SOLUCIÓN SEGUNDO EXAMEN FINAL "PROBABILIDAD"

SEMESTRE 2017-1 **10 de diciembre de 2016**

1. La probabilidad de que haya un accidente en una refinería es 0.2. La refinería cuenta con una alarma de accidentes.
La probabilidad de que suene la alarma si se ha producido algún accidente es de 0.98 y la probabilidad de que suene si no ha sucedido ningún accidente es 0.04. ¿Si en un momento dado la alarma suena, cuál es la probabilidad de que haya sucedido un accidente?

15 puntos

Resolución:

Sean los eventos:

A: sucede un accidente
B: suena la alarma

Se sabe que:

$$P(A) = 0.20$$
$$P(B|A) = 0.98$$
$$P(B|\bar{A}) = 0.04$$

La probabilidad de que haya sucedido un accidente, dado que la alarma sonó es: $P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)\, P(A)}{P(B)}$$

$$P(B) = P(B|A)\, P(A) + P(B|\bar{A}\,)\, P(\bar{A}\,) = (0.98)(0.2) + (0.04)(0.8) = 0.228$$

$$\therefore P(A|B) = \frac{(0.98)(0.2)}{0.228} \cong \mathbf{0.8596}$$

2. Los registros de ventas de una tienda muestran que diariamente: la probabilidad de vender cero impresoras es 0.7 y la probabilidad de vender una impresora es 0.3
Sea X la variable aleatoria que representa el número impresoras vendidas en un periodo de dos días.
Determine la función de probabilidad de X, suponga que las ventas son independientes de un día a otro.

20 puntos

Resolución:

X representa el número de impresoras vendidas en un periodo de dos días.
Los valores que puede tomar X son: 0,1,2
Tomando en cuenta que las ventas diarias son independientes de un día a otro.

$$P(X=0) = (0.7)(0.7) = 0.49$$
$$P(X=2) = (0.3)(0.3) = 0.09$$
$$P(X=1) = 1 - P(X=0) - P(X=2) = 1 - 0.49 - 0.09 = 0.42$$

∴ La función de probabilidad de la variable aleatoria X es:

x	0	1	2
$f_X(x)$	0.49	0.42	0.09

3. Una instalación de servicio de paquetería opera con dos líneas telefónicas. En un día seleccionado al azar, la variable aleatoria *X* representa la proporción del día que la primera línea está en uso y la variable aleatoria *Y* representa la proporción del día que la segunda línea telefónica, está en uso.
Suponga que la función de densidad de probabilidad conjunta para (*X*, *Y*) es:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} \frac{3}{2}(x^2+y^2), & 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1 \\ 0 & , en \ \ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la proporción del día que se espera esté en uso la primera línea telefónica?
b) ¿Cuál es la proporción del día que se espera esté en uso la segunda línea telefónica, si se sabe que la primera línea no se usará?

20 puntos

Resolución:

a) La proporción del día que se espera esté en uso la primera línea es: E(x)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{XY}(x,y)dy = \int_{-\infty}^{1} 0\, dy + \int_{0}^{1} \frac{3}{2}(x^2+y^2)dy + \int_{1}^{\infty} 0\, dy$$

$$= \frac{3}{2}\left(yx^2 + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{3}{2}\left(x^2 + \frac{1}{3}\right) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

$$\therefore f_x(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2} & ; \ 0 \le x \le 1 \\ 0 & ; \ en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$\therefore E(X) = \int_0^1 x\left(\frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{2}x^3 + \frac{1}{2}x\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{3x^4}{4} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2} - 0\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8} = 0.625$$

$\therefore$ *La proporción del día que se espera esté en uso la primera línea es* $\mathbf{0.625}$

b) Si se sabe que la primera línea no se usará, la proporción del día que se espera esté en uso la segunda línea telefónica es: $\boldsymbol{E(Y \mid X = 0)}$

$$E(Y \mid X = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y \mid x = 0)\, dy$$

$$f_Y(y \mid x = 0) = \frac{f_{XY}(0, y)}{f_X(0)} = \frac{\frac{3}{2}y^2}{\frac{1}{2}} = 3y^2$$

$$\therefore f_Y(y \mid x = 0) = \begin{cases} 3y^2 & , \ 0 \le y \le 1 \\ 0 & , \ en\ otro\ caso \end{cases}$$

$$\therefore E(Y \mid X = 0) = \int_{-\infty}^{\infty} y\, f_Y(y \mid x = 0)\, dy = \int_{-\infty}^{1} 0\, dy + \int_0^1 y\,(3y^2)dy + \int_1^{\infty} 0\, dy$$

$$= \frac{3y^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{3}{4} = \mathbf{0.75}$$

$\therefore$ *Si la primera línea no se usa, la proporción del día que se espera esté en uso la segunda línea es* $\mathbf{0.75}$

4. En una empresa, la probabilidad de que sea aceptada una persona que asiste a una entrevista de trabajo es de 10%. Si en la última sesión de reclutamiento el número promedio de personas no aceptadas en la empresa fue de 270. Indique, ¿cuál fue el número de personas entrevistadas?

20 puntos

Resolución:

Sea X la variable aleatoria que representa el número de personas que no serán aceptadas en la empresa del total de personas entrevistadas.

X tiene distribución binomial con p= 0.9

Para la distribución binomial, se sabe que E(X)=np= 270

$\therefore$ *el número de personas entrevistadas* (n) *es*:

n = $\frac{270}{p}$ = $\frac{270}{0.9}$ = **300 personas**

5. Un ingeniero químico afirma que el rendimiento de la población de cierto proceso en lotes, es 500 gramos por mililitro de materia prima. Para verificar dicha afirmación muestrea 25 lotes cada mes. Si el valor t calculado, cae entre $-t_{0.05}$ y $t_{0.05}$, queda satisfecho con su afirmación.
Suponiendo que la distribución del rendimiento del proceso es aproximadamente normal. ¿Qué conclusión debería tomarse de una muestra que tiene una media de 520 gramos por mililitro y una desviación estándar de 40 gramos por mililitro?.

25 puntos

Resolución:

Se desea que el valor t construido a partir de la muestra se encuentre dentro del intervalo $-t_{0.05}$ y $t_{0.05}$

De la muestra realizada se sabe que: $\bar{x}$= 580 g/ml; s= 40 g/ml; n=25

Por lo tanto: t= $\frac{520-500}{40/\sqrt{25}}$ = $\frac{\bar{x}-\mu_x}{s/\sqrt{n}}$ = 2.5

Con 24 grados de libertad; los valores t dentro de los cuales se desea esté el valor obtenido son:

$-t_{0.05.24}$= -1.711 y $t_{0.05,24}$ = 1.711

Como el valor "t" obtenido (t=2.5), se encuentra fuera del intervalo deseado [-1.711, 1.711], puede concluirse que el rendimiento del proceso no es el deseado (500g/ml).