UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
COORDINACIÓN DE CIENCIAS APLICADAS
SECCIÓN ACADÉMICA DE PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA
PRIMER EXAMEN FINAL MATUTINO
"PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA"
SOLUCIÓN

6 de diciembre de 2017

Semestre 2018- 1

1. En un estudio de la variación de la dimensión crítica de cierto tipo de circuitos integrados, se tomó una muestra de 1000 circuitos. Una parte de la distribución de frecuencias de las mediciones de la dimensión crítica de dicha muestra, se presenta en la siguiente tabla:

Fronteras de clase (centímetros)		Marca de clase (centímetros)	Número de circuitos (frecuencia)	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa
		0.412	6		
		0.417		40	
		0.422	132		
		0.427		351	
		0.432	218		
		0.437	183		
			146		
		0.447	69		
		0.452			
		0.457	3		

a) Complete la tabla de distribución de frecuencias presentada.

Sea x_i la marca de clase i.

Se obtiene la longitud de las clases mediante: $x_2 - x_1$

Por lo tanto, el valor de la longitud de clase es:

$$x_2 - x_1 = 0.417 - 0.412 = 0.005$$

Se sabe que: $x_1 = \frac{Fron.inf.1 + Front.sup.1}{2}$

Por lo que: $Front.inf.1 + Front.sup.1 = (0.412)(2)$ ....(1)

Como la longitud de clase también es igual a: $Front.sup.1 - Fron.inf.1$

Entonces: $Front.sup.1 = long.clase + Front.inf.1$

$$= 0.005 + Front.inf.1 \quad ...(2)$$

Sustituyendo (2) en (1), se tiene: $Front.inf.1 + 0.005 + Front.inf.1 = 0.824$

Por lo tanto: $Front.inf.1 = \frac{(0.824 - 0.005)}{2} = 0.4095$,

y : $Front.sup.1 = 0.005 + Front.inf.1$

$$= 0.005 + 0.4095 = 0.4145$$

Por lo que la tabla de distribución de frecuencias queda de la siguiente manera:

Fronteras de clase (centímetros)		Marca de clase (centímetros)	Número de circuitos (frecuencia)	Frecuencia acumulada	Frecuencia relativa
0.4095	**0.4145**	0.412	6	**6**	**0.006**
0.4145	**0.4195**	0.417	**34**	40	**0.04**
0.4195	**0.4245**	0.422	132	**172**	**0.172**
0.4245	**0.4295**	0.427	**179**	351	**0.351**
0.4295	**0.4345**	0.432	218	**569**	**0.569**
0.4345	**0.4395**	0.437	183	**752**	**0.752**
0.4395	**0.4445**	**0.442**	146	**898**	**0.898**
0.4445	**0.4495**	0.447	69	**967**	**0.967**
0.4495	**0.4545**	0.452	**30**	**997**	**0.997**
0.4445	**0.4595**	0.457	3	**1000**	**1**

b) Calcule el valor promedio de la variación de la dimensión crítica de circuitos integrados que se muestrearon.

Solución:

El valor promedio de la variación de la dimensión crítica de circuitos integrados es: $\bar{\mathbf{x}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \mathbf{f_i * x_i}}{\mathbf{n}}$**,** donde: m=número de intervalos, y n=tamaño de la muestra, $\mathrm{f_i} = \text{frecuencia de cada intervalo,}$ $\mathrm{x_i} = \text{marca de clase en cada intervalo.}$

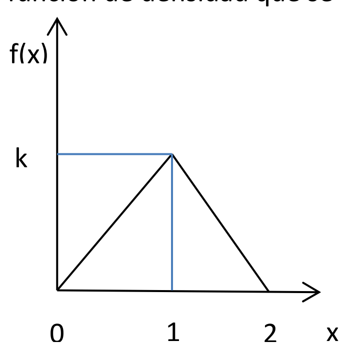
Por lo tanto: $\bar{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{433.24}}{\mathbf{1000}} = \mathbf{0.433}$

2. Un alumno contesta una pregunta que ofrece cuatro soluciones posibles en un examen de opción múltiple. Suponga que la probabilidad de que el alumno conozca la respuesta correcta es de 0.8, y que la probabilidad de seleccionar la respuesta correcta al azar es 0.25. Si el alumno contesta correctamente la pregunta, ¿Cuál es la probabilidad de que haya seleccionado la respuesta al azar?

Datos: P(S)=0.8 probabilidad de que sabe la respuesta, P(A)=0.2 Probabilidad de que conteste al azar.
Sea: P(C)= Probabilidad de que conteste correctamente.
Se sabe que: P(C|A) = 0.25

Preguntan: $\mathbf{P(A|C)} = \frac{\mathbf{P(A \cap C)}}{\mathbf{P(C)}} = \frac{\mathrm{P(C|A)P(A)}}{\mathbf{P(C|A)P(A)+P(C|\bar{A})}P(\bar{A})} = \frac{\mathbf{0.25*0.2}}{\mathbf{0.25*.02+0.8}} = \frac{\mathbf{0.05}}{\mathbf{0.85}} = \mathbf{0.0588}$

3. Sea la función de densidad que se muestra en la siguiente figura:



a) Determinar el valor de k.
b) Calcular el valor esperado de la variable aleatoria de X.

Datos: la recta del origen al vértice de triángulo es Y=X, la recta que pasa por el vértice y el punto de abscisa 2 es Y=2-X.

a) Solución: Se sabe que: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

Por lo tanto: $\mathrm{k}\int_0^1 \mathrm{x dx} + \mathrm{k}\int_1^2 (2-x)\mathrm{dx} = \mathrm{k}\left[\frac{\mathrm{x^2}}{2}\right]_0^1 + \mathrm{k}\left[2\mathrm{x} - \frac{\mathrm{x^2}}{2}\right]_1^2 = 1$

Por lo que: $\frac{\mathrm{k}}{2} + \frac{\mathrm{k}}{2} = 1, \quad \therefore \mathbf{k = 1}$

También se puede obtener el valor de k de la siguiente manera:
Sea A el área bajo la curva f(x), se sabe que A=1
A=$\frac{b \times h}{2}$; de la gráfica se observa que: b=2 y h=k
Por lo tanto: 1=$\frac{2k}{2}$, al despejar k se tiene: **k=**$\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{2}} = \mathbf{1}$

b) El valor esperado de X es: $E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 (x)(x)dx + \int_1^2 x(2-\mathrm{x})\mathrm{dx} = \mathbf{1}$

4. Un producto se clasifica de acuerdo con el número de defectos que tiene y con la fábrica que los produjo. Sea X la variable aleatoria que representa el número de defectos por unidad que puede haber y sea Y la variable aleatoria que representa el número de la fábrica que produjo el producto. La función de probabilidad conjunta de las variables X,Y es:

f(x,y)		**y**	
		1	**2**
x	**0**	2/16	1 /16
	1	1 /16	1 /16
	2	3/16	2/16
	3	2/16	4 /16

a) Indique si las variables X y Y son estadísticamente independientes y justifique su respuesta.
b) Obtenga el valor del número de defectos que se espera tenga un producto.
Solución:
a) para que las variables sean estadísticamente independientes, en cualquier punto de la tabla se debe cumplir: f(x, y)=f(x)*f(y), por ejemplo para x=1, y=1, se tiene: $f(0,1) = \frac{2}{16}$, $f(x=0) = 3$, $f(y=1) = \frac{8}{16}$, por lo tanto $f(x=0) * f(y=1) = \frac{3*8}{16*16} = \frac{3}{32}$, dicho valor es distinto a : $f(0,1)$, como no se cumple que f(x,y)= f(x)*f(y), para todos los valores de X,Y, entonces las variables X, Y; NO son estadísticamente independientes.

b) Se pide el valor esperado de la variable X: $\mathbf{E[X]} = \mathbf{0} * \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{16}} + \mathbf{1} * \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{16}} + \mathbf{2} * \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{16}} + \mathbf{3} * \frac{\mathbf{6}}{\mathbf{16}} = \frac{\mathbf{30}}{\mathbf{16}} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{8}} = \mathbf{1.875}$

5. El error en la longitud de un alambre puede variar de 1 a 4 mm, con la misma probabilidad en cada uno de los valores. Obtenga la probabilidad de que cualquiera de estos alambres tenga un error de longitud de más de 2 mm.

Solución: Sea X: la longitud del alambre
X$\sim$$continua\ uniforme\ (a = 1, b = 4)$
La probabilidad de que cualquiera de los alambres tenga un error de longitud de más de 2 mm es:

$$\mathbf{P(x > 2)} = \int_{\mathbf{2}}^{\mathbf{4}} \frac{\mathbf{dx}}{\mathbf{4-1}} = \left[\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{3}}\right]_{\mathbf{2}}^{\mathbf{4}} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}} = \mathbf{0.6667}$$

6. De una población distribuida normalmente $N\sim(\mu_X = 106, \sigma_X = 12)$ se extrae una muestra aleatoria de tamaño $n = 25$. Determine la probabilidad de que el valor promedio de la muestra extraída sea mayor que 110
Solución:
Sea $\overline{X}$: el valor promedio de la muestra extraída
X$\sim N\ (\mu_{\overline{X}} = 106, \sigma_{\overline{X}} = \frac{12}{\sqrt{25}}\ )$
La probabilidad solicitada es: $\mathrm{P}(\ \overline{X}\ > 110) = \mathrm{P}\left(\mathrm{Z} > \frac{110-106}{\frac{12}{5}}\right) = \mathrm{P}(\mathrm{Z} > 1.67) = 1 - \mathrm{P}(\mathrm{Z} \leq 1.67) = 1 - 0.9525$

$$\therefore\ \mathbf{P}(\ \overline{\boldsymbol{X}}\ > \mathbf{110}) = \mathbf{0.0475}$$

7. En un estudio para la clínica del sueño en la UNAM, se desea conocer si el número de horas del sueño influye en el peso de las personas. Los datos de una muestra son los siguientes:

Observación	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Peso	69	69	58	54	54	65	95	62	57.5	30
Horas de Sueño	5	8	7	10	6	9	10	6	6	8

Indique si es posible considerar que existe un comportamiento lineal entre las variables y justifique su respuesta.

Solución:
El valor que indica si existe relación lineal entre las variables es el coeficiente de correlación r.

$$r = \frac{SS_{xy}}{\sqrt{SS_{xx}SS_{yy}}}$$

Acorde al enunciado: X= horas de sueño, Y= peso de las personas.

X	Y	X^2	Y^2	xy
5	69	25	4761	345
6	54	36	2916	324
6	57.5	36	3306.25	345
6	62	36	3844	372
7	58	49	3364	406
8	30	64	900	240
8	69	64	4761	552
9	65	81	4225	585
10	54	100	2916	540
10	95	100	9025	950
Total				
75	**613.5**	**591**	**40018.25**	**4659**

$$\boldsymbol{SSxy} = \sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n} = 4659 - \frac{(75)(613.5)}{10} = \boldsymbol{57.75}$$

$$\boldsymbol{SSxx} = \sum(x_i{}^2) - \frac{(\sum x_i)^2}{n} = 591 - \frac{(75)^2}{10} = \boldsymbol{28.5}$$

$$\boldsymbol{SSyy} = \sum(y_i{}^2) - \frac{(\sum y_i)^2}{n} = 40018.25 - \frac{(613.5)^2}{10} = \boldsymbol{2380.025}$$

Por lo tanto: r = 0.2217
Como r es poco cercano a 1, entonces puede decirse que la relación lineal que existe entre las variables X y Y, no es buena, por lo que podría decirse que no existe una relación líneal entre las variables.