SOLUCIÓN SEGUNDO EXAMEN FINAL "PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA"

SEMESTRE 2017-1 **10 de diciembre de 2016**

1. Se hizo una encuesta breve a 10 alumnos, para que indicaran el número de kilómetros que recorren desde sus casas hasta la universidad. Los resultados se presentan en la siguiente tabla de datos agrupados:

Fronteras de clase	f_i
0 - 10	2
10 - 20	4
20 - 30	3
30 - 40	1

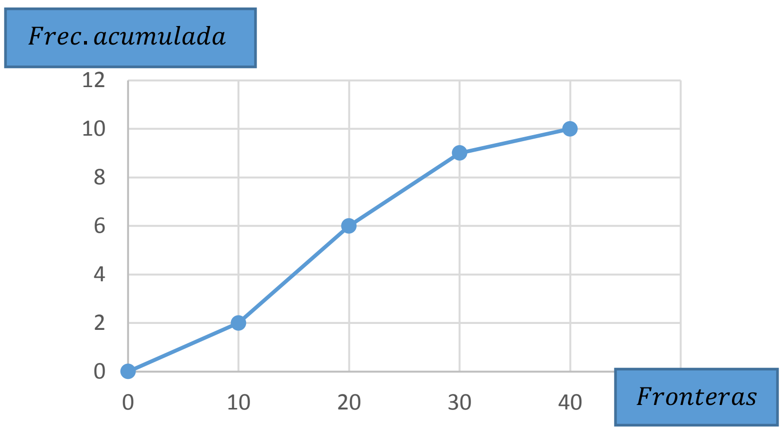
a) Construya la ojiva de los datos obtenidos.

b) Indique el número promedio de kilómetros que recorren los alumnos encuestados.

10 puntos

Resolución:

a)



b) el número promedio de kilómetros recorridos por los alumnos encuestados es:

$\bar{x} = \frac{1}{10}[(5)(2) + (15)(4) + (25)(3) + (35)(1)]$ = **18 km.**

2. La probabilidad de que haya un accidente en una refinería es 0.2. La refinería cuenta con una alarma de accidentes.
La probabilidad de que suene la alarma si se ha producido algún accidente es de 0.98 y la probabilidad de que suene si no ha sucedido ningún accidente es 0.04.
¿Si en un momento dado la alarma suena, cuál es la probabilidad de que haya sucedido un accidente?

15 puntos

Resolución:

Sean los eventos:

A: sucede un accidente

B: suena la alarma

Se sabe que:

$$P(A) = 0.20$$
$$P(B|A) = 0.98$$
$$P(B|\bar{A}) = 0.04$$

La probabilidad de que haya sucedido un accidente, dado que la alarma sonó es: $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\,P(A)}{P(B)}$$

$$P(B) = P(B|A)\,P(A) + P(B|\bar{A}\,)\,P(\bar{A}\,) = (0.98)(0.2) + (0.04)(0.8) = 0.228$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{(0.98)(0.2)}{0.228} \cong \mathbf{0.8596}$$

3.- Los registros de ventas de una tienda muestran que diariamente: la probabilidad de vender cero impresoras es 0.7 y la probabilidad de vender una impresora es 0.3
Sea X la variable aleatoria que representa el número impresoras vendidas en un periodo de dos días.
Determine la función de probabilidad de X, suponga que las ventas son independientes de un día a otro.

15 puntos

Resolución:

X representa el número de impresoras vendidas en un periodo de dos días.
Los valores que puede tomar X son: 0,1,2
Tomando en cuenta que las ventas diarias son independientes de un día a otro.

$$P(X = 0) = (0.7)(0.7) = 0.49$$
$$P(X = 2) = (0.3)(0.3) = 0.09$$
$$P(X = 1) = 1 - P(X = 0) - P(X = 2) = 1 - 0.49 - 0.09 = 0.42$$

∴ La función de probabilidad de la variable aleatoria X es:

x	0	1	2
$f_X(x)$	0.49	0.42	0.09

4. Una instalación de servicio de paquetería opera con dos líneas telefónicas. En un día seleccionado al azar, la variable aleatoria *X* representa la proporción del día que la primera línea está en uso y la variable aleatoria *Y* representa la proporción del día que la segunda línea telefónica, está en uso.
Suponga que la función de densidad de probabilidad conjunta para (*X*, *Y*) es:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2+y^2), & 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & , en \ \ cualquier \ otro \ caso \end{cases}$$

¿Cuál es la proporción del día que se espera esté en uso la primera línea telefónica?

20 puntos

Resolución:

X representa la proporción del día que la primera línea está en uso.
Y representa la proporción del día que la segunda línea está en uso.

La proporción del día que se espera esté en uso la primera línea es: $E(X)$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_{-\infty}^{1} 0\, dy + \int_0^1 \frac{3}{2}(x^2+y^2)dy + \int_1^{\infty} 0\, dy$$

$$= \frac{3}{2}\left(yx^2 + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}\left(x^2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

$$\therefore f_x(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} \ ; \ 0 \le x \le 1 \\ \quad 0 \quad ; \quad en \ otro \ caso \end{cases}$$

$$\therefore E(X) = \int_0^1 x\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - 0\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8} = 0.625$$

$\therefore$ *La proporción del día que se espera esté en uso la primera linea es* $\mathbf{0.625}$

5. El 2% de los tornillos fabricados por una máquina presentan defectos. Si se tiene un lote de 200 tornillos fabricados en dicha máquina, ¿Cuál es la probabilidad de que el 99% de los tornillos del lote, sean no defectuosos?

15 puntos

Resolución:

La variable aleatoria X representa el número de tornillos no defectuosos que pueden tenerse dentro del lote.
La probabilidad de que cualquier tornillo fabricado por la máquina sea no defectuoso es 0.98
X ~ binomial (n=200, p=0.98)
La probabilidad de que exactamente el 99% de los tornillos del lote, sean no defectuosos es:
P (X=198) = $\binom{200}{198}(0.98)^{198}(0.02)^2 \approx \mathbf{0.1458}$

La probabilidad de tener 99% o más de los tornillos del lote como no defectuosos es:
P(X≥198) = P (X= 198) + P (X= 199) + P (X= 200)

$$= \binom{200}{198}(0.98)^{198}(0.02)^2 + \binom{200}{199}(0.98)^{199}(0.02)^1 + \binom{200}{200}(0.98)^{200}(0.02)^0$$
≈ **0.2351**

6. Varias pruebas de inteligencia dieron una puntuación que tiene una distribución normal con media 100 y desviación estándar de 15 puntos. Si se selecciona al azar una muestra de 50 pruebas, ¿Cuál es la probabilidad de que el puntaje promedio de la muestra se encuentre entre 95 y 102 puntos?

15 puntos

Resolución:

Sea X la variable aleatoria que representa la puntuación de la prueba de inteligencia.

$X \sim N(\mu_X = 100, \sigma_X^{\ 2} = (15)^2)$

Sea $\bar{X}$ la variable aleatoria que representa el puntaje promedio de la muestra seleccionada.

$\bar{X} \sim N\left(\mu_{\bar{X}} = 100, \ \sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{(15)^2}{50}\right)$

La probabilidad de que el puntaje promedio de la muestra seleccionada se encuentre entre 95 y 102 puntos es:

$$P(95 \leq \bar{X} \leq 102) = P\left(\frac{95-100}{\frac{15}{\sqrt{50}}} \leq z \leq \frac{102-100}{\frac{15}{\sqrt{50}}}\right)$$

$$= P(-2.357 \leq z \leq 0.943) \approx P(-2.36 \leq z \leq 0.94) = F_z(0.94) - F_z(-2.36)$$

$$\approx 0.8264 - 0.0091 = \mathbf{0.8173}$$

7. Se estudia empíricamente la relación que existe entre el nivel de esfuerzo aplicado a una probeta de un material plástico y el tiempo que transcurre antes de su fractura, para ello se recabaron los siguientes datos.

Esfuerzo (newtons)	17	100	41	120	15	91	18	27
Duración (segundos)	8	7	7	6.5	7.5	6.5	7.5	8

Con dichos datos es posible construir un modelo de regresión lineal que permita describir la duración de las probetas en función del esfuerzo que se les aplique. Obtenga el coeficiente de determinación de dicho modelo y con base en el resultado obtenido, indique qué se puede concluir acerca del modelo.

10 puntos

Resolución:

Sean las variables:
X: esfuerzo aplicado a las probetas (Newtons)
Y: duración de las probetas (segundos)

	Valores				
	x	**y**	x^2	y^2	**xy**
	17	8	289	64	136
	100	7	10000	49	700
	41	7	1681	49	287
	120	6.5	14400	42.25	780
	15	7.5	225	56.25	112.5
	91	6.5	8281	42.25	591.5
	18	7.5	324	56.25	135
	27	8	729	64	216
TOTAL	429	58	35929	423	2958

El coeficiente de determinación r^2 se obtiene mediante la expresión:

$$r^2 = \frac{(SSxy)^2}{SSxxSSyy}$$

$$SSxy = \sum_{i=1}^{n}(xi)(yi) - \frac{\sum_{i=1}^{n}(xi)\sum_{i=1}^{n}(yi)}{n} = (2958) - \frac{(429)(58)}{8} = -152.25$$

$$SSxx = \sum_{i=1}^{n}(xi)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}{n} = (35929) - \frac{429^2}{8} = 12923.875$$

$$SSyy = \sum_{i=1}^{n}(yi)^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2}{n} = (423) - \frac{58^2}{8} = 2.5$$

$$\therefore r^2 = \frac{(-152.25)^2}{(12923.875)(2.5)} = 0.7174$$

El valor obtenido, indica que el 71.74% de la variación de Y (duración de las probetas) es explicada por el comportamiento de la variable X (esfuerzo aplicado a las probetas). Al ser r^2 un valor no muy alejado de 1, puede decirse que el modelo construido a partir de los datos obtenidos es relativamente bueno.

10 puntos