SOLUCIÓN PRIMER EXAMEN FINAL "PROBABILIDAD"

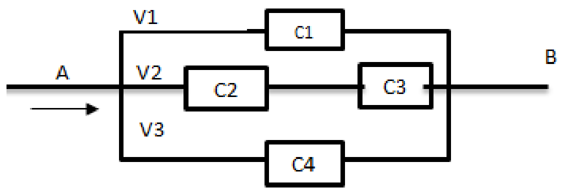
SEMESTRE 2017-1 **3 de diciembre de 2016**

1. Considere un sistema de agua que corre a través de las vías o líneas que fluyen desde A hasta B (véase el diagrama). Todas las válvulas 1, 2 y 3 funcionan independientemente y cada una se abre correctamente mediante una señal con probabilidad 0.9.

a) Calcule la probabilidad de que el sistema funcione al enviar la señal de apertura de las válvulas.

b) Calcular la probabilidad de que las tres vías del sistema (V1, V2, V3) fluyan, al enviar la señal de apertura de las válvulas.

25 puntos



Solución:

a) Sean los eventos:

F: el sistema funciona

Vi: la vía i funciona

Ci: la válvula i funciona

La probabilidad de que el sistema funcione es: P(F)

P(F)= 1- P($\bar{F}$) = 1-($\bar{V_1} \cap \bar{V_2} \cap \bar{V_3}$) $= 1$ - P($\bar{V_1}$)$P(\bar{V_2})P(\bar{V_3})$

= 1-(0.1)(1-0.9^2)(0.1) = 1- 0.0019

= 0.9981

b) La probabilidad de que las tres vías del sistema (V1, V2, V3) fluyan, al enviar la señal de apertura de las válvulas es: P (V1∩ V2∩ V3)

P (V1∩ V2∩ V3) = P(V1)P(V2)P(V3)= (0.9)(0.9^2)(0.9) = **0.6561**

2. El 30% de los empleados de una empresa son ingenieros, otro 20% son economistas. El 80% de los ingenieros, ocupan un puesto directivo y el 30% de los economistas también, mientras que del resto de los empleados (otras profesiones), solamente el 10% ocupa un puesto directivo.

a) Si del grupo de directivos, se selecciona al azar a un empleado; ¿cuál es la probabilidad de que sea ingeniero?

20 puntos

b) Si del total de empleados de la empresa, se selecciona a uno al azar: ¿cuál es la probabilidad de que el empleado seleccionado sea ingeniero y directivo?

Solución

Sean los eventos:

I: el empleado es ingeniero

E: el empleado es economista

O: el empleado tiene una profesión distinta a ingeniero o economista

D: el empleado ocupa un puesto directivo

Se sabe que:

P(I)= 0.3

P(E)= 0.2

P(O)= 0.5

P(D|I)=0.8

P(D|E)=0.3

P(D|O)= 0.1

La probabilidad de que un empleado que ocupa un puesto directivo sea ingeniero es: P(I |D)

P(I|D) = $\frac{P(I \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D|I)P(I)}{P(D)}$

P(D)= P(D|I)P(I)+P(D|E)P(E)+ P(D | O)P(O)

$P(D) = (0.8)(0.3) + (0.3)(0.2) + (0.1)(0.5) = 0.35$

Por lo tanto, la probabilidad solicitada es: $P(I|D) = \frac{(0.8)(0.3)}{0.35}$= **0.6857**

b) La probabilidad de que el empleado seleccionado sea ingeniero y directivo es: P(I ∩D) = P(I|D) P(D) = (0.6857)(0.35) ≈ 0.2399 = **0.24**

Otra forma de obtener el valor es : P(I ∩D) = P(D|I) P(I) = (0.8)(0.3) = **0.24**

3. Una caja contiene: 3 fusibles de la marca A, 2 de la marca B y 3 fusibles de la marca C. Se eligen al azar dos fusibles para un automóvil.
Si X es el número de fusibles marca A y; Y el número de fusibles marca B que se seleccionan, encontrar:
a) La función de distribución de probabilidad conjunta de X y Y.
b) Demostrar si las variables aleatorias son independientes o no.

20 puntos

Solución

a) Se tienen 3 fusibles marca A, 2 fusibles marca B y 3 fusibles marca C.
En total 8 fusibles.
Se eligen al azar 2 de los 8 fusibles
Los valores que puede tomar X son: 0,1,2
Los valores que puede tomar Y son: 0,1,2

Por tanto la función de probabilidad conjunta de X,Y, tendrá la siguiente forma:

$f_{XY}(x,y)$		x		
		0	1	2
y	0			
	1			
	2			

P(X=0,Y=0)=$\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{0}\binom{3}{2}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$

P(X=0,Y=1) = $\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{6}{28}$

P(X=0,Y=2)=$\frac{\binom{3}{0}\binom{2}{2}\binom{3}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{1}{28}$

P(X=1,Y=0) = $\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{0}\binom{3}{1}}{\binom{8}{2}} = \frac{9}{28}$

P(X=1,Y=1) = $\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{6}{28}$

P(X=1, Y=2) = 0

P(X=2,Y=0) = $\frac{\binom{3}{2}\binom{2}{0}\binom{3}{0}}{\binom{8}{2}} = \frac{3}{28}$

P(X=2,Y=1)=0

P(X=2,Y=2)=0

∴ La función de probabilidad conjunta de X,Y es:

$f_{XY}(x,y)$		x		
		0	1	2
y	0	$\frac{3}{28}$	$\frac{9}{28}$	$\frac{3}{28}$
	1	$\frac{6}{28}$	$\frac{6}{28}$	0
	2	$\frac{1}{28}$	0	0

b) X y Y son variables aleatorias independientes si se cumple que:

$$f_{XY} \quad = f_x(x) f_y(y\,)$$

Para x=0 y y=0 se tiene

$f_{XY}\,(0{,}0) = \frac{3}{28}$

$f_X(0) = \frac{10}{28}$

$f_Y(0\,) = \frac{15}{28}$

$f_y(y) f_x(x) = \left(\frac{10}{28}\right)\left(\frac{15}{28}\right) = \frac{150}{784} \approx 0.1913$

Como: $f_{XY} \quad \neq f_x(x) f_y(y\,)$, entonces:

las variables X y Y no son independientes.

4. Suponga que el número promedio de errores producidos por un telar es de 0.0075 errores por centímetro. Determine la probabilidad de que el telar produzca 6 metros de tela sin errores.

15 puntos

Solución :

El número de defectos producidos por un telar es de 0.75 errores por metro. Sea X la variable aleatoria que representa la cantidad de metros de tela producidos sin errores.

X~ exponencial (λ= 0.75)

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

La probabilidad de que el telar produzca 6 metros de tela sin errores es:

P(X > 6) = $\int_{6}^{\infty}(0.75e^{-0.75x})$ dx = - $e^{-0.75x}\Big]_{6}^{\infty}$ = 0+ 0.111

= 0.0111

Si X se define como el número de errores que hay en 6 metros de tela, entonces: X~ Poisson (λ= 4.5)

Por lo tanto, la probabilidad de que el telar produzca 6 metros de tela sin errores es: P(X = 0) = $\frac{(4.5^{0})\,(e^{-4.5})}{0\,!} = \mathbf{0.0111}$

5. Suponga que el tiempo de sobrevivencia de un ratón macho seleccionado al azar expuesto a 240 rads de radiación gama tiene una distribución gama con α =8 y β=15.
a) Obtenga el tiempo esperado de sobreviviencia del ratón.
b) Indique cuál es la probabilidad de que un ratón sobreviva entre 60 y 120 semanas.

20 puntos

Solución:

Sea X las semanas de sobrevivencia del ratón, X tiene una distribución gama con parámetros α =8 y β=15.

a) El tiempo esperado de sobreviviencia del ratón es : $E[X] = 8 * 15 = 120$ semanas.
b) La probabilidad de que un ratón sobreviva entre 60 y 120 semanas es: $P(60 \leq X \leq 120) = P(X \leq 120) - P(X \leq 60)$

$$= F\left(\frac{120}{15}, 8\right) - F\left(\frac{60}{15}, 8\right)$$

$$= 0.547 - 0.051 = \mathbf{0.496}$$