UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
SECCIÓN ACADÉMICA DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
SOLUCIÓN SEGUNDO EXAMEN FINAL
"PROBABILIDAD"

SEMESTRE 2018-1 **13 de diciembre de 2017**

1.- En una cierta fabrica las maquinas A, B y C producen una misma pieza. El 6% de las piezas de la máquina A, el 7% de la B y el 3% de la C son defectuosas. La producción se distribuye de la siguiente forma el 35% por la maquina A, el 25% por la B y el 40% por la C.
a) Si se toma una pieza del almacén y resulta defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que provenga de la máquina B?,
b) Si se toma una pieza del almacén, ¿cuál es la probabilidad de que no esté defectuosa y además se haya fabricado en la máquina A?

RESOLUCIÓN:
Sean los eventos:

A: la pieza se fabricó en la máquina A
B: la pieza se fabricó en la máquina B
C: la pieza se fabricó en la máquina C
D: La pieza está defectuosa

Del enunciado, se sabe que: P(D|A)= 0.06, P(D|B)= 0.07, P(D|C)= 0.03, P(A)= 0.35, P(B)= 0.25, P(C)=0.40
a) La probabilidad de que la pieza provenga de la máquina B, dado que es defectuosa es: $\mathrm{P(B|D)} = \frac{\mathrm{P(D|B)P(B)}}{\mathrm{P(D)}}$

donde: P(D)=(0.35)(0.06)+(0.25)(0.07)+(0.40)(0.03)=0.0505,

$$\therefore\ \mathrm{P(B|D)} = \frac{(0.07)(0.25)}{0.0505} = \mathbf{0.3465}$$

b) La probabilidad de que una pieza no esté defectuosa y además se haya fabricado en la máquina A es:

$$\mathrm{P(A \cap \overline{D}) = P(\overline{D}\ |A)P(A)} = (\ 0.94)(0.35) = \mathbf{0.329}$$

2.- La probabilidad de que cierto componente eléctrico funcione es de un 0.9. Un aparato contiene dos de estos componentes, el funcionamiento de cada componente es independiente del otro.
a) Obtenga la probabilidad de que ningún componente falle.
b) Si X es la variable aleatoria que representa el número de componentes que pueden funcionar en el aparato, obtenga la función de probabilidad de X.

RESOLUCIÓN:

a) Probabilidad de que un componente no falle: $\mathrm{P(\overline{F})} = 0.9$, como la probabilidad de falla de los componentes es independiente una de otra, la probabilidad de que ningún componente falle es: $\mathrm{P(\overline{F} \cap \overline{F})}$ = 0.9(0.9) = **0.81**

b) La función de probabilidad solicitada es:

x	0	1	2
f(x)	**0.1(0.1)**	**2(0.1)0.9**	**0.9(0.9)**
	=0.01	**=0.18**	**=0.81**

3.- Dada la siguiente función de densidad conjunta:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{9}; & 0 < X < 3\ ,\ \ 0 < Y < 2 \\ 0; & en\ otro\ caso \end{cases}$$

a) Obtenga la probabilidad de que la variable X sea menor a 2 y al mismo tiempo Y sea mayor a 1
b) Obtenga el valor esperado de Y.
c) Obtenga la probabilidad de que el valor de Y esté entre 0.5 y 2.
d) Obtenga la probabilidad de que la variable X sea mayor a 2, si la variable Y es igual a 1

RESOLUCIÓN:

a) $P(X<2,Y>1)=\frac{1}{9}\int_0^2\int_1^2(xy)dydx=\frac{1}{9}\int_0^2\left[\frac{xy^2}{2}\right]_1^2dx=\frac{1}{9}\int_0^2 x\left[\frac{4-1}{2}\right]dx$

$$=\frac{1}{9}\left(\frac{3}{2}\right)\int_0^2(x)dx=\frac{1}{6}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=\frac{1}{6}\left[\frac{4}{2}\right]=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}=\mathbf{0.3333}$$

b) El valor esperado de Y, es: $E[Y]=\int_{-\infty}^{\infty}yf(y)dy$,

$f(y)=\frac{1}{9}\int_0^3(xy)dx=\frac{y}{9}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^3=\frac{y}{9}\left[\frac{9}{2}\right]=\frac{y}{2}$, $\therefore f(y)=\begin{cases}\frac{y}{2}, & 0<y<2\\ 0, & en\ otro\ caso\end{cases}$

