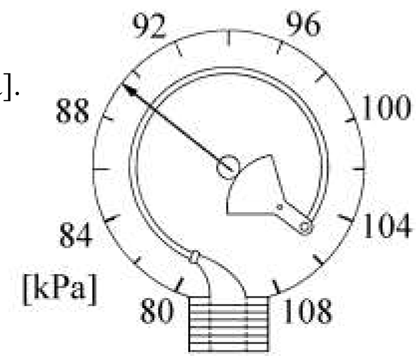
Cuaderno de ejercicios de Física experimental

Conceptos básicos de Metrología

Ejercicios resueltos

1. Para caracterizar el manómetro de Bourdon que se muestra, se realizaron varias mediciones de presión de un gas variando su volumen; por otra parte se calcularon los valores correspondientes de acuerdo con una ecuación que se ajusta de manera exacta al comportamiento del gas para tener los valores de referencia (valores patrones). Parte de las mediciones se muestran en la tabla, determine:

a) La ecuación de la curva de calibración.
b) El porcentaje de precisión para el valor P_P = 86 000 [Pa].
c) El porcentaje de exactitud para el valor patrón anterior.
d) La incertidumbre asociada al conjunto de mediciones correspondiente al valor patrón P_P = 88 000 [Pa].
e) Las características estáticas del instrumento y la lectura que indica.



P_P [Pa]	$\overline{P_L}$ [kPa]	P_{L1} [kPa]	P_{L2} [kPa]	P_{L3} [kPa]	P_{L4} [kPa]	P_{L5} [kPa]
84 000	84.4	84	84	86	84	84
86 000	87.2	86	86	88	88	88
88 000	89.2	88	90	88	90	90
90 000	91.2	90	92	90	92	92

Resolución:

a) La ecuación de la curva de calibración tendrá la forma $P_L = m\, P_p + b$,

cuya pendiente es $m = \dfrac{\Delta P_L}{\Delta P_p}$; calculando el valor de la pendiente con el método de la suma de los cuadrados mínimos tenemos $m = 1.12 \left[\dfrac{\text{kPa}}{\text{kPa}}\right]$; y la ordenada al origen es $b = -9.44$ [kPa], de esta manera el modelo matemático solicitado es:

$$P_L\,[\text{kPa}] = 1.12 \left[\frac{\text{kPa}}{\text{kPa}}\right] P_p\,[\text{kPa}] - 9.44\,[\text{kPa}].$$

b) El porcentaje de precisión se calcula como % P = 100 − % EP , por lo tanto es necesario calcular primero el porcentaje de error de precisión, el cual se puede calcular con la expresión:

$$\% \; EP = \left|\frac{\overline{P} - P_{+a}}{\overline{P}}\right| \times 100 \; \% \text{ ; entonces } \%EP = \left|\frac{(87.2 - 86)}{87.2}\right| \times 100 \; \% = 1.3761 \; \% \text{ ; con}$$

este error, podemos calcular el porcentaje de precisión solicitado: % P = 100 % – 1.3761 % = 98.6239 %.

c) Para calcular el porcentaje de exactitud, tenemos que %E = 100–%EE ;

en donde el error de exactitud está dado por $\%EE = \left|\frac{P_p - \overline{P}}{P_p}\right| \times 100\%$

por lo tanto $\%EE = \left|\frac{86 - 87.2}{86}\right| \times 100 \; \% = 1.3953\%$.

Así, el porcentaje de exactitud es: %E = 98.6047 %.

d) El número de lecturas que corresponden al valor patrón referido es n = 5, la incertidumbre asociada se puede calcular como $\Delta P = \pm \frac{S_P}{\sqrt{n}}$; donde la desviación estándar de la variable P, está dada por:

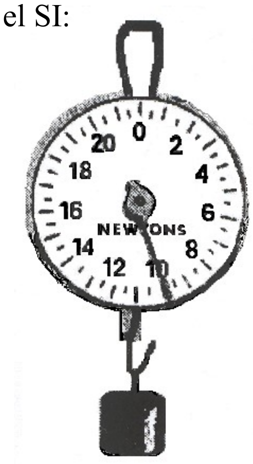
$$S_P = \pm \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\overline{P_L} - P_i)^2} = \pm \left\{ \frac{1}{5-1} \left[(89.2 - 88)^2 (2) + (89.2 - 90)^2 (3) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \; [\text{kPa}],$$

entonces $S_P = \pm$ 1.0954 [kPa] ; por lo tanto la incertidumbre es $\Delta P = \pm \frac{1.0954 \; \text{kPa}}{\sqrt{5}}$,

$\Delta P = \pm$ 0.4899 [kPa].

e) De acuerdo con la figura, el rango del instrumento es de 80 a 108 [kPa], su resolución es 2 [kPa], su legibilidad puede considerarse como buena y la lectura mostrada es 90 [kPa].

2. Para caracterizar el dinamómetro que se muestra en la figura se emplearon varias masas patrón y se midieron sus pesos, según se muestra en la tabla. Sabiendo que el experimento se hizo en la Cd. de México, g = 9.78 [m/s^2], determine en el SI:



a) La sensibilidad del instrumento de medición.
b) El porcentaje de exactitud para el valor patrón m_P = 200 [g].
c) El rango, la resolución y la legibilidad del dinamómetro. Escriba también el valor de la lectura y la expresión dimensional de la misma.

m_P [g]	0	140	200	350
W_L [N]	0.5	1.5	2	3.5

Resolución:

a) Como se trata de un dinamómetro, primero se calcularán los pesos patrones, con base en los valores de las masas patrones.
Dado que $W_p = m_P \cdot g$, entonces

W_P [N]	0	1.3692	1.956	3.423
W_L [N]	0.5	1.5	2	3.5

Para calcular la sensibilidad del instrumento se calcula la pendiente de la curva de calibración

$m = S = \dfrac{\Delta W_L}{\Delta W_P}$, entonces, con el método de la suma de los cuadrados mínimos:

S = 0.8774 [N/N].

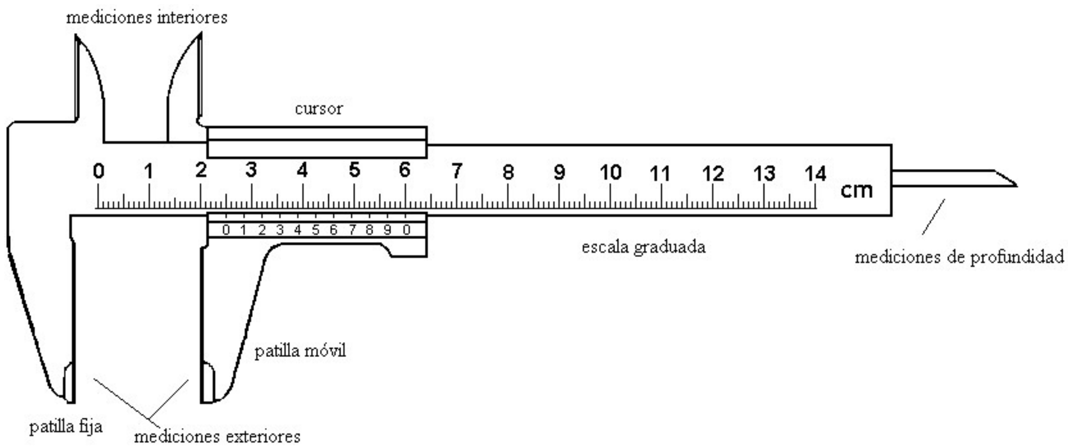
b) Para calcular el porcentaje de exactitud, es necesario calcular primero el porcentaje de error de exactitud, entonces

$$\%E = 100 - \%EE\ ,\ \%EE = \left|\frac{W_p - W_L}{W_p}\right| \times 100\% = \left|\frac{(1.956-2)\text{N}}{1.956\ \text{N}}\right| \times 100\% = 2.2495\%,$$

así, el porcentaje de exactitud será: %E = 97.75056 %.

c) De acuerdo con la figura, el rango es de 0 a 22 [N], la resolución es 0.5 [N], su legibilidad es buena y la lectura que indica es 10 [N]. La expresión dimensional, en el SI, de la lectura es la que corresponde a la cantidad física llamada fuerza, por lo tanto:
dim(lectura) = dim(fuerza) = L M T^{-2}.

3. Con el vernier que se muestra en la figura, se tomaron mediciones para su caracterización. En la tabla se muestran parte de los datos obtenidos. Basándose en la figura y en la información, determine:



L_P [mm]	$\overline{L}_L$ [mm]	L_{L1} [mm]	L_{L2} [mm]	L_{L3} [mm]	L_{L4} [mm]	L_{L5} [mm]
10	10.30	10.5	10.2	10.3	10.4	10.1
20	20.22	20.3	20.2	20.0	20.4	20.2
30	30.30	30.4	30.4	30.2	30.2	30.3
40	40.36	40.5	40.4	40.3	40.3	40.3

a) El modelo matemático de la curva de calibración.

b) El porcentaje de error de exactitud y el de exactitud para las mediciones del valor patrón de 40 [mm].

c) El porcentaje de error de precisión y el de precisión para las mediciones del valor patrón de 20 [mm].

d) Las características estáticas del instrumento así como su sensibilidad en el rango de mediciones presentado en la tabla.

Resolución:

a) El modelo matemático de la curva de calibración tendrá la forma: $L_L = m\, L_P + b$,

donde la pendiente es $m = \dfrac{\Delta L_L}{\Delta L_P}$; por lo tanto $m =$ 1.0026 [mm/mm] y la ordenada al origen es:

b = 0.23 [mm]; por lo tanto el modelo matemático es:

L_L[mm] = 1.0026 [mm/mm] L_P[mm] + 0.23 [mm].

b) Para calcular el porcentaje de error de exactitud tenemos que $\%EE = \left|\dfrac{L_p - \overline{L}_L}{L_p}\right| \times 100$,

entonces $\%EE = \left|\dfrac{40 - 40.36}{40}\right| \times 100 = 0.9\%$;

para el porcentaje de exactitud, sabemos que $\%E = 100 - \%EE = (100 - 0.9)\%$,

entonces $\%E = 99.1\%$.

c) Para el cálculo del porcentaje de error de precisión sabemos que

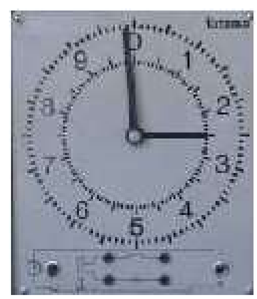
$\%EP = \left|\dfrac{\overline{L}_L - L_{ma}}{\overline{L}_L}\right| \times 100$, es decir $\%EP = \left|\dfrac{20.22 - 20}{22.22}\right| \times 100 = 1.088\%$, por lo tanto

para el porcentaje de precisión se tiene:

$\%P = 100 - \%EP = (100 - 1.088)\% = 98.912\%$.

d) El rango es de 0 a 14 [cm], su resolución 0.1 [mm], legibilidad: buena, como S = *m*, entonces la sensibilidad es: 1.0026 [mm/mm].

4. Con el cronómetro que se muestra en la figura, se tomaron las mediciones que se muestran en las tablas para determinar sus características dinámicas y su curva de calibración. En diez segundos la aguja pequeña gira diez vueltas completas y la aguja grande se mueve hasta la posición "1". Con base en la información proporcionada, determine:



a) El porcentaje de exactitud del cronómetro para el valor patrón de 15 [s].
b) El porcentaje de precisión del instrumento para el valor patrón anterior.
c) La sensibilidad del cronómetro.

t_P [s]	t_{L1} [s]	t_{L2} [s]	t_{L3} [s]	t_{L4} [s]	t_{L5} [s]
15.00	15.05	15.05	15.04	15.03	15.04

t_P [s]	10.00	20.00	30.00	40.00
t_L[s]	10.98	20.56	30.55	40.79

Resolución:

a) Con base en la primera tabla, primero se calcula el valor más representativo del conjunto de mediciones, es decir el valor patrón $\overline{t}_L = 15.042[s]$, para calcular el porcentaje de exactitud es necesario calcular el error de exactitud, por lo tanto

$\%E = 100 - \%EE$, $\%EE = \left|\dfrac{t_p - \overline{t}_L}{t_p}\right| \times 100$, $\%EE = \left|\dfrac{15 - 15.042}{15}\right| \times 100$,

$\%EE = 0.28\%$; por lo tanto $\%E = 99.72\%$.

b) Para el cálculo del porcentaje de precisión obtenemos primero el error de precisión, es decir $\%P = 100 - \%EP$, $\%EP = \left|\dfrac{\bar{t}_L - t_{+a}}{\bar{t}_L}\right| \times 100$,

$$\%EP = \left|\frac{15.042 - 15.03}{15.042}\right| \times 100 = 0.0798\% \text{ , por lo tanto } \quad \%P = 99.9202\% .$$

c) La sensibilidad es la pendiente del modelo matemático de la curva de calibración, entonces

$S = m$; $m = \dfrac{\Delta t_L}{\Delta t_p}$; por lo tanto $m = 0.9942$ [s/s], entonces $S = 0.9942\left[\dfrac{s}{s}\right]$.

5. Un alumno de Física Experimental caracterizó un óhmetro. Para ello, basándose en el código de colores que tienen los resistores, determinó los valores patrones de algunos arreglos con dichos elementos y midió con el instrumento bajo prueba la resistencia equivalente. Parte de las mediciones se muestran en la tabla, determine en el SI:

a) La sensibilidad del óhmetro.
b) El porcentaje de precisión para el valor patrón $R_P = 330$ [Ω].
c) La incertidumbre asociada al conjunto de mediciones del valor patrón del inciso anterior.

R_P [Ω]	$\bar{R}_L$ [Ω]	R_{L1} [Ω]	R_{L2} [Ω]	R_{L3} [Ω]	R_{L4} [Ω]
330	330.25	335	335	320	331
660	655.2				
990	995.75				
1320	1328.5				

Resolución:

a) El modelo matemático de la curva de calibración tiene la forma $R_L = m\, R_P + b$, donde la pendiente es la sensibilidad del instrumento, es decir $m = S$

$m = \dfrac{\Delta R_L}{\Delta R_P} =$, $m = 1.0107\left[\dfrac{\Omega}{\Omega}\right]$ entonces $S = 1.0107\left[\dfrac{\Omega}{\Omega}\right]$.

b) El porcentaje de precisión está dado por $\%P = 100 - \%EP$, por lo tanto el error de precisión se calcula como $\%EP = \left|\dfrac{\bar{R}_L - R_{ma}}{\bar{R}_L}\right| \times 100$,

$$\%EP = \left|\frac{330.25 - 320}{330.25}\right| \times 100 = 3.1037\% ,$$

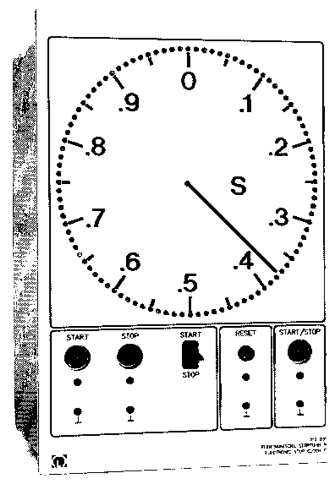
entonces el porcentaje de precisión solicitado es $\%P = 96.8963\%$.

c) La incertidumbre solicitada se calcula como $\Delta R = \pm \frac{S_R}{\sqrt{n}}$, en donde la desviación estándar de la variable física es $S_R = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum\left(\overline{R}_L - R_i\right)^2}$, por lo tanto

$$S_R = \sqrt{\frac{1}{4-1}\left[(330.25-335)^2\cdot(2)+(3330.25-320)^2+(330.25-331)^2\right]}\ [\Omega],$$

$$S_R = \pm 7.0887[\Omega], \quad \Delta R = \pm\frac{7.0887[\Omega]}{\sqrt{4}} = \pm 3.5444[\Omega].$$

6. En la figura se muestra un cronómetro semejante al que se utiliza en el laboratorio de Física Experimental. Se caracterizó dicho instrumento tomando mediciones con otro cronómetro y se obtuvo la tabla que se muestra. Determine para el instrumento caracterizado:



a) El modelo matemático de su curva de calibración.
b) El porcentaje de precisión y el de exactitud para el valor patrón $t_P = 0.15$ [s].
c) El valor más representativo y su incertidumbre para el conjunto de mediciones del valor patrón $t_P = 0.30$ [s].
d) Su rango, resolución, legibilidad y sensibilidad.

t_P [s]	t_{L1} [s]	t_{L2} [s]	t_{L3} [s]	t_{L4} [s]
0.15	0.18	0.19	0.18	0.18
0.20	0.23	0.23	0.23	0.24
0.25	0.26	0.26	0.27	0.27
0.30	0.31	0.32	0.32	0.33

Resolución:

a) Para obtener el modelo matemático de la curva de calibración será necesario calcular los valores más representativos del conjunto de lecturas de cada valor patrón, por lo tanto:

t_P [s]	$\overline{t}_L$ [s]
0.15	0.1825
0.20	0.2325
0.25	0.265
0.30	0.32

El modelo matemático de la curva de calibración tendrá la forma: $t_L = m\ t_P + b$, donde la pendiente es $m = \dfrac{\Delta t_L}{\Delta t_p}$, por lo tanto $m = 0.89\left[\dfrac{s}{s}\right]$; la ordenada al origen es: $b = 0.0498[s]$, por lo tanto el modelo matemático es

$$t_L[s] = 0.89\left[\frac{s}{s}\right]t_p[s] + 0.0498[s].$$

b) El porcentaje de precisión es $\%P = 100 - \%EP$, donde $\%EP = \left|\dfrac{\bar{t}_L - t_{ma}}{\bar{t}_L}\right| \times 100$,

$$\%EP = \left|\frac{0.1825 - 0.19}{0.1825}\right| \times 100 = 4.1096\%\text{, entonces}\quad \%P = 95.8904\%;$$

el porcentaje de exactitud es $\%E = 100 - \%EE$, donde $\%EE = \left|\dfrac{t_p - \bar{t}_L}{t_p}\right| \times 100$,

$$\%EE = \left|\frac{0.15 - 10.1825}{0.15}\right| \times 100 = 21.6667\%\text{, entonces}\quad \%E = 78.3333\%.$$

c) El valor más representativo corresponde al valor promedio, por lo tanto $\bar{t}_L = 0.32[s]$; la incertidumbre asociada al conjunto de mediciones está dada por

$\Delta R = \pm\dfrac{S_R}{\sqrt{n}}$, donde $n = 4$ y $S_t = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\left(\bar{R}_L - R_i\right)^2}$, por lo tanto

$$S_t = \sqrt{\frac{1}{4-1}\left[(0.32-0.31)^2 + (0.32-0.32)^2 + (0.32-0.32)^2 + (0.32-0.33)^2\right]}\,[s] = \pm 0.0082[s]$$

Entonces $\Delta R = \pm\dfrac{0.0082[s]}{\sqrt{4}} = \pm 0.0041[s]$ y $t_L = (0.32 \pm 0.0041)[s]$.

d) De acuerdo con la figura, el rango es de 0 a 1 [s]; la resolución es: 1[cs]; la legibilidad se puede considerar como buena y la sensibilidad es la pendiente de la curva de calibración, es decir
S = 0.89 [s/s].

7. En un laboratorio se desea caracterizar un instrumento para analizar un movimiento circular uniforme. Se midieron los valores de rapideces angulares (ω_L), se tomaron como referencia valores patrones (ω_P) calculados a partir de un modelo matemático y se obtuvo la tabla que se muestra. Con base en ello determine, en el SI, la sensibilidad del instrumento de medición para el rango de mediciones efectuado, así como el porcentaje de exactitud para el valor patrón $\omega_P = 16$ [rpm].

ω_P [rpm]	$\overline{\omega}_L$ [rad/s]	ω_{L1} [rad/s]	ω_{L2} [rad/s]	ω_{L3} [rad/s]	ω_{L4} [rad/s]
10	1.00				
12	1.25				
14	1.46				
16	1.68	1.67	1.69	1.68	1.68

1 [rpm] = 1 [revolución/minuto]

Resolución:

Poniendo las dos primeras columnas de la tabla en el SI, tenemos que

ω_P [rad/s]	$\overline{\omega}_L$ [rad/s]
1.0472	1
1.2566	1.25
1.4661	1.46
1.6755	1.68

por lo tanto el modelo matemático tendrá la forma $\omega_L = m\,\omega_P + b$, cuya pendiente es la sensibilidad del instrumento, entonces

$$m = S = 1.0743\left[\frac{rad/s}{rad/s}\right].$$

Para calcular el porcentaje de exactitud solicitado, primero calcularemos el porcentaje de error de exactitud, es decir

$$\%EE = \left|\frac{\omega_p - \overline{\omega}_L}{\omega_p}\right| \times 100, \qquad \%EE = \left|\frac{1.6755 - 1.68}{1.6755}\right| \times 100 = 0.2686\%,$$

como $\%E = 100 - \%EE$, entonces $\%E = 99.7314\%$.

8. Para caracterizar un medidor de frecuencias se generaron varias ondas y se midieron sus frecuencias (f_L). Se calcularon los valores de los periodos patrones (τ_P) que corresponden a dichas frecuencias y se obtuvo la tabla que se muestra. Determine, en el SI y utilizando el método de mínimos cuadrados:

τ_P [cs]	6	12	18
f_L [Hz]	16	8	5

a) La sensibilidad del instrumento de medición.
b) El modelo matemático de la curva de calibración.
c) El periodo patrón que se tendría para la frecuencia leída $f_L = 10$ [Hz].

d) El porcentaje de exactitud para la lectura de la frecuencia cuyo periodo patrón es τ_P = 18 [cs].

Resolución:

a) El modelo matemático de la curva de calibración tiene la forma $f_L = m\, f_P + b$, donde la pendiente es la sensibilidad, por lo tanto se calculará la pendiente del modelo a partir del método de mínimos cuadrados; dicha pendiente es $m = \dfrac{\Delta f_L}{\Delta f_p}$, para calcular los valores de las frecuencias patrones se sabe que $f_p = \dfrac{1}{\tau_p}$, por lo tanto

τ_P [s]	0.06	0.12	0.18
f_p[Hz]	16.6667	8.3333	5.5556
f_L[Hz]	16	8	5

El número de mediciones es 3, por lo tanto n = 3, además $\sum f_P = 30.5556[\text{Hz}]$ y $\sum f_L = 29[\text{Hz}]$,

$f_p \cdot f_L \left[\text{Hz}^2\right]$	$f_p{}^2 \left[\text{Hz}^2\right]$
266.6672	277.7789
66.6664	69.4439
27.778	30.8674
$\sum f_p \cdot f_L = 361.1116$	$\sum f_p{}^2 = 378.0875$

con las expresiones del método de mínimos cuadrados que se encuentran en el apéndice de este Cuaderno de Ejercicios, tenemos

$m = \dfrac{(3)(361.1116)-(30.5556)(29)\left[\text{Hz}^2\right]}{(3)(378.0875)-(30.5556)^2\left[\text{Hz}^2\right]} = \dfrac{197.2224}{200.6178}\left[\dfrac{\text{Hz}}{\text{Hz}}\right]$ = 0.9831 [Hz/Hz], por lo tanto

$$S = 0.9831\left[\frac{\text{Hz}}{\text{Hz}}\right].$$

b) Para obtener el modelo matemático hace falta calcular la ordenada al origen, la cual está dada por

$b = \dfrac{(29)(378.0875)-(361.116)(30.5556)[\text{Hz}]}{(3)(378.0875)-(30.5556)^2} = \dfrac{-69.4441[\text{Hz}]}{200.3178}$ = –0.3462 [Hz],

de esta manera el modelo matemático será

$$f_L[\text{Hz}] = 0.9831\left[\frac{\text{Hz}}{\text{Hz}}\right] f_p[\text{Hz}] - 0.3462[\text{Hz}].$$

c) El periodo patrón se puede calcular a partir de la frecuencia patrón correspondiente, la cual, a su vez, se puede obtener del modelo matemático del inciso anterior, es decir

$$f_p[\mathrm{Hz}] = \frac{f_L[\mathrm{Hz}] + 0.3462[\mathrm{Hz}]}{0.9831\left[\frac{\mathrm{Hz}}{\mathrm{Hz}}\right]} = \frac{10 + .03462}{0.9831}[\mathrm{Hz}] = 10.5241[\mathrm{Hz}];$$

como $\tau_p = \frac{1}{f_p}$, entonces $\tau_p = 0.09502[\mathrm{s}]$.

d) Como se conoce el periodo $\tau_p = 0.18[\mathrm{s}]$, entonces se calculará primero la frecuencia patrón correspondiente, esto es; $f_p = \frac{1}{\tau_p} = (0.18[\mathrm{s}])^{-1} = 5.5556[\mathrm{Hz}]$, el porcentaje de exactitud es $\%E = 100 - \%EE$, entonces $\%EE = \left|\frac{f_p - f_L}{f_p}\right| \times 100$,

$$\%EE = \left|\frac{5.5556 - 5}{5.5556}\right| \times 100 = 10.0007\%,$$

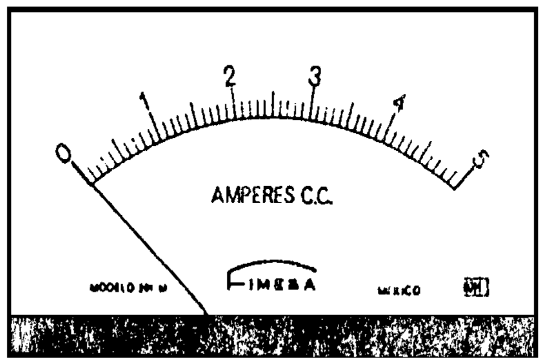
por lo tanto $\%E = 89.9993\%$.

Conceptos básicos de Metrología

Ejercicios propuestos

1. Con el instrumento de medición que se muestra en la figura, se tomaron las lecturas indicadas en la tabla, con base en ello, determine:

a) El rango y la resolución del instrumento.
b) La precisión del instrumento para el valor real de 4.5 [A].
c) La exactitud del instrumento para el valor real de 4.5 [A].
d) La sensibilidad.



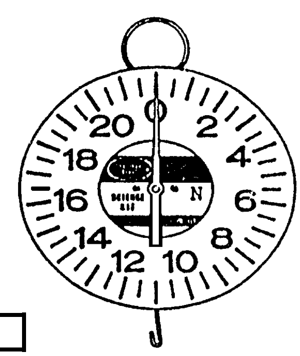
V_P [A]	$\overline{V}_L$ [A]					
0.5	0.70					
1.0	0.90					
1.5	1.40					
2.0	2.10					
2.5	2.60					
3.0	3.10					
3.5	3.50					
4.0	4.10					
4.5	4.60	4.40	5.0	4.60	4.6	4.4
5.0	5.10					

2. Con el dinamómetro que se muestra en la figura se tomaron las lecturas indicadas en la tabla, con base en esto, determine:

a) El rango y la resolución del dinamómetro.
b) La sensibilidad del dinamómetro, en el intervalo de las mediciones.
c) El porcentaje de error de exactitud, al medir una fuerza cuyo valor real es de 18 [N].
d) El porcentaje de error de precisión, al medir una fuerza cuyo valor real es de 18 [N].

F_P = fuerza patrón.
F_L = fuerza leída.

F_P [N]	$\overline{F}_L$ [N]					
2	2.1					
6	5.9					
10	10.2					
14	14.1					
18	18.1	18.0	17.5	18	18.5	18.5



3. En un laboratorio se caracterizó un termómetro de mercurio. Parte de las mediciones se muestran en la tabla. Con base en ello, determine:

a) El modelo matemático de la curva de calibración.
b) La sensibilidad del termómetro.
c) La cuarta lectura para el valor patrón $T_P = 6$ [°C], es decir el valor de w.
d) El porcentaje de exactitud para el valor patrón $T_P = 2$ [°C].
e) El porcentaje de precisión para el valor patrón $T_P = 4$ [°C].
f) La resolución más probable del termómetro empleado.
g) La incertidumbre para el valor patrón del inciso e.
h) La expresión dimensional, en el SI, de las constantes del modelo matemático del inciso a.

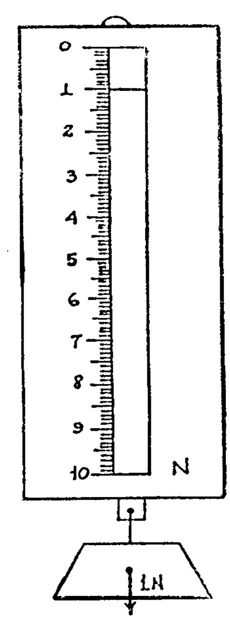
T_P [°C]	$\overline{T}_L$ [°C]	T_{L1} [°C]	T_{L2} [°C]	T_{L3} [°C]	T_{L4} [°C]
– 4	– 3.75	– 4	– 4	– 4	– 3
– 2	– 2	– 3	– 1	– 3	– 1
0	0.25	1	0	0	0
2	2.5	2	3	2	3
4	3.75	3	4	4	4
6	5.5	6	7	4	w

4. Se desean obtener las características de un dinamómetro utilizando pesas patrones. De las mediciones realizadas se obtuvo la tabla que se muestra. Con base en ésta y la figura del dinamómetro determine:

V_P	V_{L1}	V_{L2}	V_{L3}	V_{L4}	V_{L5}	V_{L6}	V_{L7}
0	0	0	0	0	0	0	0
0.5	0.6	0.75	0.6	0.5	0.4	0.7	0.5
1.0	1.1						
2.0	1.9						
3.0	3.0						
4.0	4.1						
5.0	4.9						

V_P = valor patrón [N].
V_L = valor leído [N].

a) El rango y la resolución del dinamómetro.
b) El porcentaje de exactitud.
c) El porcentaje de precisión.
d) La sensibilidad en el intervalo de 0 a 5 [N].



5. En un laboratorio de Física, en el cual la aceleración gravitatoria es 9.78 [m/s^2] se desea caracterizar una balanza; al medir nueve veces la masa de un peso patrón de 20 [N] se obtuvieron las lecturas que se muestran; adicionalmente se realizaron otras mediciones con otros pesos patrones.

Lectura	1	2	3	4	5	6	7	8	9
[kg]	2.05	2.10	2.03	2.10	2.01	2.03	2.00	2.10	2.05

Peso patrón [N]	5	10	15	20
Masa leída promedio [kg]	0.5102	1.0260	1.5285	2.0522

Con base en esta información determine para la balanza en estudio:

a) Su porcentaje de exactitud cuando se utilizó el peso patrón de 20 [N].
b) Su porcentaje de precisión para el valor patrón anterior.
c) Su sensibilidad.
d) La ecuación de su curva de calibración.
e) El valor más representativo de la masa del peso patrón de 20 [N] incluyendo su incertidumbre.

6. Un termómetro con rango de – 10°C a 110°C y resolución de 1°C fue utilizado para la medición de temperatura de una mezcla de sustancias. Con el objeto de cuantificar las características de dicho termómetro se elaboran las tablas siguientes:

valor patrón	T_P[ºC]	–5	0	5	10	15	20	30	40	50	60
valor promedio	T_L[ºC]	–5.05	0	4.95	10.10	15.05	20.15	30.05	39.95	49.90	60.05

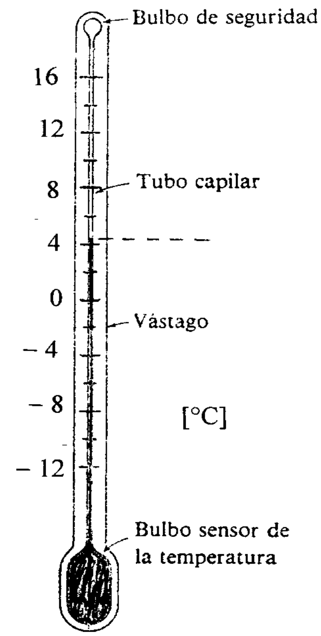
T_P[ºC]	T_{L1}[ºC]	T_{L2}[ºC]	T_{L3}[ºC]	T_{L4}[ºC]	T_{L5}[ºC]
37.0	36.5	37.0	37.5	36.0	37.0

Con base en las tablas de datos determine:

a) El modelo matemático de la curva (recta) de calibración del instrumento.
b) La sensibilidad del instrumento de medición.
c) La exactitud del termómetro para el valor patrón de 37 [°C].
d) La precisión del termómetro para el valor patrón de 37 [°C].
e) El valor más representativo con su incertidumbre para el valor patrón de 37 [°C].

7. En el laboratorio de un instituto de investigación se realizaron mediciones de temperaturas controladas (patrones) por medio de un termómetro como el que se muestra en la figura, obteniéndose los datos que se muestran a continuación:

T_P [°C]	$\overline{T}_L$ [°C]	T_1 [°C]	T_2 [°C]	T_3 [°C]	T_4 [°C]
-10	-10	-8	-10	-12	-10
-6	-5	-4	-4	-6	-6
-2	-1	0	-2	-2	0
2	1.5	0	2	2	2
6	5.5	4	6	4	8

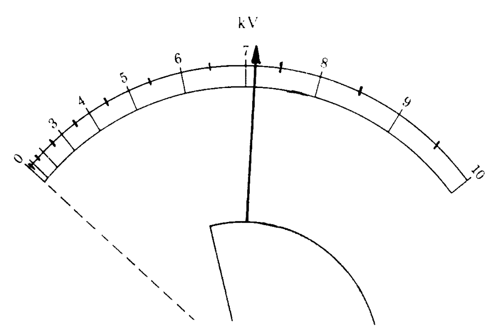


Para el termómetro, determine:

a) Rango, resolución y la lectura que indica la figura.
b) La exactitud para la temperatura patrón de 2 [°C].
c) La sensibilidad en el intervalo de experimentación.
d) La precisión para la temperatura patrón de –6 [°C].
e) La ecuación de la curva de calibración.

8. En un laboratorio se caracterizó un voltímetro electrostático como el que se muestra en la figura. Se le aplicaron diversas diferencias de potencial (voltajes) y se registraron las lecturas que se indican en la tabla. Con base en ello, determine:

a) El rango, la resolución del voltímetro, así como la lectura que indica.
b) El modelo matemático de la curva de calibración del instrumento de medición.
c) El significado físico de la pendiente del modelo matemático anterior, así como su expresión dimensional en el SI:
d) El error de precisión para el valor patrón V_P = 9 000 [V].
e) El porcentaje de exactitud para el valor patrón anterior.
f) La incertidumbre asociada al valor patrón V_P = 9 000 [V].



V_P [V]	$\overline{V}_L$ [kV]	V_{L1} [kV]	V_{L2} [kV]	V_{L3} [kV]	V_{L4} [kV]
0	0.5				
3 000	3.125				
6 000	6.5				
9 000	8.875	8.5	9	8.5	9.5

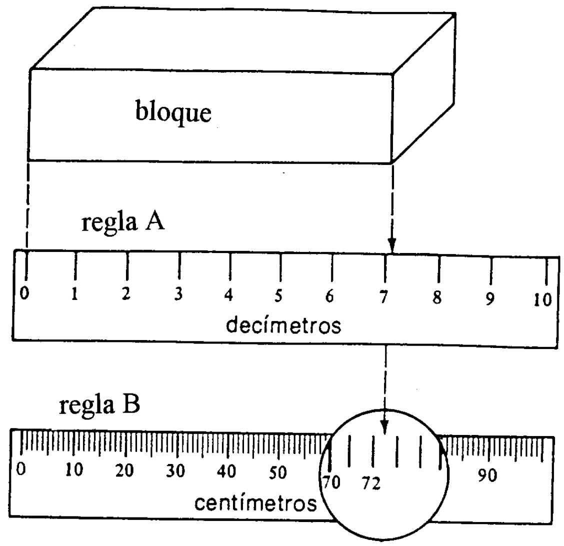
9. Con la regla B mostrada se midió la longitud del bloque de la figura, obteniéndose la tabla 1. Adicionalmente con la regla B se tomaron varias lecturas para diferentes valores patrones, se trabajaron los datos obtenidos y se obtuvo la tabla 2.

Tabla 1. (Valores en cm)

Longitud del bloque (valor real)	V_{L1}	V_{L2}	V_{L3}	V_{L4}	V_{L5}
72.3	72	73	72.5	72	72.5

Tabla 2.

V_P [cm]	10	20	30	40	50	60	70	80
$\overline{V}_L$ [cm]	10.5	19.6	29.0	40.2	50.1	60	70.3	80.2



Con base en la figura y en la tabla, obtenga:

a) El rango y la resolución para ambas reglas.
b) La exactitud de la regla B si el valor verdadero de la longitud del bloque es 72.3 [cm].
c) La precisión de la regla B si el valor verdadero de la longitud del bloque es 72.3 [cm].
d) La sensibilidad de la regla B.

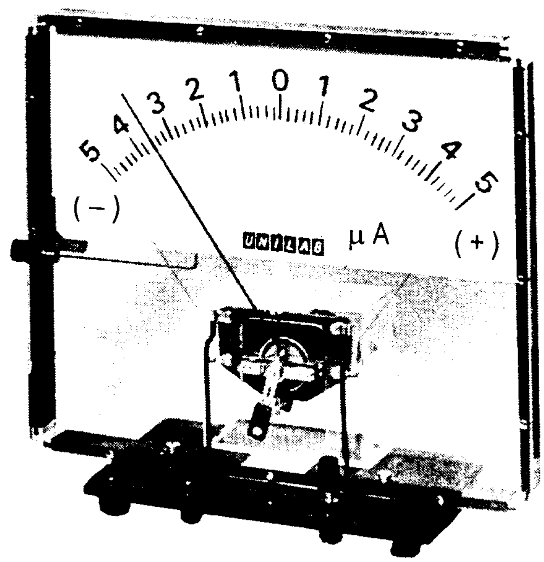
10. Se desea caracterizar un termómetro; para ello se proporcionó a una sustancia energía en forma de calor y se tomaron varias lecturas de temperatura de la sustancia con el termómetro para compararlas con valores de temperatura teóricos (valores patrones). Parte de los datos se muestran en la tabla. Con base en ello, determine:

a) El porcentaje de exactitud para el valor patrón de 32 °C.
b) El porcentaje de precisión para el valor patrón anterior.
c) La sensibilidad del termómetro utilizado.
d) El modelo matemático de la curva de calibración de dicho instrumento.
e) El valor más representativo y su incertidumbre asociada en la medición del valor patrón de 32 °C.

Q [kJ]	T_P [°C]	$\overline{T}_L$ [°C]				
0	22	22				
2.093	24	23.5				
4.186	26	25				
6.279	28	27				
8.372	30	29.5				
10.465	32	31.5	31	32	32.5	30.5

11. En un laboratorio de física se caracterizó un microamperímetro, instrumento que sirve para medir corrientes eléctricas muy pequeñas, como el que se muestra en la figura. Parte de las mediciones que se tomaron se muestran en la tabla. Con base en ello, determine para el micro-amperímetro:

a) El rango y la resolución, así como la lectura que muestra.
b) El modelo matemático de la curva de calibración.
c) El valor leído que se tendría si el valor patrón fuese I_P = 3 200 [nA].
d) El significado físico de la pendiente y de la ordenada al origen del modelo matemático del inciso b y la expresión dimensional de cada una de ellas, en el SI.
e) El porcentaje de exactitud que presentó el instrumento utilizado en el laboratorio para el valor patrón I_P = 0.002 [mA].
f) El porcentaje de precisión para el valor patrón del inciso anterior.

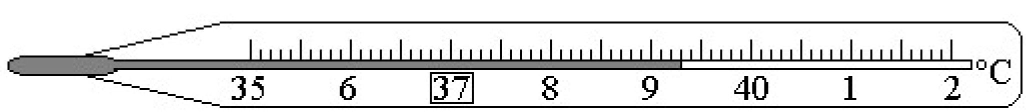


I_P [mA]	$\bar{I}_L$ [μA]				
− 0.003	− 2.85				
− 0.002	− 2.22				
− 0.001	− 0.88				
0	0.2				
0.001	1.1	I_{L1} [μA]	I_{L2} [μA]	I_{L3} [μA]	I_{L4} [μA]
0.002	2.05	2	2.2	2.2	1.8

12. En un laboratorio se busca caracterizar un termómetro para controlar cultivos de microorganismos. El termómetro es como el que se muestra en la figura con el cual se obtuvieron las mediciones de la tabla, contrastadas con temperaturas controladas con otro equipo más sofisticado que serán consideradas como temperaturas patrón; con base en la figura y en la tabla, determine para el termómetro:

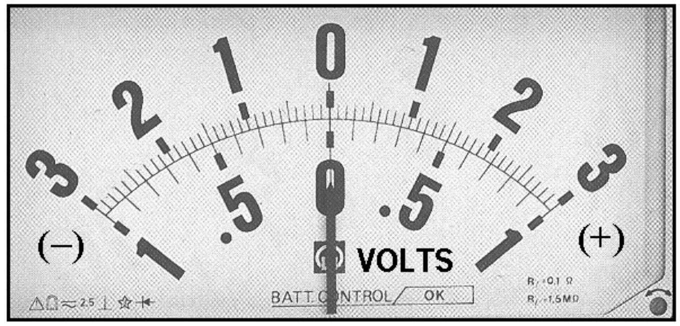
a) El rango, la resolución y la lectura indicada.
b) El porcentaje de exactitud si la temperatura patrón es T_P = 42 [°C].
c) El porcentaje de precisión si la temperatura patrón es T_P = 38 [°C].
d) La sensibilidad.
e) La ecuación de la curva de calibración.
f) La lectura más representativa, incluyendo su incertidumbre, para el valor patrón T_P = 36 [°C].

T_P [°C]	$\bar{T}_L$ [°C]	T_{L1} [°C]	T_{L2} [°C]	T_{L3} [°C]	T_{L4} [°C]
36	36.05	36.1	36.1	35.9	36.1
38	37.95	37.8	37.9	38.0	38.1
40	40.05	39.9	40.2	40.0	40.1
42	41.9	41.8	42.0	41.9	41.9



13. En la figura se muestra la carátula de un voltímetro que se desea caracterizar. Sus terminales se conectaron a un resistor, se calcularon los valores teóricos de diferencia de potencial (voltaje) y se efectuaron las mediciones que se muestran en la tabla. Determine:

V_P [V]	$\overline{V}_L$ [V]	V_{L1} [V]	V_{L2} [V]	V_{L3} [V]	V_{L4} [V]
– 2	– 2.075	– 2.1	– 2.1	– 2.0	– 2.1
– 1	– 1.125	– 1.2	– 1.2	– 1.1	– 1.0
0	– 0.05	– 0.1	0	– 0.1	0
1	0.925	0.9	0.9	0.9	1.0
2	1.825	1.7	1.8	1.9	1.9



a) Las características estáticas, de la escala superior y de la inferior, del instrumento utilizado.
b) La ecuación de la curva de calibración y la sensibilidad del instrumento.
c) El porcentaje de exactitud para el valor patrón $V_P = -1$ [V].
d) El porcentaje de precisión para el valor patrón $V_P = 2$ [V].
e) El valor más representativo de las mediciones y su incertidumbre asociada para el valor patrón $V_P = 1$ [V].

14. En un laboratorio se caracterizó un termómetro, utilizando como referencia (valores patrones) las lecturas de un termómetro como el que se muestra en la figura. Parte de las mediciones se muestran en la tabla. Accidentalmente una de las personas que participaron en el experimento manchó la tabla; si se sabe que el valor promedio oculto resultó menor que el valor patrón correspondiente, determine:
a) El valor más representativo de las lecturas correspondientes al valor patrón $T_P = 23$ [°C].
b) La temperatura más alejada. del valor promedio del inciso anterior, si se sabe que el valor de la primera es mayor que el promedio.
c) La sensibilidad del instrumento de medición caracterizado, suponiendo que el valor promedio oculto por la mancha nos diera un porcentaje de error de exactitud igual a cero.
d) El modelo matemático de la curva de calibración del termómetro, de acuerdo con el inciso anterior.
e) La incertidumbre del conjunto de mediciones del valor patrón $T_P = 32$ [°C].

T_P [°C]	17	20	23	26	29	32
$\overline{T}_L$ [°C]	17.5	20.3		26.4	28.8	32.5
%EE			2.609			
%EP			1.786			

T_P [°C]	T_{L1} [°C]	T_{L2} [°C]	T_{L3} [°C]	T_{L4} [°C]	T_{L5} [°C]
32	32.6	32.8	32.2	32.4	32.5

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. a) 0 a 5 [A]; 0.1 [A]
   b) %P = 91.3 %
   c) %E = 97.78 %
   d) S = 1.0145 [A/A]

2. a) 0 a 22 [N]; 0.5 [N]
   b) S = 1.005 [N/N]
   c) %EE = 0.5556 %
   d) %EP = 3.3149 %

3. a) T_L [°C]= 0.9393 [°C/°C] T_P [°C] + 0.1024 [°C]
   b) S = 0.9393 [1]
   c) w = 5 [°C]
   d) %E = 75 %
   e) %P = 80%
   f) 1 [°C]
   g) ± 0.25 [°C]
   h) dim(m) = 1; dim(b) = Θ

4. a) 0 a 10 [N]; 0.1 [N]
   b) %E = 84.3%
   c) %P = 69.14%
   d) S = 0.9823 [N/N]

5. a) %E = 99.6479%
   b) %P = 97.4564%
   c) S = 1.0031 [kg/kg]
   d) m_L [kg]= 1.0031 [kg/kg] m_P [kg] – 0.0029 [kg]
   e) m = 2.0522 ± 0.0131 [kg]

6. a) T_L [°C] = 0.9997 [1] T_P [°C] + 0.0209 [°C]
   b) S = 0.9997 [°C/°C]
   c) %E = 99.46%
   d) %P = 97.83%
   e) T = 36.8 ± 0.2549 [°C]

7. a) – 12 a 16 [°C]; 2 [°C]; 4 [°C]
   b) %E = 75 %
   c) S = 0.9375 [°C/°C]
   d) %P = 80 %
   e) T_L [°C]= 0.9375 [1] T_P [°C] + 0.075 [°C]

8. a) 0 a 10 [kV]; 0.5 [kV]; 7 [kV]

b) V_L [V]= 0.95 [1] V_P [V] + 475 [V]
c) m = S; dim (m) = [1]
d) %EP = 7.0423%
e) %E 98.6111%
f) $\Delta V = \pm$ 0.2394 [kV]

9. a) Regla A: 0 a 10 [dm]; 1 [dm]; regla B: 0 a 100 [cm]; 1 [cm]
b) %E = 99.86 %
c) %P = 99.17 %
d) S = 1.0051 [cm/cm]

10. a) %E = 98.44 %
b) %P = 96.83 %
c) S = 0.9643 [°C/°C]
d) T_L [°C]= 0.9643 [1] T_P [°C] + 0.381 [°C]
e) T = 31.5 ± 0.4565 [°C]

11. a) – 5 a 5 [μA]; 0.2 [μA] ; – 3.6 [μA]
b) I_L [μA] = 1.0154 [μA/μA] I_P [μA] + 0.0744 [μA]
c) I_L = 3.3237 [μA]
d) m = S; b = error sistemático; dim (m) = 1; dim (b) = I
e) %E = 97.5 %
f) %P = 87.8049%

12. a) 35 a 42 [°C]; 1 [°C]; 39.3 [°C]
b) %E = 99.7619%
c) %P = 99.6047%
d) S = 0.9825 [1]
e) T_L [°C] = 0.9825 [°C/°C] T_P [°C] + 0.67 [°C]
f) T_L = 36.05 ± 0.05 [°C]

13. a) Escala superior; rango: − 3 a 3 [V], resolución: 0.1 [V], legibilidad: buena.
Escala inferior; rango − 1 a 1 [V], resolución 0.1 [V], legibilidad: buena.
b) V_L [V] = 0.985 [V/V] V_P [V] – 0.1 [V] ; S = 0.985 [V/V]
c) %E = 87.5%
d) %P = 93.1507%
e) V_L = 0.925 ± 0.025 [V]

14. a) $\overline{T_L}$ = 22.4 [°C]
b) T_{ma} = 22.8 [°C]
c) S = 0.9895 [°C/°C]
d) T_L [°C] = 0.9895 [°C/°C] T_P [°C] + 0.5167 [°C]
e) $\Delta T = \pm$ 0.1 [°C]

Mecánica clásica

Ejercicios resueltos

1. En un experimento se dejó rodar desde $t_0 = 0$ [s] y partiendo del reposo, sin fricción ni deslizamiento, un móvil esférico sobre un plano inclinado como se indica en la figura. El plano inclinado formaba $\alpha = \pi/12$ [rad] con la horizontal, la aceleración gravitatoria del lugar donde se realizó el experimento era 9.78 [m/s^2] y la masa del móvil 122 [g]. Con base en esta información determine:

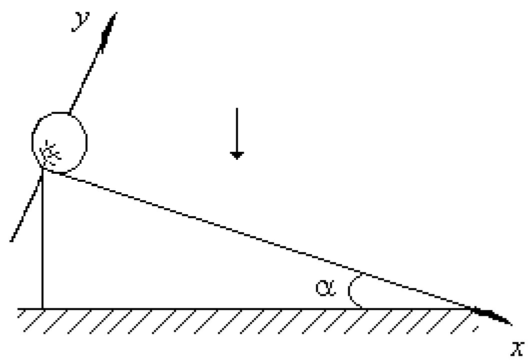
a) La aceleración (magnitud y dirección) del móvil así como su gráfica en función del tiempo, es decir $a = f(t)$.

b) El tiempo (t_1) en el que la esfera recorrió los primeros 6.8 [cm].

c) La velocidad (magnitud y dirección) del móvil en el instante en el que había recorrido la distancia del inciso anterior, es decir v en el instante t_1.

d) La energía cinética de la esfera en el instante t_1.

$\vec{g} = 9.78$ [m/s^2]



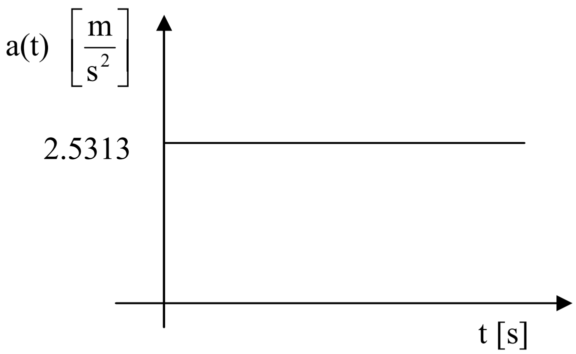
Resolución:

a) Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, como es sobre un plano inclinado, la aceleración está dada por $a = g \text{ sen } \alpha$, de acuerdo con la figura, el vector aceleración es paralelo al eje x, por lo tanto el dicho vector se puede escribir como

$\vec{a} = a(\hat{i})$, calculando el módulo de dicho vector tenemos que $a = (9.78 \text{ [m/s}^2\text{]}) \text{ sen } \dfrac{\pi}{12}$

$a = 2.5313$ [m/s^2], entonces $\vec{a} = 2.5313\ \hat{i} \left[\dfrac{m}{s^2}\right]$

La aceleración es constante, por lo tanto la gráfica es:



b) En un movimiento de este tipo el desplazamiento está dado por

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$; de donde despejamos el tiempo,

es decir: $t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2(0.068[\mathrm{m}])}{2.5313\ [\mathrm{m/s^2}]}}$, $t_1 = 0.2318$ [s].

c) Sabemos que la rapidez está dada por $v(t) = \frac{dx}{dt}$, por lo tanto $v(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}a\,t^2\right] = a\,t$,

entonces, $v(t_1) = (2.5313\ [\mathrm{m/s^2}])\ (0.2318\ [\mathrm{s}])$, como el vector velocidad es paralelo al eje x, entonces $\vec{v} = 0.5868\ \hat{i}\ \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$.

d) La energía cinética está dada por $EC = \frac{1}{2}mv^2$, por lo tanto EC = ½ (0.122 [kg]) $(0.5868\ [\mathrm{m/s^2}])^2$, EC = 0.021 [J].

2. Suponga que en un planeta de nuestro Sistema solar se realizó un experimento de caída libre. Con ayuda de varios instrumentos, se midieron las distancias “x” que recorría una partícula cuya masa era de 225 [g], así como los lapsos “t” (ya que $t_0 = 0$ [s]) que empleaba, en promedio, en recorrer dichas distancias y se obtuvo la tabla mostrada. Con base en ello, determine:

x [m]	$\bar{t}$ [s]
0.2	0.19
0.4	0.26
0.6	0.32
0.8	0.37

a) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento, considere que la variable independiente fue la distancia (x) recorrida por la partícula.
b) La aceleración gravitatoria del planeta y la gráfica de la aceleración del móvil en función del tiempo.

c) El modelo matemático experimental que relaciona a la rapidez de la partícula en función del tiempo así como la gráfica de este modelo.
d) La energía cinética que tendría el móvil en el instante en que ha recorrido una distancia x = ½ [m].

Resolución:

a) Como las variables "x" y "t" no tienen una relación lineal en este tipo de movimiento (rectilíneo uniformemente acelerado), es necesario realizar un cambio de variable, entonces se elevan al cuadrado los valores de tiempo más representativos; con ello, las variables del modelo matemático se tienen tabuladas en la tabla siguiente:

x [m]	z [s^2]
0.2	0.0361
0.4	0.0676
0.6	0.1024
0.8	0.1369

El modelo matemático tendrá la forma z = m x + b, donde $m = \frac{\Delta z}{\Delta x}$, por lo tanto

$m = 0.1686\left[\frac{s^2}{m}\right]$; la ordenada al origen es: b = 0.0015 [s^2], entonces el modelo

matemático es $z\left[s^2\right] = 0.1686\left[\frac{s^2}{m}\right]x[m] + 0.0015\left[s^2\right]$.

b) Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado y como es caída libre la aceleración del móvil es igual a la aceleración gravitatoria del lugar, es decir a = g ,

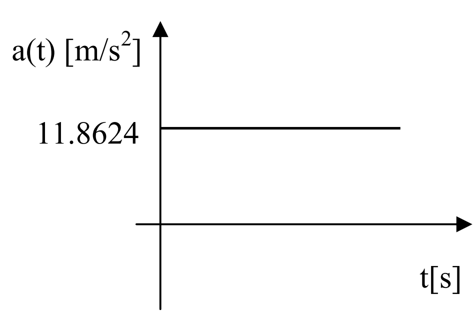
la expresión para calcular la distancia recorrida es $x = \frac{1}{2}at^2$, de donde se puede

despejar la variable t^2, quedando $t^2 = \frac{2x}{a} = \frac{2}{a}x$, comparando esta última expresión

con el modelo matemático obtenido en el inciso anterior se puede concluir que $m = \frac{2}{a}$,

entonces $a = 2/m = \frac{2}{0.1686\left[\frac{s^2}{m}\right]} = 11.8624\left[\frac{m}{s^2}\right]$, por lo tanto $g = 11.8624\left[\frac{m}{s^2}\right]$;

como la aceleración es constante, la gráfica solicitada es

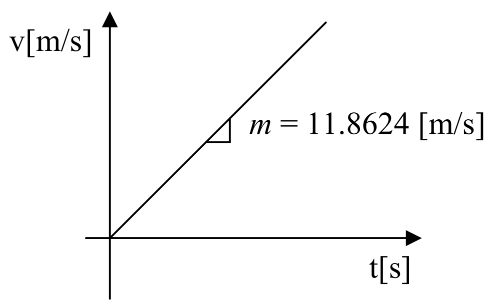


c) Sabemos que la rapidez viene dada por $v = \frac{dx}{dt}$, por lo tanto del modelo matemático obtenido el primer inciso se despeja la variable “x” y posteriormente se deriva con respecto a “t”, es decir

$$v(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{z-b}{m}\right] = \frac{d}{dt}\left[\frac{t^2}{m} - \frac{b}{m}\right] = \frac{2}{m}t = \frac{2}{0.1686\left[\frac{s^2}{m}\right]}t \text{ , de donde}$$

$$v(t)\left[\frac{m}{s}\right] = 11.7994\left[\frac{m}{s^2}\right]t[s] \text{ ;}$$

con el modelo obtenido, es decir v (t) se puede obtener la gráfica de la rapidez en función del tiempo, es decir



d) La energía cinética se calcula como $EC = \frac{1}{2}mv^2$, por lo tanto es necesario conocer la rapidez del móvil en este instante. El instante en el que ha recorrido ½ [m] lo podemos obtener a partir del modelo matemático del primer inciso de este ejercicio, es decir

$t^2 = 0.1686x + 0.0015$,

$$t^2 = \left(0.1686\left[\frac{s^2}{m}\right]\right)\cdot\left(1/2[m]\right) + 0.0015\left[s^2\right],$$

$$t = \sqrt{0.0858\left[s^2\right]} = 0.2929[s];$$

a partir del modelo matemático obtenido en el inciso c, tenemos

$$v = \left(11.8624\left[\frac{m}{s}\right]\right)\cdot\left(0.2929[s]\right) = 3.4745\left[\frac{m}{s}\right] \text{ , entonces la energía cinética es}$$

$$EC = \frac{1}{2}\left(0.225[kg]\right)\cdot\left(3.4745\left[\frac{m}{s}\right]\right)^2 = 1.3581[J].$$

3. Se realizó un experimento dejando rodar varios balines esféricos de diferente masa desde el reposo, con $x_0 = 0$ [m] y $t_0 = 0$ [s], a lo largo de un plano inclinado de 1 [m] de longitud y sin fricción. Se midió la magnitud de la fuerza que impulsaba a cada uno de los móviles durante su recorrido y se obtuvo la tabla que se muestra. Determine, en el SI:

a) El modelo matemático lineal que relaciona a la fuerza (F) en función de la masa de los balines (m), es decir F = f (m).

b) La aceleración de los balines durante el movimiento.

c) La rapidez de los móviles al llegar al final del plano si se sabe que empleaban 0.64 [s] en recorrer el plano inclinado.

m [g]	F [N]
50	0.26
150	0.75

Resolución:

a) El modelo matemático tendrá la forma F = m m + b; cuya pendiente es $m = \dfrac{\Delta F}{\Delta m}$;

a partir de la tabla podemos calcular la pendiente, que será:

$$m = \frac{(0.75 - 0.26)[\mathrm{N}]}{(150 - 50)10^{-3}[\mathrm{kg}]} = \frac{0.49}{0.1}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\right]; \qquad m = 4.9\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\right];$$

para determinar el valor de la ordenada al origen podemos despejar "b" del modelo matemático:

b = F − m m; sustituyendo en esta última expresión la pendiente y un punto de la tabla, tenemos

$$b = (0.26[\mathrm{N}]) - \left(4.9\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\right]\right)\cdot(0.05[\mathrm{kg}]) = 0.015[\mathrm{N}],$$

por lo tanto el modelo matemático es $\quad F[\mathrm{N}] = 4.9\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}}\right]m[\mathrm{kg}] + 0.015[\mathrm{N}]$.

b) La segunda ley de Newton se puede escribir como $\vec{F} = m\vec{a}$, si comparamos esta última expresión con el modelo matemático del inciso anterior, podemos concluir que la pendiente es

m = a, entonces la aceleración de los balines es $a = 4.9\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$.

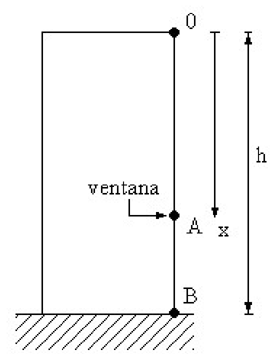
c) Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, por lo tanto la rapidez de los móviles en función del tiempo se puede calcular con la expresión $v = a\,t + v_0$, como parten del reposo, entonces $v_0 = 0$ [m/s], por lo tanto, la rapidez de los móviles se puede determinar como

$v = a\,t$, es decir, $v = \left(4.9\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]\right)\cdot(0.64[\mathrm{s}]) = 3.136\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$.

4. Una piedra que cae, partiendo del reposo, de la azotea de un edificio pasa por una ventana de dimensiones despreciables con una rapidez de 29.34 [m/s]. Un segundo después de que esto ocurrió, la piedra golpea al piso. Si la aceleración gravitatoria del lugar es 9.78 [m/s^2], determine:

a) El lapso que tarda la piedra en caer desde la azotea hasta el centro de la ventana.
b) La altura del edificio.
c) La altura, con respecto al piso, a la que está el centro de la ventana.

Resolución:



a) Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, como parte del reposo

$$v_o = 0\left[\frac{m}{s}\right],$$

en este movimiento de caída libre, la aceleración del móvil es igual a la aceleración gravitatoria, por lo tanto a = g. De acuerdo con la información proporcionada el tiempo que le emplea del punto A al punto B es $\Delta t_{AB} = 1$ [s]; la rapidez en función del tiempo está dada por $v = a\,t + v_0$, pero $v_0 = 0$ [m/s], por lo tanto $v = a\,t$.

Entonces, en el punto A tenemos que $v_A = a\,t_A$, es decir

$$t_A = \frac{v_A}{a} = \frac{v_A}{g} = \frac{29.34\left[\frac{m}{s}\right]}{9.78\left[\frac{m}{s^2}\right]} = 3[s].$$

b) Para calcular la altura del edificio, es decir h, calcularemos primero el tiempo que emplea el móvil en recorrer la distancia h, esto es, el tiempo que tarda en recorrer la distancia de O a B:

$${}_0\Delta t_B = {}_0\Delta t_A + {}_A\Delta t_B = (3[s]) + (1[s]) = 4[s],$$

para este movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, tenemos que

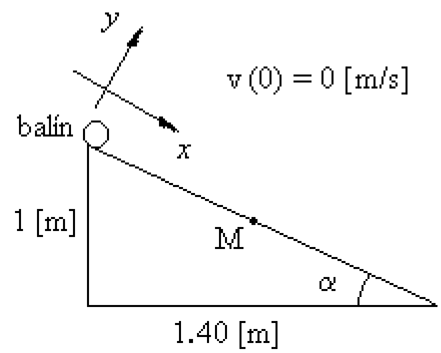
$h = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h_0$, pero $v_0 = 0$ [m/s], $h_0 = 0$ [m], por lo tanto $h = \frac{1}{2}g\,t_B^2$; entonces

$$h = \frac{1}{2}\left(9.78\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)\cdot(4[s])^2 = 78.24[m].$$

c) Como, en este movimiento el desplazamiento está dado por $x = \frac{1}{2}g\,t^2$, entonces en el punto A tenemos que $x_A = \frac{1}{2}g\,t_A^2$, por lo tanto

$$x_A = \frac{1}{2}\left(9.78\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)\cdot(3[s])^2 = 44.01[m]$$; de esta manera la altura del punto A, con respecto al piso será: $h_A = h - x_A = (78.24\ [m]) - (44.01\ [m]) = 31.23\ [m]$.

5. En el laboratorio de Física Experimental se soltó un balín en un plano inclinado, desde la posición mostrada en la figura. Considere que la aceleración gravitatoria del lugar es 9.78 $[m\cdot s^{-2}]$ y que la fricción entre el móvil y el plano inclinado es despreciable. Determine, cuando el balín está a la mitad del plano inclinado (punto M), en el SI:



a) El vector aceleración del balín.
b) El tiempo en el cual el móvil llega a ese punto.
c) El vector velocidad de la partícula móvil.

Resolución:

a) Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, en el que la aceleración es constante y como el móvil se desplaza a lo largo de un plano inclinado, dicha aceleración está dada por

$a = g\ \text{sen}\alpha$; entones $\alpha = \text{ang}\tan\frac{1}{1.4} = 35.5377°$, por lo tanto el módulo del vector aceleración es $a = \left(9.78\frac{m}{s^2}\right)\cdot\text{sen}(35.5377°) = 5.6845$,

en el diagrama se observa que el vector aceleración es paralelo al eje de las abscisas y va en dirección positiva, por lo tanto $\vec{a} = 5.6845\ \hat{i}\left[\frac{m}{s^2}\right]$.

b) Para determinar el tiempo que tarda el móvil en llegar a ese punto, determinaremos primero la longitud del plano inclinado, es decir, la longitud de la hipotenusa del triángulo rectángulo de la figura:

$L = \sqrt{(1\,m)^2 + (1.4\,m)^2} = 1.7205[m]$; como el punto M está a la mitad de la hipotenusa, la distancia que ha recorrido el móvil es $x = \frac{1}{2}L = 0.8602[m]$,

como el móvil parte del reposo y $x_0 = 0$ [m], la distancia recorrida por el balín está dada por

$$x = \frac{1}{2}at^2\text{, entonces } t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{(2)(0.8602\text{m})}{5.6845\left[{}^{\text{m}}/_{\text{s}^2}\right]}} = 0.5501[\text{s}].$$

c) Para un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, si el móvil parte del reposo, la rapidez está dada por v = a t,

por lo tanto $v = \left(5.6845\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)(0.5501[s]) = 3.1273\left[\frac{m}{s}\right]$,

de acuerdo con la figura, el vector velocidad es paralelo al eje "x" y va en sentido positivo,

por lo tanto la velocidad del balín en este punto es $\vec{v} = 3.1273\ \hat{i}\left[\frac{m}{s}\right]$.

6. En un plano inclinado se dejó rodar desde $t_0 = 0$ [s], sin fricción ni deslizamiento, una partícula. Se midió la rapidez (v) que llevaba en varios instantes (t) y se obtuvo la tabla que se muestra. Sabiendo que el ángulo que formaba el plano inclinado con respecto a la horizontal es γ, determine la aceleración gravitatoria experimental, en términos exclusivamente de γ.

tiempo (t) [s]	0.2	0.3
rapidez (v) [m/s]	1.34	1.76

Resolución:

a) Se trata de un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado: a = constante, como parte del reposo la rapidez del móvil está dada por v = a t, esta última expresión es la ecuación de una línea recta cuya pendiente es la aceleración, por lo tanto *m* = a, cuya pendiente es $m = \frac{\Delta v}{\Delta t}$;

de acuerdo con los datos de la tabla, la pendiente se puede calcular como

$$m = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}\text{, entonces } m = \frac{(1.76 - 1.34)\left[\frac{m}{s}\right]}{(0.3 - 0.2)[s]} = \frac{0.42\left[\frac{m}{s}\right]}{0.1[s]} = 4.2\left[\frac{m}{s^2}\right],$$

sabemos que en este plano inclinado, la aceleración del móvil se relaciona con la aceleración gravitatoria del lugar según la expresión a = g sen γ,

por lo tanto, $g = \frac{a}{\text{sen}\gamma} = a\csc\gamma = \left(4.2\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)\csc\gamma$; entonces

$$g(\gamma) = 4.2\csc\gamma\left[\frac{m}{s^2}\right].$$

Mecánica clásica

Ejercicios propuestos

1. El movimiento de un cuerpo que cae, partiendo del reposo, en un medio resistente, se expresa por la ecuación:

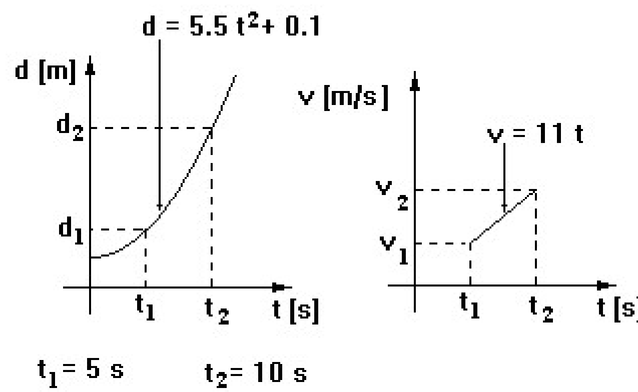
$$\frac{dv}{dt} = A - B\,v$$

donde A y B son constantes. Con base en ello, determine:

a) La aceleración inicial, en términos de A y B.
b) La rapidez, en términos de A y B, en la cual la aceleración es nula, es decir la rapidez final.

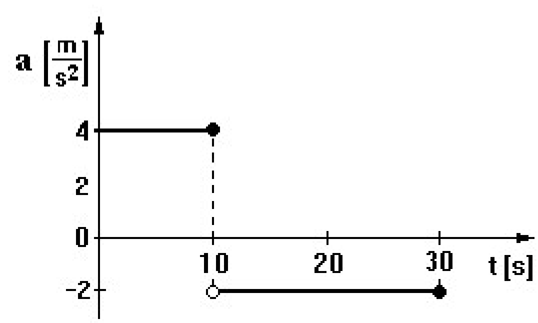
2. De acuerdo con los modelos gráficos que se muestran y que representan el movimiento de un cuerpo, determine:

a) El tipo de movimiento del cuerpo.
b) La aceleración del cuerpo para el tiempo t_1.
c) La rapidez inicial del cuerpo.
d) El desplazamiento inicial del cuerpo.



3. Un automóvil parte del reposo la gráfica de su aceleración en función del tiempo es la que se muestra. Con base en ello, determine:

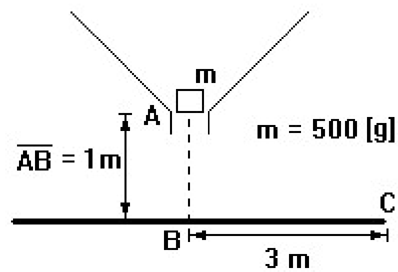
a) La rapidez del móvil a los 10 s.
b) La rapidez del móvil a los 30 s.
c) Dibuje la gráfica de la velocidad del móvil en función del tiempo.
d) Si la masa del móvil fuese de 910 kg, calcule su energía cinética a los 20 s.



4. En un proceso industrial un cuerpo móvil se deja caer, partiendo del reposo en el punto A a la salida de una tolva, hasta el punto B donde cae a una banda transportadora que se desplaza con velocidad constante de 2 m/s para finalmente llegar al punto C, como se muestra en la figura. Se realizaron las mediciones de distancias (d) y tiempos (t), para la caída del cuerpo, que se muestran en la tabla. Con base en ello, determine:

a) El modelo matemático que relaciona las variables distancia y tiempo en el movimiento del cuerpo durante la caída.
b) El tiempo total que tarda el cuerpo móvil para trasladarse del punto A al C.
c) La distancia $\overline{AB}$ si se requiere que el tiempo total que emplee el móvil para llegar al punto C, partiendo de A, sea de 2 segundos.
d) La energía potencial que tiene el cuerpo en el punto A, en la altura original, si se toma como referencia el nivel de la banda transportadora.

d [m]	t [s]
0.8	0.4040
0.6	0.3503
0.2	0.2023
0.0	0.0



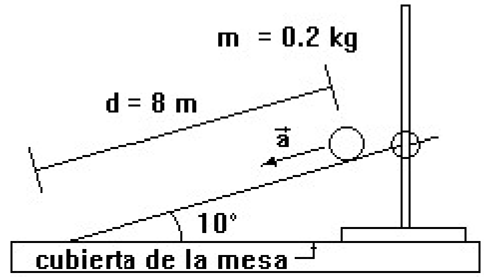
5. Una partícula alfa viaja, siguiendo una trayectoria recta, a lo largo de un tubo hueco de 2 [m] de longitud que forma parte de un acelerador de partículas. Considerando que la partícula entra al tubo con una rapidez de 1×10^4 [m/s] y sale con 4×10^6 [m/s] debido a un movimiento uniformemente acelerado, determine en el SI:

a) La aceleración de la partícula.
b) El tiempo que estuvo en el tubo.
c) El tiempo que tarda la partícula en recorrer la primera mitad del tubo.

6. En el dispositivo experimental que se muestra en la figura, un carrete rueda libremente sin fricción ni deslizamiento. La tabla sintetiza el promedio de las lecturas de tiempo, medidas en dicho dispositivo, para las distancias recorridas. Con base en estos datos, obtenga:

d [m]	1.0	2.0	3.0	4.0	5.0	6.0	7.0	8.0
t [s]	1.09	1.53	1.88	2.17	2.43	2.66	2.87	3.07

a) La aceleración del carrete.
b) La rapidez del carrete para un tiempo t=2.0 s.
c) La energía cinética en t=2.0 s.
d) La energía potencial en t= 2.0 s, si la referencia de valor nulo para esta energía es la cubierta de la mesa.



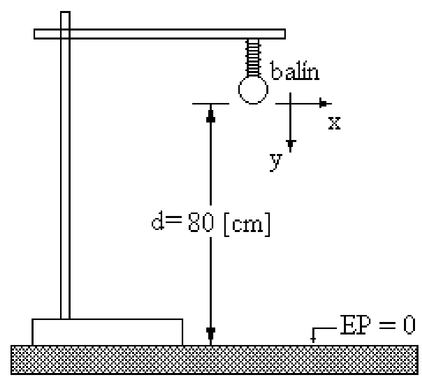
Para t = 0 [s]: v = 0 [m/s] y d = 0 [m].

7. Se realizó un experimento del fenómeno de caída libre y se midió la rapidez que tenía el móvil para cada valor de tiempo, según se muestra en la tabla. Si el dispositivo experimental utilizado y el sistema de referencia son los que se muestran en la figura, determine:

a) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables involucradas, es decir v = f (t).
   Con el modelo matemático del inciso anterior, obtenga:
b) La aceleración del balín.
c) El desplazamiento "y" para un tiempo t = 0.25 [s].
d) La energía cinética para un tiempo t = 0.10 [s].
e) La energía potencial gravitatoria para un tiempo t = 0.30 [s].

En t = 0 [s]: y_o = 0 [m], v_o = 0 [m/s];

$m_{balín}$ = 130 [g].

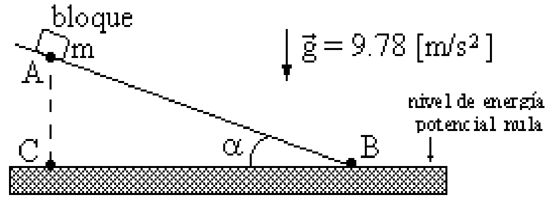


t [s]	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40
v [m/s]	1.46	1.95	2.44	2.93	3.42	3.91

8. Un bloque pequeño de 50 [kg], se desliza partiendo del reposo sobre un plano inclinado metálico y sin fricción. Se realizaron mediciones de la variable independiente, el desplazamiento, del bloque, a partir del punto A, y los lapsos en que se efectuó cada recorrido; estos datos se presentan en la tabla siguiente:

d[m]	2	4	6	8
$\bar{t}$ [s]	1.26	1.78	2.18	2.51

$\overline{AB} = 12$ [m], $\alpha = \frac{\pi}{12}$ [rad].



Si se tomó que $t_o = 0$ [s], de acuerdo con los datos experimentales y los de la figura, determine:

a) La ecuación que relaciona el tiempo con el desplazamiento del bloque.
b) El tiempo empleado por el bloque para recorrer la distancia $\overline{AB}$.
c) La energía cinética máxima que adquiere el bloque e indicar en qué punto de su recorrido ocurre.
d) La energía potencial gravitatoria máxima que adquiere el bloque e indicar en qué punto de su recorrido ocurre.
e) El valor de la aceleración del bloque cuando éste ha recorrido una distancia d= $\overline{AB}/2$.

9. En un experimento de caída libre, un alumno soltó un objeto de masa m = 150 [g], desde diferentes alturas y midió la distancia (S) que recorría el objeto así como el tiempo (t) correspondiente. Las mediciones se muestran en la tabla. Con base en ello, determine:

a) La aceleración gravitatoria del lugar.
b) El modelo matemático lineal que relaciona a s con t. Considere en el eje de las ordenadas a la variable s.
c) El tiempo que tardaría el móvil en recorrer una distancia de 2 [m], a partir del modelo anterior.
d) La rapidez del objeto en el instante en que ha recorrido una distancia de 50 [cm].
e) La energía cinética que tiene el móvil en el instante del inciso anterior.
f) El porcentaje de error que se tiene en la aceleración gravitatoria del lugar calculada en el inciso a, si el valor teórico de g es 9.78 [m/s^2].

s [dm]	0	2	4	6	8
t [cs]	0	20.2	28.6	35	40.4

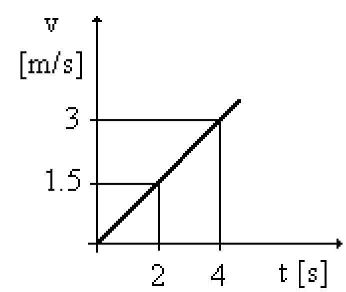
10. Se desea analizar un movimiento rectilíneo, para tal fin se hizo descender un móvil. cuya masa era 900 [g] por una rampa recta y larga con una pendiente constante. La rampa formaba un ángulo de 30° con respecto a la horizontal. Se midieron los tiempos en que el móvil alcanzaba diferentes valores de rapidez; los datos obtenidos del experimento se anotaron en la tabla. Determine, en el SI:

a) El modelo matemático experimental que relaciona a las variables rapidez (v) y tiempo (t).
b) La rapidez inicial del móvil así como su energía cinética en ese instante.
c) El modelo matemático experimental que relaciona las variables distancia (x) y tiempo (t). Considere que en t = 0, x = 0.
d) El significado físico de la pendiente del modelo matemático del primer inciso, así como su expresión dimensional.
e) La aceleración gravitatoria experimental del lugar y la magnitud del peso del móvil.

v [m/s]	t [s]
14.9	2
21.1	3
24.8	4
30	5

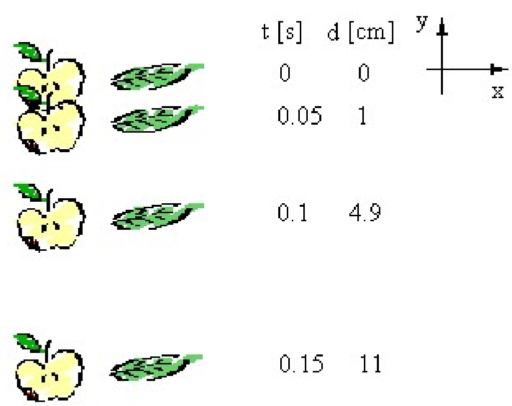
11. En $t_0 = 0$ [s], a un cuerpo pequeño de masa m, originalmente en reposo y ubicado en el origen del sistema de referencia se le aplica una fuerza de 3.1875 [N]. Sabiendo que el cuerpo se desplaza a lo largo de un plano inclinado que forma un ángulo α con respecto a la horizontal y que su rapidez varía como se indica en la gráfica, determine:

a) El tipo de movimiento, justifique su respuesta.
b) La masa del cuerpo.
c) La distancia que ha recorrido el cuerpo al cabo de 2.5 [s].



12. En la figura se muestra una pluma, de masa despreciable, y una manzana cuya masa es 150 [g]. Ambas están dentro de una cámara de vacío y al ser soltadas desde el reposo y a la misma altura caen al mismo tiempo. En la figura se indican los valores de tiempo y distancias recorridas que se midieron durante sus caídas.

a) Obtenga, en el SI, el modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento, considere que la variable independiente fue el tiempo.
A partir del modelo obtenido, determine en el SI:
b) El significado físico de su pendiente, así como su expresión dimensional.
c) La distancia recorrida por la manzana para un tiempo t = 0.7 [s].
d) El vector velocidad de la manzana en el instante anterior.



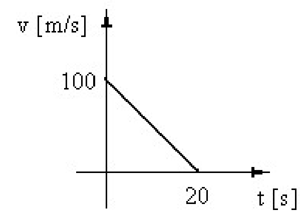
13. La posición de una partícula se determina de acuerdo con la ecuación:
$r(t) = 4 + 6t^2 - t^3$,
donde r está en metros y t en segundos. Con base en ello, determine, en el SI:

a) La posición inicial y la posición del móvil en t = 3 [s].
b) La rapidez, en función del tiempo, de la partícula.
c) La aceleración del móvil para t = 1 [s].

14. Con la ayuda de un dispositivo fotosensible se midió la rapidez de una partícula que parte del reposo, siguiendo una trayectoria rectilínea a lo largo de un plano inclinado que forma un ángulo ϕ con respecto a la horizontal. Parte de las mediciones se muestran en la tabla siguiente, si la aceleración gravitatoria del lugar es $g = 9.78$ [m/s^2] determine, en el SI, el valor del ángulo ϕ.

t [cs]	10	25
v [m/s]	0.9	1.5

15. La gráfica muestra la rapidez de una partícula de 80 [g], con movimiento rectilíneo, en función del tiempo. Si $t_0 = 0$ [s] y $x_0 = 0$ [m], determine para la partícula:



a) Su rapidez en el instante t = 5 [s].
b) Su aceleración en el instante t = 10 [s].
c) Su posición en el instante t = 4 [s].

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. a) $a_0 = A$
   b) $v_f = A/B$

2. a) Movimiento uniformemente acelerado
   b) $a = 11$ [m/s^2]
   c) $v_0 = 0$
   d) $d_0 = 0.1$ [m]

3. a) $v = 40$ [m/s]
   b) $v = 0$ [m/s]
   d) EC = 182 [kJ]

4. a) d [m] = 4.8995 [m/s^2] t^2 [s^2]
   b) $t = 1.9518$ [s]
   c) $\overline{AB} = 1.2245$ [m]
   d) EP = 4.898 [J]

5. a) $a = 3.99 \times 10^{12}$ [m/s^2]
   b) $t = 1$ [μs]
   c) $\Delta t = 0.7055$ [μs]

6. a) $a = 1.6976$ [m/s^2]
   b) $v = 3.3952$ [m/s]
   c) EC = 1.1527 [J]
   d) EP = 1.5648 [J]

7. a) v [m/s] = 9.8 [m/s^2] t [s] – 0.01 [m/s]
   b) $a = 9.8$ [m/s^2]
   c) $y = 0.3038$ [m]
   d) EC = 0.0612 [J]
   e) EP = 0.4612 [J]

8. a) t^2 [s^2] = 0.7861 [s^2/m] d [m] + 0.0218 [s^2]
   b) $t = 3.0749$ [s]
   c) EC = 1530.0527 [J], ocurre en B, (obtenida a partir del modelo matemático experimental)
   d) EP = 1518.7502 [J], ocurre en A
   e) $a = 2.5442$ [m/s^2] (es constante)

9. a) $a = 9.8016$ [m/s^2]
   b) s [m] = 4.9008 [m/s^2] t^2 [s^2] – 0.0002 [m]
   c) $t = 0.6389$ [s]
   d) $v = 3.1314$ [m/s]
   e) EC = 0.7354 [J]

f) %e = 0.2209%

10. a) v [m/s] = 4.9 [m/s^2] t [s] + 5.55 [m/s]
    b) v = 5.55 [m/s]; EC = 13.8611 [J]
    c) x [m] = 2.45 [m/s^2] t^2 [s^2] + 5.55 [m/s] t [s]
    d) m = a; dim(m) = L T $^{-2}$
    e) g = 9.8 [m/s^2]; W = 8.82 [N]

11. a) a = 0.75 [m/s^2] (constante); M.U.A.
    b) m = 4.25 [kg]
    c) d = 2.3438 [m]

12. a) d [m] = 4.9347 [m/s^2] z [s^2]
    b) m = ½ g; dim (m) = L T $^{-2}$
    c) d = 2.418 [m]
    d) $\vec{v} = -\,6.9086\ \hat{j}$ [m/s]

13. a) r_0 = 4 [m], r (3) = 31 [m]
    b) v (t) [m/s] = 12 [m/s^2] t [s] – 3 [m/s^3] t^2 [s^2]
    c) 6 [m/s^2]

14. a) ϕ = 0.4214 [rad]

15. a) v (5) = 75 [m/s]
    b) a (10) = – 5 [m/s^2]
    c) x (4) = 360 [m]

Mecánica de fluidos

Ejercicios resueltos

1. En un experimento de hidrostática se midió la masa (m) de un recipiente de vidrio que contenía un determinado volumen (V) de un líquido, con una balanza perfectamente calibrada y se obtuvo la tabla que se muestra. Sabiendo que la aceleración gravitatoria del lugar es 9.78 [m/s^2], determine, en el SI:

a) El modelo matemático lineal de la masa medida en función del volumen del líquido, es decir m = f (V).

b) La masa del recipiente y la masa que tendrían 25 [$m\ell$] del líquido.

c) La presión manométrica a 2 [cm] de profundidad, dentro del líquido.

V [$m\ell$]	m [kg]
20	0.0936
30	0.1004

1 [$m\ell$] = 1 [cm^3]

$\rho_{agua} = 10^3$ [$kg \cdot m^{-3}$]

Resolución:

a) Como el modelo matemático debe estar en el SI, primero convertiremos los valores de volumen en [$m\ell$] a valores en [m^3], esto es

V [m^3]	m [kg]
0.00002	0.0936
0.00003	0.1004

El modelo matemático solicitado tiene la forma m = *m* V + b, cuya pendiente es $m = \frac{\Delta m}{\Delta V}$,

$$m = \frac{(0.1004 - 0.0936)[\mathrm{kg}]}{(0.00003 - 0.00002)[\mathrm{m}^3]} = 680\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3};$$

para calcular la ordenada al origen, podemos considerar una pareja ordenada, es decir

$$b = m_1 - m\,V_1 = 0.0936[\mathrm{kg}] - \left(680\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]\right)\cdot\left(0.00002\left[\mathrm{m}^3\right]\right) = 0.08[\mathrm{kg}];$$

entonces el modelo matemático es $\mathrm{m}[\mathrm{kg}] = 680\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]\mathrm{V}\left[\mathrm{m}^3\right] + 0.08[\mathrm{kg}]$.

b) Si el volumen de la sustancia es cero, entonces la masa que registra la balanza es la del recipiente, por lo tanto, de acuerdo con el modelo matemático del inciso anterior podemos decir que b = $m_{recipiente}$, es decir $m_{recipiente}$ = 0.08 [kg]; por otra parte, sabemos que la densidad se puede calcular con el cociente $\rho = \frac{m}{V}$, de donde la masa estaría dada por m = ρ V. Si comparamos esta última expresión con el modelo matemático del inciso anterior, tenemos que $m = \rho_{líquido}$, entonces

$m = \rho_{líquido}\, V$; $m = \left(680\left[\frac{kg}{m^3}\right]\right)\cdot\left(0.000025\left[m^3\right]\right) = 0.017\left[kg\right]$.

c) La presión manométrica la podemos calcular como
$P_{man} = = \rho_{líquido}\, g\, z$; entonces
$P_{man} = \left(680\left[\frac{kg}{m^3}\right]\right)\cdot\left(9.78\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)\left(0.02\left[m\right]\right) = 133.008\left[Pa\right]$.

2. Dentro de un tanque rígido y cerrado a la atmósfera hay dos fluidos: un líquido desconocido y aire a una cierta presión. Para tratar de identificar dicho líquido se efectuaron mediciones de presión relativa (P_r) dentro del líquido, a diferentes profundidades (z). Los resultados se muestran en la tabla, si la presión relativa se midió con respecto al aire que rodea al tanque, obtenga en el SI:

P_r [Pa]	z [cm]
−146.25	4
20.00	6
186.25	8

a) El modelo matemático que relaciona a la presión relativa P_r con la profundidad z. Utilice el método de mínimos cuadrados.
b) La presión absoluta del aire contenido en el tanque si la presión atmosférica del lugar es 100 [kPa].

Resolución:

a) El modelo matemático solicitado tiene la forma $P_r = m\, z + b$, cuya pendiente es
$m = \frac{\Delta P_r}{\Delta z}$;
elaboraremos una tabla donde estén las sumas necesarias para emplear las expresiones del método de mínimos cuadrados:

P_r [Pa]	z[m]	Pr · z [Pa · m]	z^2 [m^2]
-146.25	0.04	5.85	0.0016
220	0.06	1.2	0.0036
186.25	0.08	14.9	0.0064
$\sum P_r = 60$	$\sum z = 0.18$	$\sum P_r\ z = 10.25$	$\sum z^2 = 0.0116$

como el número de lecturas es de tres, entonces n = 3; calculando la pendiente con las expresiones que aparecen en el apéndice de este Cuaderno de Ejercicios tenemos

$m = \dfrac{(3)\cdot(10.25)-(0.18)\cdot(60)}{(3)\cdot(0.0116)-(0.08)^2} = 8312.5\left[\dfrac{\text{Pa}}{\text{m}}\right]$ y la ordenada al origen es

$$b = \frac{(60)\cdot(0.0116)-(10.25)\cdot(0.18)}{(3)\cdot(0.0116)-(0.08)^2} = -478.75\,[\text{Pa}],$$

entonces el modelo matemático es $P_r[\text{Pa}] = 8312.5\left[\dfrac{\text{Pa}}{\text{m}}\right]\cdot z[\text{m}] - 478.75[\text{Pa}]$.

b) La presión relativa del aire contenido en el tanque se puede obtener con el modelo matemático anterior, es decir, es la presión del líquido en su superficie, por lo tanto la ordenada al origen representa la presión relativa del aire:

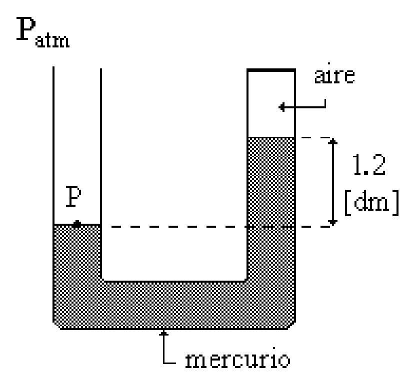
$P_r[\text{Pa}] = 8312.5\left[\dfrac{\text{Pa}}{\text{m}}\right]\cdot(0\,[\text{m}]) - 478.75[\text{Pa}] = -\,478.75$ [Pa], como b < 0 la presión del aire es una presión manométrica negativa o una presión vacuométrica, entonces $P_{abs} = P_{atm} - P_{vac}$, por lo tanto $P_{abs\,aire} = (100\,000[\text{Pa}]) - (478.75[\text{Pa}]) = 99\,521.25[\text{Pa}]$.

3. En un tubo en forma de U, se tienen varios fluidos; el extremo de la izquierda está abierto a la atmósfera y el de la derecha está cerrado. Sabiendo que el líquido contenido en el tubo es mercurio, determine en el SI:

a) La presión absoluta y la presión manométrica en el punto P.

b) La presión manométrica del aire contenido en el extremo derecho del tubo en U.

P_{atm} = 58 [cm de Hg]; g = 9.78 [$m\cdot s^{-2}$];
$\rho_{agua} = 10^3$ [kg/m^3]; δ_{Hg} = 13.595 [1]



Resolución:

a) Como el punto P está sobre la superficie del líquido y ese extremo del tubo está abierto a la atmósfera, entonces $P_{man\,p} = 0[Pa]$

y la presión absoluta es la presión atmosférica, es decir $P_{abs\,p} = P_{atm}$; por lo tanto

$P_{atm} = \rho_{Hg}\, g\, h_{Hg}$, en términos de la presión relativa del mercurio tenemos $P_{atm} = \delta_{Hg}\, \rho_{agua}\, g\, h_{Hg}$,

$$P_{atm} = (13.595)\cdot\left(10^3\left[\frac{kg}{m^3}\right]\right)\cdot\left(9.78\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)\cdot(0.58[m]) = 77116.28[Pa] ,$$

$P_{abs\,p} = 77116.28[Pa]$.

b) Llamaremos punto "a" al punto que está sobre la superficie del líquido en el extremo derecho del tubo, aplicando la ecuación de gradiente de presión entre los puntos "P" y "a" tenemos

$P_p - P_a = -\rho_{Hg} g(z_p - z_a)$, de esta última expresión despejamos la presión en "a":

$P_a = P_p + \rho_{Hg}(z_p - z_a)$, en términos de la presión relativa del mercurio, tenemos

$P_a = P_p + \delta_{Hg}\rho_{agua} g(z_p - z_a)$, entonces la presión manométrica del punto "a" será

$$P_a = (0[Pa]) + (13.595)\cdot\left(10^3\left[\frac{kg}{m^3}\right]\right)\cdot\left(9.78\left[\frac{m}{s^2}\right]\right)\cdot(0 - 0.12)[m] ,$$

$P_{man\,a} = -15955.09[Pa]$.

4. Se realizaron dos experimentos en un laboratorio, en el cual la aceleración gravitatoria es 9.79 [m/s^2], con cierto líquido. En el primer experimento se determinó la relación existente entre masa y volumen del líquido, y se obtuvo el modelo matemático siguiente:

$$m\,[kg] = 720\,[kg/m^3]\,V\,[m^3] + 0.5\,[kg].$$

Posteriormente se colocó 1 [kg] de dicha sustancia en un recipiente cilíndrico de 10 [cm] de diámetro y se realizó el segundo experimento, midiendo la presión manométrica (P_{man}) en función de la profundidad (z). Considerando que la densidad del agua es 10^3 [kg/m^3] y la del mercurio es 13 600 [kg/m^3], determine:

a) La densidad relativa y la magnitud del vector peso específico del líquido utilizado en el experimento.

b) El modelo matemático experimental que relaciona a la presión manométrica en función de la profundidad sabiendo que la ordenada al origen de este modelo es 16 [Pa].

c) El volumen total del líquido en el recipiente, en litros.

d) La presión absoluta en el fondo del recipiente, sabiendo que la presión atmosférica del lugar es 68 [cm de Hg].

Resolución:

a) El modelo matemático proporcionado tiene la forma m = *m* V + b, sabemos que la densidad del líquido está dada por $\rho_L = \dfrac{m}{V}$, de donde la masa es m = ρ_L V, entonces si comparamos esta última expresión con el modelo matemático tenemos que la pendiente de dicho modelo es la densidad del líquido, por lo tanto $\rho_L = 750\left[\dfrac{kg}{m^3}\right]$;

por lo tanto la densidad relativa del líquido es $\delta_L = \dfrac{\rho_L}{\rho_A} = \dfrac{720\left[\dfrac{kg}{m^3}\right]}{10^3\left[\dfrac{kg}{m^3}\right]} = 0.72[1]$,

con la densidad podemos calcular el módulo del vector peso específico, es decir

$$\gamma = \rho g = \left(720\left[\frac{kg}{m^3}\right]\right)\cdot\left(9.79\left[\frac{m}{s^2}\right]\right) = 7048.8\left[\frac{N}{m^3}\right].$$

b) Este modelo matemático tiene la forma P_{man} = *m* z + b, cuya pendiente es el módulo del vector peso específico, es decir *m* = γ, entonces

$P_{man} = 7078.8\left[\dfrac{N}{m^3}\right]\cdot z[m] + b[Pa]$, como b =16 [Pa],

el modelo matemático es

$$P_{man}[Pa] = \left(7048.8\left[\frac{Pa}{m}\right]\right)\cdot z[m] + (16\ [Pa]) .$$

c) La densidad del líquido es $\rho_L = \dfrac{m_L}{V_L}$; despejando el volumen tenemos $V_L = \dfrac{m_L}{\rho_L}$,

por lo tanto $V_L = \dfrac{1[kg]}{720[kg/m^3]} = 1.3889\times10^{-3}\,m^3\left(\dfrac{10^3\ dm^3}{1\ m^3}\right) = 1.3889[dm^3]$,

como 1 [dm^3] = 1 [ℓ], entonces $V_L = 1.3889[\ell]$.

d) La presión absoluta se puede calcular como $P_{abs} = P_{man} + P_{atm}$, por lo tanto será necesario calcular la presión atmosférica en [Pa] con ayuda de la altura barométrica proporcionada

$$P_{atm} = \rho_{Hg}\ g\,h_{bar} = \left(13600\left[\frac{kg}{m^3}\right]\right)\cdot\left(9.79\left[\frac{m}{s}\right]\right)(0.68[m]) = 90567.92[Pa] ,$$

la altura que ocupa el líquido se puede calcular con el volumen del mismo, es decir

$V_L = \pi\, r^2\, z = ¼\, \pi\, d^2\, z$, de esta expresión despejaremos la altura z:

$$z = \frac{4\,V_L}{\pi\, d^2} = \frac{4\left(1.3889\times 10^{-3}\left[m^3\right]\right)}{\pi\left(0.1[m]\right)^2} = 0.1768[m],$$

sustituyendo este valor en el modelo matemático obtenido en el inciso anterior tenemos que la presión manométrica en el fondo del recipiente es

$$P_{man\ f} = \left(7\,048.8\left[\frac{Pa}{m}\right]\right)\cdot\left(0.1768[m]\right) + \left(16\ [Pa]\right) = 1262.2278[Pa]\ ;$$

teniendo la presión manométrica, podemos calcular la presión absoluta, es decir

$$P_{abs\ f} = \left(1\,262.2278[Pa]\right) + 90\,537.92[Pa] = 91800.15[Pa].$$

5. Dentro de un tanque cilíndrico de 3.2 [m^3], cerrado herméticamente se tienen dos fluidos: uno líquido y uno gaseoso. Se midió la presión absoluta (P) en función de la profundidad (z) dentro del líquido contenido en el tanque y se obtuvo la tabla que se muestra.
Sabiendo que la presión atmosférica del lugar es 77 000 [Pa], que la aceleración gravitatoria es 9.78 [m/s^2] y que la densidad del agua es 10^3[kg/m^3], determine, en el SI:

a) El modelo matemático que relaciona a la presión absoluta en función de la profundidad, es decir P = f(z).
b) La densidad relativa del líquido contenido en el tanque.
c) La presión manométrica del fluido gaseoso que está dentro del tanque.

z [m]	P [kPa]
0.4	151.660
0.6	152.990

Resolución:

a) El modelo matemático tiene la forma P = m z + b, cuya pendiente es $m = \dfrac{\Delta P}{\Delta z}$, por lo tanto la pendiente es $m = \dfrac{\left(152.99 - 151.66\right)10^3[Pa]}{\left(0.6 - 0.4\right)[m]} = \dfrac{1330[Pa]}{0.2[m]} = 6\,647\left[\dfrac{Pa}{m}\right]$, para calcular la ordenada al origen utilizaremos uno de los puntos de la tabla, es decir

$$b = P_2 - m\, z_2 = \left(152.990[Pa]\right) - \left(6\,647\left[\frac{Pa}{m}\right]\right)\cdot\left(0.6[m]\right) = 149\ 001.8[Pa]\ ,$$

entonces el modelo matemático es $P[Pa] = 6\ 647\left[\dfrac{Pa}{m}\right]\cdot z[m] + 149\ 001.8[Pa]$.

b) La pendiente del modelo matemático anterior es el módulo del vector peso específico, es decir

$$m = \left|\, \vec{\gamma} \,\right|, \text{ además } \gamma = \rho g, \text{ por lo tanto } \rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{6\ 647\left[\dfrac{N}{m^3}\right]}{9.78\left[\dfrac{m}{s^2}\right]} = 679.6524\left[\frac{kg}{m^3}\right], \text{ para}$$

calcular la densidad relativa del líquido nos apoyaremos en la densidad del agua, es decir

$$\delta_L = \frac{\rho_L}{\rho_{agua}} = \frac{679.6524\left[\dfrac{kg}{m^3}\right]}{10^3\left[\dfrac{kg}{m^3}\right]}; \quad \delta_L = 0.6797[1].$$

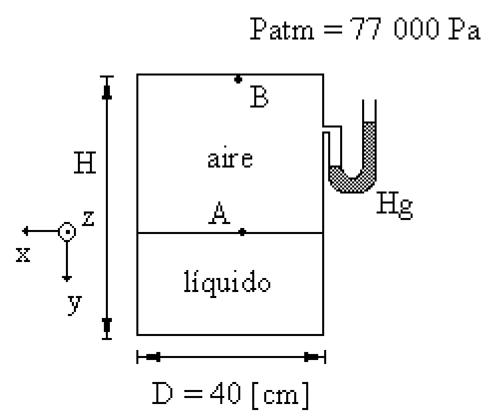
c) La ordenada al origen del modelo matemático del primer inciso representa la presión que se tiene cuando la profundidad es cero, es decir es la presión manométrica del fluido gaseoso, por lo tanto para calcular su presión absoluta tenemos que $P_{abs} = P_{man} + P_{atm}$, entonces P_{man} = (149 001.8 [Pa]) – (77 000 [Pa]) = 72 001.8 [Pa].

6. En la figura se muestra un tanque de forma cilíndrica cuya altura es H y diámetro D, dentro de él se encuentran dos fluidos: un líquido y aire. En la parte superior tiene conectado un manómetro cuyo líquido manométrico es mercurio y su extremo derecho está abierto a la atmósfera. Se realizaron mediciones de presión absoluta (P_{abs}), en función de la profundidad (y) indicada dentro del líquido que está en el tanque y se obtuvo la tabla que se muestra. Determine en el SI:

a) El vector peso específico y la densidad relativa del líquido contenido en el tanque.
b) El modelo matemático lineal P = f (y), la presión absoluta en el punto A y en el punto B.
c) La altura (H) del tanque si se sabe que el volumen que ocupa el aire es 0.12 [m^3] y que la presión absoluta en el fondo del mismo es 105.304 [kPa]; emplee sus resultados experimentales.

y [m]	P_{abs} [kPa]
0	101.3
0.15	102.29
0.3	103.31
0.45	104.29

$\rho_{agua} = 10^3$ [kg/m^3]
$g = 9.78\ \hat{j}$ [m/s^2]



Resolución:

a) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables tendrá la forma $P_{abs} = m\, y + b$; cuya pendiente es $m = \gamma$, además $m = \dfrac{\Delta P_{abs}}{\Delta y}$, por lo tanto con el método de la suma de los cuadrados mínimos: $m =\; = 6\,660$ [Pa/m], $\vec{\gamma} = 6\,660\ \hat{j}$ [N/m^3]; para calcular la densidad relativa se determinará la densidad del líquido, es decir $\delta_L = \rho_L / \rho_a$, $\gamma_L = \rho_L\, g$, entonces $\rho_L = \delta_L / g$; $\delta_L = \delta_L / g\rho_a$, por lo tanto la densidad relativa es

$$\delta_L = \frac{6660\,[\mathrm{N/m^3}]}{\left(9.78\left[\mathrm{m/s^2}\right]\left(10^3\right)[\mathrm{kg/m^3}]\right)} = 0.681\ [1]$$

b) Para determinar el modelo matemático hace falta la ordenada al origen, entonces con el método de la suma de los cuadrados mínimos: b = 101 299 [Pa], por lo que el matemático solicitado es P_{abs} [Pa]=6 660 [Pa/m] y [m] + 101 299 [Pa]; entre el punto A y B existe un fluido gaseoso, por lo que la diferencia de presiones entre sus puntos es despreciable, es decir $P_A = P_B$, por lo tanto
$P_{absA} = P_{absB} = P_{aire} = b$; $P_{absA} = P_{absB} = 101\,299$ [Pa].

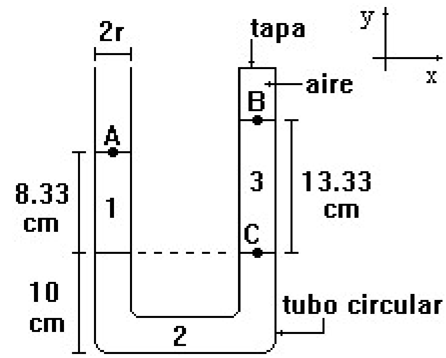
c) La altura del tanque está dada por $H = h_L + h_a$, por otra parte la presión en el fondo del recipiente es $P_f = m\, h_L + b$; de donde podemos despejar la altura del líquido $h_L = (P_f - b) / m$, $h_L = \dfrac{(105304[Pa]) - (101299\,[Pa])}{6\,660\,[Pa/m]} = 0.6014$ [m], sabemos que el volumen que ocupa el aire está dado por $V_a = ¼(\pi\, D^2\, h_a)$; de donde podemos despejar la altura que ocupa este fluido $h_a = \dfrac{4\,V_a}{\pi\, D^2} = \dfrac{4\left(0.12[\mathrm{m^3}]\right)}{\pi\left(0.4[\mathrm{m}]\right)^2} = 0.9549$[m], con las alturas del líquido y del aire podemos calcular la del tanque $H = (0.6014 + 0.9549)[\mathrm{m}] = 1.5563$ [m].

Mecánica de fluidos

Ejercicios propuestos

1. Se tiene un manómetro diferencial que está cerrado en una de sus ramas como lo muestra la figura. Con base en ello, determine:

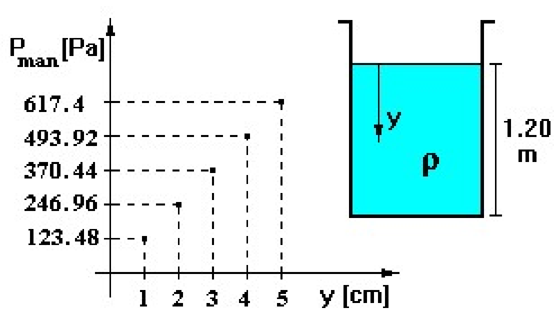
a) La presión absoluta en el punto A.
b) La presión manométrica en el punto B.
c) La presión absoluta en el punto C.
d) La fuerza neta que actúa sobre la tapa del tubo. Considere las presiones inferior y superior en la tapa.



$\rho_1 = 1\ 000\ [kg/m^3]$
$\rho_2 = 2\ 600\ [kg/m^3]$
$\rho_3 = 300\ [kg/m^3]$
$\rho_{Hg} = 13\ 589\ [kg/m^3]$
$P_{atm} = 580$ mm de Hg
$g = 9.78\ [m/s^2]$
$r = 1$ [cm]

2. En cierto laboratorio de física y en un recipiente como el mostrado en la figura se realizaron mediciones de presión manométrica (con referencia a la presión atmosférica) a profundidades diversas; los resultados experimentales se muestran en la gráfica. El recipiente contenía 315 kg de glicerina y ocuparon un volumen de 250 dm^3; pruebas posteriores más amplias permiten afirmar que el modelo matemático obtenido en la gráfica tiene validez hasta el fondo del tanque. Determine:

a) El valor de la densidad de la glicerina en unidades del SI.
b) El módulo del peso específico de la glicerina en el SI.
c) El módulo de la aceleración de la gravedad en el lugar en que se realizó el experimento.
d) La presión manométrica en el fondo del recipiente.

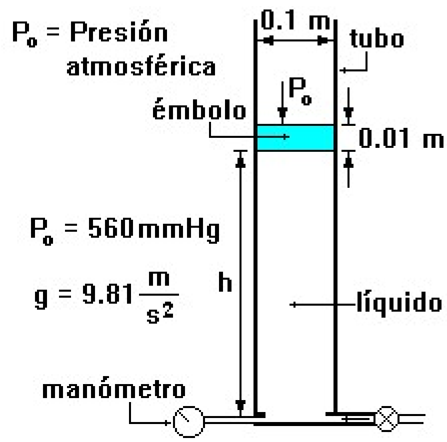


3. Para un experimento de hidrostática se construyó el dispositivo que se muestra en la figura. Consiste en un tubo de sección circular con la parte superior abierta y un émbolo de masa m que se desplaza en su interior sin fricción. Al nivel de la base del tubo está la entrada de un líquido que se inyecta a presión y eleva el émbolo hasta 5 m a partir de la base. Para las posiciones de "h" indicadas en la tabla, con el sistema en reposo, se registraron los datos de presión correspondientes. Con base en ello, determine:

a) El modelo matemático que relaciona a la presión P en función de la latura h.
b) El significado físico de la pendiente y el líquido del cual se trata.
c) La masa del émbolo.

h [m]	P_m [Pa]
0	1 249
1	9 599
2	17 949
3	26 299
4	34 649
5	42 999

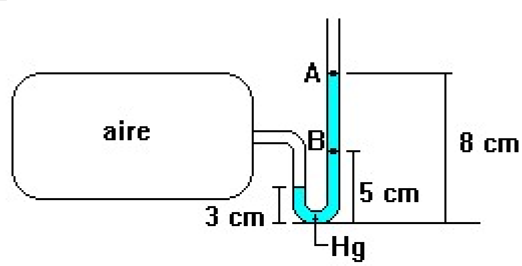
Sustancia	ρ [kg/m^3]
Agua	1 000
Aceite	850
Mercurio	13 600



4. En la figura se muestra un tanque de aire a presión, al cual se le conecta un manómetro diferencial en forma de U, éste utiliza como fluido manométrico mercurio, con base en esto determine:

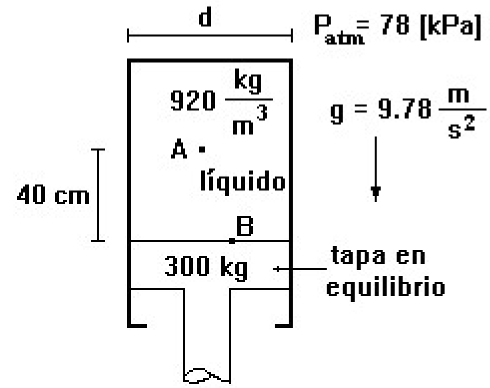
   a) La presión absoluta en el fondo del tubo en U.
   b) La presión manométrica del aire contenido en el tanque.
   c) La presión absoluta en el punto A.
   d) La presión manométrica en el punto B.

   $\rho_{Hg} = 13\ 600$ [kg/m^3]
   $P_{atm} = 77 \times 10^3$ [Pa]
   $g = 9.78$ [m/s^2]



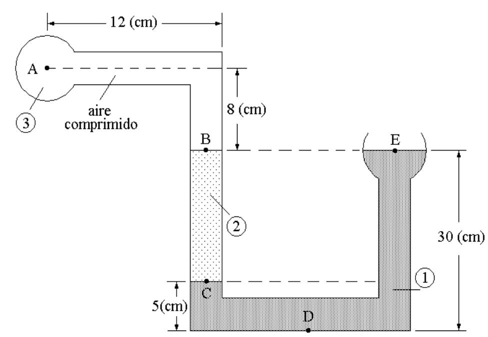
5. El cilindro que muestra la figura tiene 60 cm de diámetro (d). La tapa es de 300 kg, la densidad del líquido en el cilindro es de 920 kg/m^3, la presión atmosférica de 78 kPa y la aceleración de la gravedad de 9.78 m/s^2. Con base en ello determine:

a) La presión absoluta en el punto B.
b) La presión absoluta en el punto A.



6. La figura muestra dos recipientes, uno de ellos está abierto a la atmósfera. Los recipientes están conectados entre sí por medio de un tubo en el cual se encuentran tres fluidos. Si se sabe que la presión manométrica en el punto D es 3 022 [Pa], que la aceleración gravitatoria del lugar es 9.78 [m/s^2] y que la presión atmosférica local es 75 800 [Pa], determine:

a) La densidad del fluido 1.
b) La presión absoluta en el punto C.
c) La densidad, la magnitud del peso específico y el volumen específico del fluido 2.
d) La presión manométrica en el punto A, considerando que la densidad del aire es despreciable.
e) La lectura, en cm, que tendría un barómetro de mercurio en esta localidad.



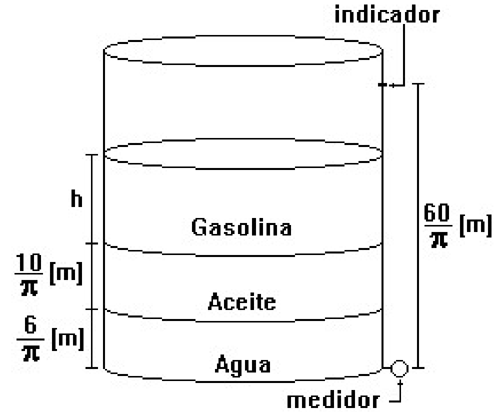
$\delta_2 = 0.68$; $\delta_{Hg} = 13.595$
$\rho_{agua} = 10^3$ [kg/m^3]

7. En una refinería ocurre una emergencia y debido a ello se vierten agua, aceite y gasolina en un contenedor (abierto por la parte superior) destinado únicamente para gasolina. El medidor situado en el fondo del contenedor indica "lleno". Sabemos que el contenedor se llena con una masa de 9.72 $\times 10^4$ [kg] de gasolina, tomando en cuenta los datos que se proporcionan y la figura, determine:

a) El radio de la base.
b) La presión manométrica en el fondo del tanque.
c) La altura de gasolina que contiene en este momento el tanque (en función de π).

d) La presión absoluta en el fondo del tanque si la presión atmosférica en el lugar es de 760 [mm de Hg].

$\rho_{gasolina}$ = 720 [kg/m^3]
ρ_{aceite} = 880[kg/m^3]
ρ_{agua} = 1000 [kg/m^3]
$\rho_{mercurio}$ = 13600 [kg/m^3]
g = 9.81 [m/s^2]



8. En el cenote de Chichén Itzá se realizaron mediciones de profundidad y presión absoluta, obteniéndose el modelo matemático siguiente:

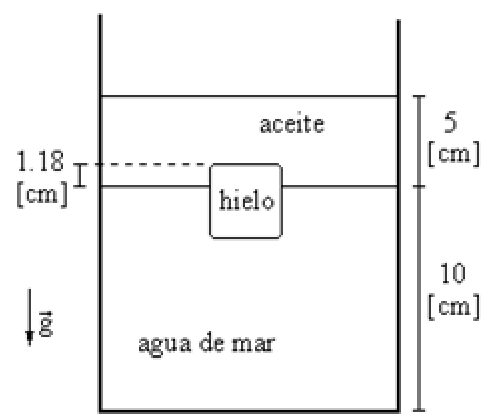
$$P_{abs} = 10\,290 \left[\frac{N}{m^3}\right] h\,[m] + 101{,}292.8\,[Pa]$$

Si consideramos que el cenote se encuentra al nivel del mar (g = 9.81 m/s^2), calcule:

a) La densidad del agua contenida en el cenote.
b) El peso y el volumen específicos del agua contenida en el cenote.
c) La presión atmosférica del lugar citado.
d) La presión manométrica para una profundidad de 10 [m].
e) La altura h que registraría un barómetro de Torricelli si se sabe que la densidad del mercurio es ρ_{Hg} = 13,600 [kg/m^3].

9. En un recipiente abierto a la atmósfera, un cubo de hielo de 3 [cm] de lado, flota en la frontera entre aceite y agua de mar con su superficie superior 1.18 [cm] por encima de la frontera como se muestra en la figura correspondiente. Con base en la información antes mencionada y tomando en cuenta que en dicho experimento las temperaturas de las sustancias son iguales y que se realizó en un laboratorio del D. F., determine, en el SI:

a) La presión manométrica en la superficie superior del cubo de hielo.
b) La densidad relativa y el peso específico del agua de mar.
c) El peso del cubo de hielo.
d) La presión absoluta en el fondo del tanque.
e) El volumen específico del aceite.



ρ_{hielo} = 920 [kg/m^3]
ρ_{aceite} = 750 [kg/m^3]

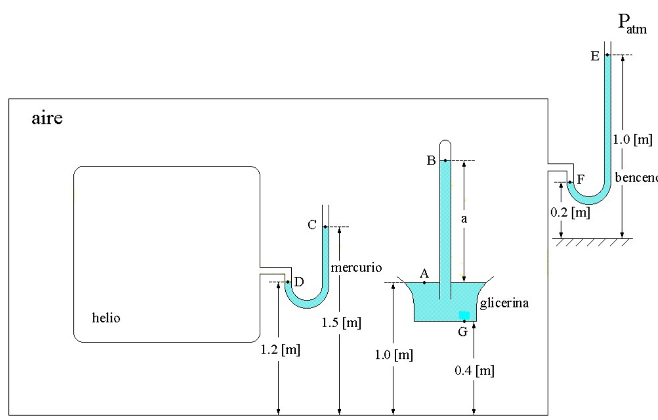
P_{atm} = 77 [kPa]
g = 9.78 [m/s^2]

$\rho_{\text{agua de mar}}$ = 1030 [kg/m^3]
ρ_{agua} = 1000 [kg/m^3]

10. En el interior de una cámara presurizada para investigación, situada muy por encima del nivel del mar, se tiene aire a una presión absoluta de 77 000 [Pa], en el interior se tiene un barómetro de glicerina y un tanque de helio (He) comprimido. La cámara tiene conectada en la parte derecha un manómetro en U, como se muestra en la figura, cuyo líquido manométrico es benceno. Con base en la figura y en la información proporcionada, determine, en el SI:

a) La altura *a* si el barómetro emplea glicerina.
b) La presión absoluta a la que está el helio.
c) La presión atmosférica del lugar, es decir la presión en el punto E.
d) El peso específico del benceno, así como su expresión dimensional.
e) La presión relativa, con respecto a la presión del aire de la cámara, del punto G.

$\rho_{\text{glicerina}}$ = 1 260 [kg/m^3]
ρ_{agua} = 10^3 [kg/m^3]
ρ_{mercurio} = 13 600 [kg/m^3]
δ_{benceno} = 0.9
g = 9.76 [m/s^2]



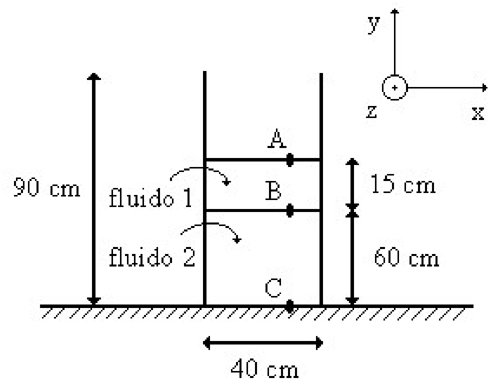
11. En un recipiente cilíndrico de 20 [cm] de diámetro y 1.20 [m] de altura se vierten agua líquida, cuya densidad es 990 [kg/m^3] y aceite comestible, cuya densidad es 870 [kg/m^3]. Si la masa de las dos sustancias suma 34.7 [kg] y el recipiente queda completamente lleno, determine:

a) La masa de cada sustancia.
b) El módulo del vector peso específico del aceite si g = 9.78 [m/s^2].
c) Las alturas de agua y del aceite en el recipiente, en [cm].
d) La presión manométrica, en [kPa] en la interfase entre los dos líquidos.
e) La profundidad, medida a partir de la boca de recipiente donde la presión absoluta es 84 [kPa] si la presión atmosférica del lugar es 77 050 [Pa].

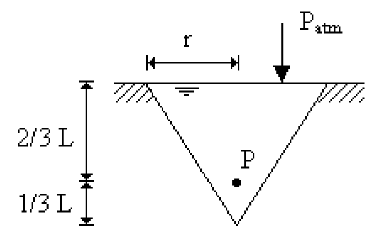
12. En un tanque de base cuadrada de 40 [cm] de lado y altura de 90 [cm] se tienen dos líquidos inmiscibles, es decir, que no se mezclan. Un barómetro en ese lugar indica 650 [mm] de Hg, la aceleración gravitatoria del lugar es 9.8 [m/s^2]. Con base en ello y en la figura, determine, en el SI:

a) La presión manométrica en el punto B.
b) La densidad del fluido 2 si la presión manométrica en el punto C es 5.842 [kPa]
c) La masa de cada uno de los líquidos.
d) El vector peso específico del fluido 1 y su volumen específico.
e) La presión absoluta en el punto A.

$\delta_{fluido\ 1} = 0.65$
$\delta_{Hg} = 13.595$
$\rho_{agua} = 10^3$ [kg/m^3]



13. Un recipiente en forma de cono invertido con altura L = 21 [cm] y radio r = 10 [cm], abierto en la parte superior a la atmósfera, está completamente lleno de agua. Si la densidad de este líquido es 10^3 [kg/m^3], la presión atmosférica local es P_{atm} = 77 000 [Pa] y la aceleración gravitatoria del lugar es 9.78 [m/s^2], determine:

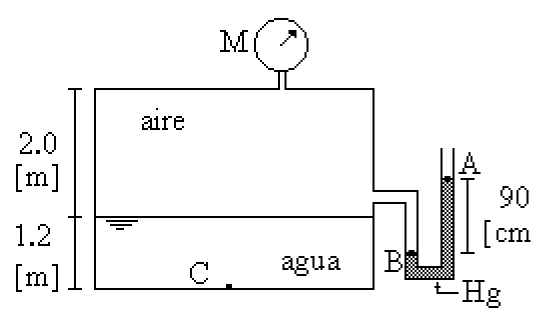


a) La presión manométrica a 2/3 de L de profundidad; es decir, en el punto P.
b) La masa de agua que se requirió para llenar el cono.

14. En la figura se muestra un tanque que contiene agua y aire. El manómetro diferencial, en forma de U, contiene mercurio. Determine, en el SI:

a) La presión absoluta y la presión manométrica en el punto A.
b) La lectura indicada por el manómetro M.
c) La presión absoluta en el fondo del tanque, es decir en el punto C.

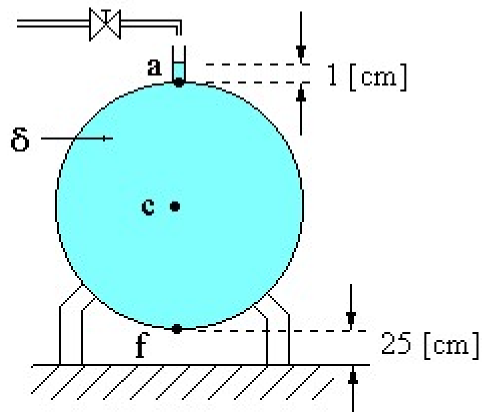
ρ_{Hg} = 13 595 [kg/m^3]; ρ_{agua} = 990 [kg/m^3]
P_{atm} = 0.78 [bar]; g = 9.78 [m·s^{-2}]
$\rho_{aire} \approx 0$ [kg/m^3] 1 [bar] = 10^5 [Pa]



15. Se tiene un tanque esférico de 1.2 [m] de diámetro, en su parte superior tiene un tubo pequeño vertical, de sección transversal despreciable el cual permite que el tanque se llene. Si este último está completamente lleno de un líquido cuya densidad relativa es 1.26, como se muestra en la figura, la aceleración gravitatoria del lugar es 9.8 [m/s^2] y la presión atmosférica del lugar es 61 [cm de Hg], determine en el SI:

a) La presión manométrica en el fondo del tanque, es decir en el punto f, si la presión manométrica en el centro de la esfera (punto c) es 7 532 [Pa].
b) La masa del líquido contenido únicamente en el tanque, desprecie la que está en el tubo vertical.
c) La presión absoluta en la parte superior del tanque, es decir en el punto a.

$\rho_{agua} = 10^3$ [kg/m^3]
$\delta_{Hg} = 13.6$



Respuestas de los ejercicios propuestos

1. a) P_A = 77 082.24 [Pa]
   b) P_B = 423.57 [Pa]
   c) P_C = 77 896.914 [Pa]
   d) $\vec{F} = 0.1331\ \hat{j}$ [N]

2. a) ρ = 1260 [kg/m^3]
   b) γ = 12 348 [N/m^3]
   c) g = 9.8 [m/s^2]
   d) P_{man} = 14 817.6 [Pa]

3. a) P_m [Pa] = 8 350 [Pa/m] h [m] + 1 249 [Pa]
   b) $m = \gamma_{aceite}$; aceite.
   c) m = 1 [kg]

4. a) P_{abs} = 87.64 [kPa]
   b) P_{man} = 6 650.4 [Pa]
   c) P_A = 77 [kPa]
   d) P_B = 3.99 [kPa]

5. a) P_B = 67.623 [kPa]
   b) P_A = 64.024 [kPa]

6. a) ρ_1 = 1029.9932 [kg/m^3]
   b) P_{absC} = 78 318.3333 [Pa]
   c) ρ_2 = 680 [kg/m^3]; γ_2 = 6 650.4 [N/m^3], v_2 = 0.0015 [m^3/kg]
   d) P_{manA} = 855.7333 [Pa]
   e) L_{Hg} = 57.01 [cm]

7. a) r = 1.5 [m]
   b) P_f = 134.897 [kPa]
   c) h = 39.44/π [m]
   d) P_{abs} = 236.293 [kPa]

8. a) ρ = 1 048.93 [kg/m^3]
   b) γ = 10 290 [N/m^3]; v = 0.000953 [m^3/kg]
   c) P_{atm} = 101.292 [kPa]
   d) P_{man} = 102.9 [kPa]
   e) h = 75.92 [cm]

9. a) P_B = 280.197 [Pa]
   b) δ= 1.03; γ = 10 073.4 [N/m^3]
   c) W = 0.2429 [N]

d) P_E = 78 374.09 [Pa]
e) v = 0.00133 [m^3/kg]

10. a) a = 6.2614 [m]
b) P_D = 116 820.8 [Pa]
c) P_E = 69 972.8 [Pa]
d) γ_b = 8 784 [N/m^3]; dim(γ_b) = L^{-2} M T^{-2}
e) P_G = 7 378.56 [Pa]

11. a) m_{aceite} = 19.053 [kg]; m_{agua} = 15.647 [kg]
b) γ_{aceite} = 8 508.6 [N/m^3]
c) L_{agua} = 50.29 [cm]; L_{aceite} = 69.71 [cm]
d) P_{man} = 5 931.3451 [Pa]
e) L = 0.8023 [m]

12. a) P_{manB} = 955.5 [Pa]
b) ρ_2 = 831.0374 [kg/m^3]
c) m_1 = 15.6 [kg]; m_2 = 79.7796 [kg]
d) $\vec{\gamma}_1 = -6370\ \hat{j}$ [N/m^3]
e) P_{absA} = 86 600.15 [Pa]

13. a) P_{man} = 1369.2 [Pa]
b) m = 2.1991 [kg]

14. a) P_{absA} = 78 000 [Pa], P_{manA} = 0 [Pa]
b) P_M = 119 663.19 [Pa]
c) P_{absC} = 209 281.83 [Pa]

15. a) P_{manf} = 14 940.8 [Pa]
b) m = 1 140.0211 [kg]
c) $P_{äbsa}$ = 81 424.28 [Pa]

Termodinámica

Ejercicios resueltos

1. En la gráfica se muestra la gráfica de la temperatura (T) alcanzada en función del calor suministrado (Q) a una sustancia cuya capacidad térmica específica es 138 [J/(kg·ΔK)] en su fase líquida. Sabiendo que las temperaturas de fusión y de ebullición corresponden a cambios de fase, determine para la sustancia:

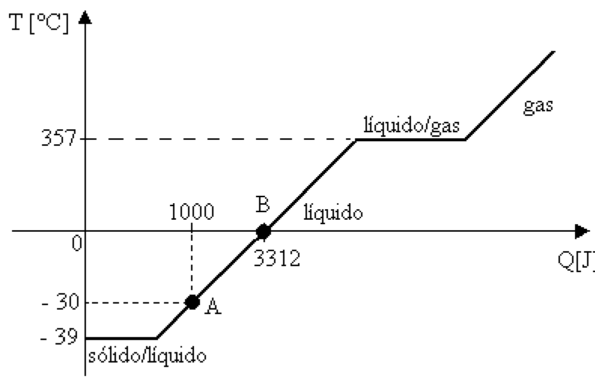
a) Su masa.

b) Su capacidad térmica.

c) Sus temperaturas de fusión y de ebullición.

d) La cantidad de calor necesaria para que la temperatura de la sustancia cambie desde su temperatura de fusión hasta la de ebullición.

e) La temperatura de equilibrio que alcanzaría al mezclarse con 120 [g] de agua a 20 [°C] si la sustancia estuviese a 0 [°C]. Considere c_{agua} = 4 186 [J/(kg·Δ°C)] y que la mezcla se realiza en un sistema aislado.



Resolución:

a) La cantidad de energía en forma de calor que es necesario proporcionar a una masa para que cambie su temperatura está dada por

$Q = mc\Delta T$; de donde $m = \dfrac{Q}{c(T_f - T_i)}$, apoyándonos en los puntos A y B de la gráfica tenemos

$$m = \frac{(3312 - 1000)\ \text{J}}{\left(138 \dfrac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\Delta\text{K}}\right)[0-(-30)]\Delta°\text{C}} = 0.5585\ [\text{kg}].$$

b) La capacidad térmica de la sustancia está dada por

$C = mc$; por lo tanto $C = (0.5585\ \text{kg})\left(138\ \dfrac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\Delta°\text{C}}\right)$; $C = 77.073 \left[\dfrac{\text{J}}{\Delta°\text{C}}\right]$.

c) La temperatura de fusión es aquella en la que la sustancia coexiste en fase sólida y gaseosa, por lo tanto, de acuerdo con la gráfica: $T_{fusión} = -39$ [°C] ; la temperatura de ebullición es aquella en la que coexiste en su fase líquida y gaseosa, por lo tanto consultando la gráfica podemos concluir que $T_{ebullición} = 357$ [°C].

d) La cantidad de calor necesaria está dada por Q = mc (T_{eb} – T_{fus}), por lo tanto, de acuerdo con la gráfica tenemos que

$$Q = (0.5585 \text{ kg})(138 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\Delta°\text{C}})[357\text{-}(\text{-}39)]°\Delta\text{C} = 30\,520.9 \text{ [J]}.$$

e) Aplicando la primera ley de la termodinámica para sistemas aislados tenemos que:
$Q_{agua} + Q_{sustancia} = 0$; lo que podemos abreviar como $Q_a + Q_s = 0$,
sabiendo que $Q = mc\Delta T = mc(T_f - T_i)$, podemos escribir
$m_a\ c_a\ (T_f - T_{ia}) + m_s\ c_s\ (T_f - T_{is}) = 0$, despejando la temperatura final (T_f) o de equilibrio, tenemos

$$T_f = \frac{m_a c_a T_{ia} + m_s c_s T_{is}}{m_a c_a + m_s c_s}\text{; por lo tanto}$$

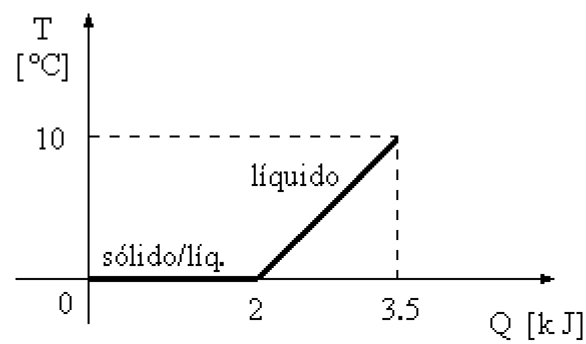
$$T_f = \frac{(0.12\,\text{kg})(4186\frac{\text{J}}{\text{kg}\ \Delta°\text{C}})(20\,°\text{C}) + (0.5585\,\text{kg})(138\frac{\text{J}}{\text{kg}\ \Delta°\text{C}})(0\,°\text{C})}{(0.12\,\text{kg})(4186\frac{\text{J}}{\text{kg}\ \Delta°\text{C}}) + (0.5585\,\text{kg})(138\frac{\text{J}}{\text{kg}\ \Delta°\text{C}})} = 17.3395\ [°\text{C}].$$

2. En el laboratorio de Física Experimental se calentó agua y se obtuvo la gráfica de su temperatura (T) en función del calor (Q) suministrado. Sabiendo que la capacidad térmica específica del agua, (en su fase líquida) es 4 186 [J/(kg·ΔK)], determine:

a) El modelo matemático que relaciona a la temperatura del agua líquida en función del calor suministrado, es decir T = f (Q).
b) La masa de agua empleada en el experimento. Exprese el resultado en gramos.
c) La temperatura de equilibrio si cuando el agua llegó a 10 [°C] se mezcló con 100 [g] de virutas de hierro que estaban a 23 [°C] en un calorímetro de capacidad térmica despreciable.

Considere
para el hierro:
c_{hierro} = 470 [J/(kg·Δ°C)]

para el agua:
c_{agua} = 4 186 [J/(kg·ΔK)]
$T_{fusión}$ = 0 [°C]
$T_{ebullición}$ = 92.5 [°C]



Resolución:

a) El modelo matemático tendrá la forma T = m Q + b, cuya pendiente es $m = \frac{\Delta T}{\Delta Q}$,

entonces calculando la pendiente con los dos puntos de la gráfica tenemos que

$$m = \frac{(10-0)°\text{C}}{(3.5-2)10^3\ \text{J}} = \frac{10\,°\text{C}}{1500\ \text{J}} = 6.6667\times10^3 \left[\frac{°\text{C}}{\text{J}}\right],$$

del modelo matemático podemos despejar la ordenada al origen b = T − *m* Q, sustituimos el valor de la pendiente y uno de los puntos que proporciona la gráfica en esta última expresión, es decir,

$$b = \left(0\left[°C\right]\right) - \left(6.6667 \times 10^{3}\left[\frac{°C}{J}\right]\right) \cdot \left(2000\left[J\right]\right) = -\ 13.3333\ [°C],$$

entonces el modelo matemático solicitado es

$$T\ \left[°C\right] = 0.0066667\left[\frac{°C}{J}\right]Q\left[J\right] - 13.3333[°C].$$

b) Sabemos que la cantidad de calor proporcionada para que una masa modifique su temperatura está dada por $Q = mc(T - T_i)$, esto se puede escribir como
$Q = m\ c\ T - m\ c\ T_i$, de donde
$m\ c\ T = Q + m\ c\ T_i$, si de este modelo despejamos T, tenemos

$T = \dfrac{1}{m\,c}Q + T_i$; comparando esta última expresión con el modelo matemático obtenido en el primer inciso, tenemos que la pendiente es $m = \dfrac{1}{m\,c}$; entonces

$$m = \frac{1}{\left(0.006667\left[\frac{°C}{J}\right]\right)\left(4186\left[\frac{J}{kg \cdot \Delta°C}\right]\right)} = 0.035832\left[kg\right].$$

c) Aplicando la primera ley de la termodinámica para sistemas aislados tenemos

$Q_{agua} + Q_{hierro} = 0$, lo que se puede abreviar como $Q_a + Q_h = 0$,

por otra parte $Q = m\ c\ (T_f - T_i)$ y $T_f = T_{final} = T_{equilibrio} = T_{eq}$, entonces

$m_a c_a(T_{eq} - T_{ia}) + m_h c_h(T_{eq} - T_{ih}) = 0$, despejando la temperatura de equilibrio se tiene

$T_{eq} = \dfrac{m_a c_a T_{ia} + m_h c_h T_{ih}}{m_a c_a + m_h c_h}$, es decir

$$T_{eq} = \frac{\left(0.0358\left[kg\right]\right) \cdot \left(4186\left[\frac{J}{kg \cdot \Delta°C}\right]\right) \cdot \left(10\left[°C\right]\right) + \left(0.1\left[kg\right]\right) \cdot \left(470\left[\frac{J}{kg \cdot \Delta°C}\right]\right) \cdot \left(23°C\right)}{\left(0.0358\left[kg\right]\right) \cdot \left(4186\left[\frac{J}{kg \cdot \Delta°C}\right]\right) + \left(0.1\left[kg\right]\right) \cdot \left(470\left[\frac{J}{kg \cdot \Delta°C}\right]\right)}$$

$T_{eq} = 13.1\ [°C]$.

3. Con el objeto de determinar de qué material está construido un calorímetro, cuya masa es de 300 [g], se vierten 504.9 [g] de agua en él, de tal manera que la temperatura del agua en el interior del recipiente es 15 [°C]. A continuación se pone en contacto con el agua una muestra de 560 [g], a 100 [°C], del mismo material con el que está construido el calorímetro. Se observa que la temperatura final del sistema es 22.5 [°C]. Considerando que el calorímetro es adiabático y que su temperatura inicial es la del agua, determine:

a) El material del calorímetro.
b) La capacidad térmica del calorímetro.

sustancia	c [cal/(g·Δ°C)]
aluminio	0.220
plomo	0.031
cobre	0.093
hierro	0.110
agua	1.0

Resolución:

a) Aplicando la primera ley de la termodinámica para sistemas aislados tenemos $Q_{agua} + Q_{calorímetro} + Q_{muestra} = 0$, lo cual se puede escribir como $Q_a + Q_c + Q_m = 0$, dado que
$Q = m\,c\,(T_f - T_i)$, entonces $m_a c_a (T_f - T_{ia}) + m_c c_c (T_f - T_{ic}) + m_m c_m (T_f - T_{im}) = 0$,
como el calorímetro está construido con el mismo material de la muestra, es decir, como $c_c = c_m$, podemos escribir
$m_a c_a (T_f - T_{ia}) + [m_c (T_f - T_{ic}) + m_m (T_f - T_{im})] \cdot c_m = 0$,
de donde la capacidad térmica específica de la muestra está dada por

$$c_m = \frac{-m_a c_a (T_f - T_{ia})}{m_c (T_f - T_{ic}) + m_m (T_f - T_{im})}, \text{ entonces}$$

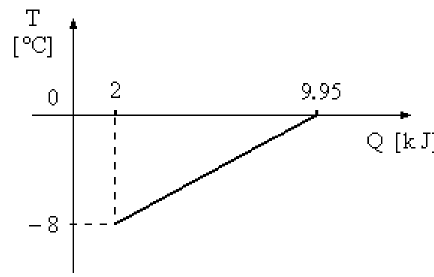
$$c_m = \frac{-(0.5049[\text{kg}]) \cdot \left(1\left[\frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \Delta°\text{C}}\right]\right) \cdot (22.5 - 15)[\Delta°\text{C}]}{(0.3[\text{kg}]) \cdot (22.5 - 15)[\Delta°\text{C}] + (0.56[\text{kg}]) \cdot (22.5 - 10)[\Delta°\text{C}]} = 0.092\left[\frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \