kg_f/cm^2) de las muestras, de la siguiente manera:

Marca de clase	Límite inferior	Límite Superior	Frecuencia
206.5	197	216	3
226.5	217	236	18
246.5	237	256	33
266.5	257	276	35
286.5	277	296	9
306.5	297	316	2
		Suma	100

Calcule el coeficiente de variación de los datos registrados. **(15 ptos.)**

SOLUCIÓN:

El coeficiente de variación, se obtiene mediante la expresión: $CV_x = \frac{s}{\bar{x}}$

Donde: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_i f_i$

$= \frac{1}{100}[(206.5)(3) + (226.5)(18) + (246.5)(33) + (266.5)(35) + (286.5)(9) + (306.5)(2)] = \frac{1}{100}(25350) = \mathbf{253.50}$

La desviación estándar se obtiene mediante la expresión: s = $\sqrt{s^2}$

En donde, la varianza s^2, es igual a: $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x}_i)^2 f_i$

$= \frac{1}{99}[(206.5-253.5)^2(3) + (226.5-253.5)^2(18) + (246.5-253.5)^2(33) + (266.5-253.5)^2(35) + (286.5-253.5)^2(9) + (306.5-253.5)^2(2)]$

$= \frac{1}{99}(42700) = \mathbf{431.3131}$

Por lo que: s = $\sqrt{s^2}$ = $\sqrt{431.3131} = \mathbf{20.768}$

Y de esta forma: $CV_x = \frac{20.768}{253.5} = \mathbf{0.0819}$

2. En un experimento para estudiar la relación de la hipertensión arterial y los hábitos de fumar, se reúnen los siguientes datos para 180 individuos:

	No fumadores	**Fumadores moderados**	**Fumadores empedernidos**	**Totales**
Con hipertensión	21	36	30	87
Sin hipertensión	48	26	19	93
Totales	69	62	49	180

Si se selecciona a uno de estos individuos al azar. Encuentre la probabilidad de que la persona seleccionada:

a) sufra hipertensión, dado que es un fumador empedernido.

b) sea un fumador (ya sea moderado o empedernido), dado que no sufre de hipertensión.

(15 ptos.)

SOLUCIÓN:

Sean los eventos:

A:la persona es fumador moderado

B: la persona fumador empedernido

C:la persona no fuma

H: la persona tiene hipertensión

a) La probabilidad de que la persona seleccionada sufra hipertensión dado que es un fumador empedernido es: P(H|B)

P(H|B)= $\frac{P(H \cap B)}{P(B)} = \frac{30/180}{49/180} = \mathbf{0.6122}$

b) La probabilidad de que la persona sea un fumador (ya sea moderado o empedernido), dado que no sufre hipertensión es: P(A U B|$\overline{H}$)

P(A U B|$\overline{H}$)= $\frac{P[(A \cup B) \cap (\overline{H})]}{P(\overline{H})} = \frac{26/180 + 19/180}{93/180} = \mathbf{0.4839}$

3. Imagine que actualmente en su empresa existen: dos proyectos del sector industrial, tres proyectos del sector energético y cinco proyectos del sector ambiental. Si el gobierno ha elegido dos proyectos al azar de su empresa para revisarlos. Determine *la función de distribución acumulada* de la variable aleatoria "X", la cual representa el número de proyectos del sector energético que hay en la selección realizada por el gobierno.

(15 ptos.)

SOLUCIÓN:

Se tienen:
2 proyectos del sector industrial
3 proyectos del sector energético
5 proyectos del sector ambiental
En total, 10 proyectos.
Se eligen dos proyectos al azar.

Sea X, la variable aleatoria que representa el número de proyectos del sector energético que puede haber en la selección.
$R_x = \{0,1,2\}$

P(X=0)= $\frac{\binom{3}{0}\binom{7}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15} = 0.467$

P(X=1)= $\frac{\binom{3}{1}\binom{7}{1}}{\binom{10}{2}} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15} = 0.467$

P(X=2)= $\frac{\binom{3}{2}\binom{7}{0}}{\binom{10}{2}} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15} = 0.066$

La tabla de la función de probabilidad de X es:

x	0	1	2
P(X=x)	0.467	0.467	0.066

Y a partir de ella se obtiene la tabla de la función de distribución acumulada de X :

x	0	1	2
F(x)=P(X≤x)	7/15=0.467	14/15=0.933	1

4. La probabilidad de que Ana logre darle a un objetivo en cualquier momento es 1/3. Encuentre la probabilidad de que ella tenga que disparar 7 veces para lograr dar 4 veces en el objetivo.

(15 ptos.)

SOLUCIÓN:

Sea X la variable aleatoria que representa el número de disparos necesarios a realizar para dar 4 veces en el objetivo.

X~ pascal (r=4, p = $\frac{1}{3}$) ; ∴ f(x)=$\binom{x-1}{r-1} p^r q^{x-r}$,
donde r, es el número de éxitos que se desea tener (en este caso 4).

Por lo tanto, la probabilidad de que Ana tenga que disparar 7 veces para dar 4 veces en el objetivo es:

P(X=7) = $\binom{6}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^4\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \mathbf{0.0732}$

5. Sea una distribución de probabilidad conjunta, tal que "X" mide los diámetros de los puntos de soldadura (cm) y, "Y" mide la resistencia a la tensión (ohms) de cierto dispositivo, dicha función es la siguiente:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{500} \;, & si \quad 0 \le x < 0.25, 0 \le y < 2000 \\ 0 \;, & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Encuentre la probabilidad de que en un momento dado:
a) el dispositivo presente diámetros de soldadura entre 0.1 y 0.2 cm; y al mismo tiempo su resistencia a la tensión se encuentre entre 100 y 200 ohms.
b) la resistencia a la tensión sea menor a 1000 ohms. **(15 ptos.)**

SOLUCIÓN:

Sea X: la medida de los diámetros de los puntos de soldadura (cm)
Sea Y: la resistencia a la tensión (ohms)

a) La probabilidad de que al mismo tiempo el dispositivo presente diámetro de soldadura entre 0.1 y 0.2 cm y los valores de resistencia a la tensión estén entre 100 y 200 ohms es: P(0.1≤ $X \le 0.2, 100 \le Y \le 200$)

P(0.1≤ $X \le 0.2, 100 \le Y \le 200$) = $\int_{100}^{200}\int_{0.1}^{0.2}\frac{1}{500}dxdy = \int_{100}^{200}\left(\frac{1}{500}x\right)\Big|_{0.1}^{0.2} dy$

$$= \int_{100}^{200}\left(\frac{1}{500}(0.2-0.1)\right)\text{dy}$$

$$= \int_{100}^{200}\left(\frac{0.1}{500}\right)dy = \frac{0.1}{500}y\Big|_{100}^{200} = \left(\frac{0.1}{500}(200-100)\right) = \mathbf{0.02}$$

b) La probabilidad de que la resistencia a la tensión del dispositivo sea menor a 1000 ohms es: P(Y <1000)

P(Y<1000) = $\int_{-\infty}^{1000} f(y)dy$

Dónde: f(y) = $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = \int_0^{0.25}\frac{1}{500}dx = \frac{1}{500}x\Big|_0^{0.25} = \frac{1}{500}(0.25-0) = 0.0005$

$$\therefore f(y) = \begin{cases} 0.0005 \ ; \ 0 \le y < 2000 \\ 0 \ ; \ \ en\ otro\ caso \end{cases}$$

Por lo que: P(Y<1000) = $\int_0^{1000} 0.0005\, dy$

$$= 0.0005y \Big|_0^{1000} = (0.0005)(1000-0) = \mathbf{0.5}$$

6. En una fábrica, la cantidad de llenado de las botellas de refresco se distribuye de forma normal, con una media de 2 litros y una desviación estándar de 0.05 litros. Si se selecciona una muestra aleatoria de 25 botellas de refresco, ¿cuál es la probabilidad de que el promedio de llenado de las botellas seleccionadas, esté entre 1.99 y 2 litros?

(15 ptos.)

SOLUCIÓN:

Sea X: la cantidad de llenado de las botellas de refresco. Se sabe que X se distribuye de forma normal con: $\mu_x = 2$ y $\sigma_x = 0.05$.

Sea $\bar{X}$: la cantidad promedio de llenado de las 25 botellas seleccionadas.

Como X tiene distribución Normal, entonces: $\bar{X} \sim N(\mu_{\bar{X}} = 2, \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{(0.05)^2}{25})$

La probabilidad de que el promedio de llenado de las botellas seleccionadas, esté entre 1.99 y 2 litros es:

P(1.99 ≤ $\bar{X}$ ≤ 2) = $P\left(\frac{1.99-2}{\frac{0.05}{\sqrt{25}}} \le Z \le \frac{2-2}{\frac{0.05}{\sqrt{25}}}\right)$= P(-1 ≤ Z ≤ 0)= $F_z(0) - F_z(-1)$

= 0.5 – 0.1587 = **0.3413**

7. En un estudio hidráulico para la construcción de un puente, se desea conocer si el porcentaje de estrechamiento de cierto río influye en el porcentaje de elevación de su nivel de agua. Los datos observados son los siguientes:

Observación	1	2	3	4	5	6	7	8
Porcentaje de estrechamiento del río	2.5	5	7.5	10	12.5	15	17.5	20
Porcentaje de elevación del nivel de agua del río	2	4	7	9	10	14	15	18

Indique si es posible considerar que existe un comportamiento lineal entre las variables y justifique su respuesta. **(10 ptos.)**

SOLUCIÓN:

El coeficiente de correlación r, indica el grado de asociación lineal que existe entre las variables, $r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx}}\sqrt{SS_{yy}}}$

$$SS_{xy} = \sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n},\ SS_{xx} = \sum (x_i)^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n},\ SS_{yy} = \sum (y_i)^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n}$$

Se tiene:
X= % estrechamiento del río
Y= % de elevación del nivel del agua

Al realizar las sumas de los datos se obtiene:

	x	**y**	**xy**	x^2	y^2
Sumas	90	79	1125	1275	995
Promedio	11.25	9.875			

Por tanto : $SS_{xy} = 1125 - \frac{(90)(79)}{8} = 236.25$,

$$SS_{xx} = 1275 - \frac{90^2}{8} = 262.5$$

$$SS_{yy} = 995 - \frac{79^2}{8} = 214.875$$

$$\therefore r = \frac{236.25}{\sqrt{262.5}\sqrt{214.875}} = \mathbf{0.9947}$$

Debido a que el valor de r es muy cercano a 1, entonces puede decirse que ***sí existe una relación lineal*** entre las variables.