UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
SECCIÓN ACADÉMICA DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
PRIMER EXAMEN FINAL MATUTINO
"PROBABILIDAD"
SOLUCIÓN

Semestre 2018- 1 | 6 de diciembre de 2017

1.- Un alumno contesta una pregunta que ofrece cuatro soluciones posibles en un examen de opción múltiple. Suponga que la probabilidad de que el alumno conozca la respuesta correcta es de 0.8. Si el alumno contesta correctamente la pregunta, ¿Cuál es la probabilidad de que haya respondido al azar?

Datos: P(S)=0.8 probabilidad de que sabe la respuesta, P(A)=0.2 Probabilidad de que conteste al azar.

Sea: P(C)= Probabilidad de que conteste correctamente.

Se sabe que: P(C|A) = 0.25

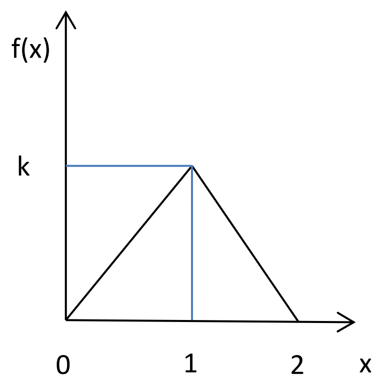
Preguntan: $\mathbf{P(A|C)} = \frac{\mathbf{P(A\cap C)}}{\mathbf{P(C)}} = \frac{\mathrm{P(C|A)P(A)}}{\mathbf{P(C|A)P(A)+P(C|\bar{A})}P(\bar{A})} = \frac{\mathbf{0.25*0.2}}{\mathbf{0.25*.02+0.8}} = \frac{\mathbf{0.05}}{\mathbf{0.85}} = \mathbf{0.0588}$

2.- Una carga es levantada por un cable A. Por seguridad se usa también un cable B, que por lo general no toma carga; pero si el cable A se rompiera, el cable B debe tomar la carga mientras se sustituye el cable A. La probabilidad de falla del cable A es de 0.02; mientras que la probabilidad de falla del cable B, cuando toma la carga es de 0.3
Determinar la probabilidad de que ambos cables fallen.

Datos: P(A)=0.02 probabilidad de que falle el cable A, P(B|A)=03 probabilidad de que falle el cable B, dado que fallo el cable A.

Pregunta $\mathbf{P(A\cap B) = P(A) * P(B|A) = 0.02 * 0.3 = 0.006}$

3.- Sea la función de densidad que se muestra en la siguiente figura:



a) Determinar el valor de k.
b) Calcular el valor esperado de la variable aleatoria de X.

Datos: la recta del origen al vértice de triángulo es Y=X, la recta que pasa por el vértice y el punto de abscisa 2 es Y=2-X.

a) Solución: Se sabe que: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Por lo tanto: $\mathrm{k}\int_0^1 \mathrm{x}\mathrm{dx} + \mathrm{k}\int_1^2 (2-x)\mathrm{dx} = \mathrm{k}\left[\frac{\mathrm{x}^2}{2}\right]_0^1 + \mathrm{k}\left[2\mathrm{x} - \frac{\mathrm{x}^2}{2}\right]_1^2 = 1$

Por lo que: $\frac{\mathrm{k}}{2} + \frac{\mathrm{k}}{2} = 1, \quad \therefore \mathbf{k = 1}$

También se puede obtener el valor de k de la siguiente manera:

Sea A el área bajo la curva f(x), se sabe que A=1

A=$\frac{b\times h}{2}$; de la gráfica se observa que: b=2 y h=k

Por lo tanto: 1=$\frac{2k}{2}$, al despejar k se tiene: **k=**$\mathbf{\frac{2}{2}=1}$

b) El valor esperado de X es: $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 (x)(x)dx + \int_1^2 x(2-\mathrm{x})\mathrm{dx} = \mathbf{1}$

4. Suponga que barcos de carga comerciales llegan al puerto Veracruz, con un promedio de 8 barcos de carga por hora. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 10 barcos de carga lleguen durante un periodo de dos horas?
Solución:
Sea X: el número de barcos que llegan al puerto en un periodo de dos horas.
X tiene distribución de Poisson, con parámetro $\lambda = 16$.
La probabilidad de que exactamente 10 barcos de carga lleguen durante un periodo de dos horas es:

$$\mathbf{P(X=10)} = \frac{\mathbf{16^{10} * e^{-16}}}{\mathbf{10!}} = \mathbf{0.034}$$

5. Sea X una variable aleatoria ji-cuadrada con 25 grados de libertad, se desea conocer el valor de la variable aleatoria para el cual P(X<x)=0.25, indique dicho valor.
Solución: El valor solicitado es: $\boldsymbol{\chi^2_{25,0.75}} = \mathbf{19.939}$

6.- Un producto se clasifica de acuerdo con el número de defectos que tiene y con la fábrica que los produjo. Sea X la variable aleatoria que representa el número de defectos por unidad que puede haber y sea Y la variable aleatoria que representa el número de la fábrica que produjo el producto. La función de probabilidad conjunta de las variables X,Y es:

f(x,y)		**y**	
		1	**2**
x	**0**	2/16	1 /16
	1	1 /16	1 /16
	2	3/16	2/16
	3	2/16	4 /16

a) Indique si las variables X y Y son estadísticamente independientes y justifique su respuesta.

b) Obtenga el valor del número de defectos que se espera tenga un producto.

Solución:
a) para que las variables sean estadísticamente independientes, en cualquier punto de la tabla se debe cumplir:
f(x, y)=f(x)*f(y), por ejemplo para x=1, y=1, se tiene: $f(0,1) = \frac{2}{16}$, $f(x=0) = 3$, $f(y=1) = \frac{8}{16}$, por lo tanto $f(x=0) * f(y=1) = \frac{3*8}{16*16} = \frac{3}{32}$, dicho valor es distinto a : $f(0,1)$, como no se cumple que f(x,y)= f(x)*f(y), para todos los valores de X,Y, entonces las variables **X, Y; NO son estadísticamente independientes.**

b) Se pide el valor esperado de la variable X: $\mathbf{E[X]} = \mathbf{0} * \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{16}} + \mathbf{1} * \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{16}} + \mathbf{2} * \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{16}} + \mathbf{3} * \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{16}} = \frac{\mathbf{30}}{\mathbf{16}} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{8}} = \mathbf{1.875}$