Por lo que:

$$E[Y]=\int_0^2 y\left(\frac{y}{2}\right)dy=\frac{1}{2}\int_0^2 y^2dy=\frac{1}{2}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{6}=\mathbf{1.333}$$

c) $P(0.5\le Y\le 2)=\int_{0.5}^2\frac{y}{2}dy=\left[\frac{y^2}{4}\right]_{0.5}^2=\frac{4}{4}-\frac{0.25}{4}=1-\frac{1}{16}=\mathbf{0.9375}$

d) La probabilidad de que la variable X sea mayor a 2, si la variable Y es igual a 1 es: P(X>2 |Y=1)

P(X>2 |Y=1)= $\int_2^3 f(x|y)dx$

Donde: $f(x|y=1)=\frac{f(x,1)}{f_Y(1)}=\frac{x/9}{1/2}=\frac{2x}{9}$, *para* $0<x<3$

$\therefore P(X>2|Y=1)=\frac{2}{9}\int_2^3 xdx=\frac{2}{9}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3,\ =\frac{2}{9}\left[\frac{9-4}{2}\right]=\frac{2}{9}\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{5}{9}\approx\mathbf{0.5556}$

4.-El número de llamadas telefónicas que entran a una central de un edificio de oficinas es de 6 por minuto, en promedio, calcular la probabilidad de que:

a) Lleguen cinco llamadas en dos minutos.

b) Lleguen al menos dos llamadas en un minuto.

RESOLUCIÓN:

a) Sea X: el número de llamadas que entran a la central en un periodo de dos minutos.
X tiene distribución de Poisson, con parámetro $\lambda=12$.

$$\therefore f(x)=\frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

La probabilidad de que lleguen cinco llamadas en dos minutos es: $P(X=5)=\frac{12^5e^{-12}}{5!}=\mathbf{0.01274}$

b) Sea X: el número de llamadas que entran a la central en un periodo de un minuto.
X tiene distribución de Poisson, con parámetro $\lambda=6$.
La probabilidad de que lleguen al menos dos llamadas en un minuto es: P(X ≥ 2) = 1 – P(X<2) = 1- P(X=0)-P(X=1)

$$\therefore \mathbf{P(X\ge 2)=1-0.002479-0.014873\approx 0.98265}$$

5. Mensualmente el tiempo en horas que requiere un equipo electrónico para recibir mantenimiento, está dado por una variable aleatoria con distribución de probabilidad Gamma, con parámetros: $\alpha=3$ y $\beta=2$.
a) Determinar la media y la desviación estándar correspondientes.
b) Determinar la probabilidad de que en cualquier mes el tiempo de mantenimiento sea mayor a ocho horas.

RESOLUCIÓN: Función de la Distribución Gamma*:* $f(x)\frac{x^{\alpha-1}e^{-x\beta}}{B^{\alpha}\Gamma_{(\alpha)}}$

a) $\mu_x=\alpha\beta=3(2)=\mathbf{6}$, $\sigma_x{}^2=\alpha\beta^2=3(4)=12$, $\therefore\sigma_x=\sqrt{12}=\mathbf{3.4641}$

b) La probabilidad de que en cualquier mes el tiempo de mantenimiento sea mayor a ocho horas *es*: $P(X>8)=\int_8^{\infty}\frac{x^2e^{-\frac{x}{2}}}{2^3\Gamma_3}dx=\int_8^{\infty}\frac{x^2e^{-x/2}}{8(2)}dx=\frac{1}{16}\int_8^{\infty}x^2e^{-x/2}dx=\frac{13}{e^4}\approx\mathbf{0.23810}$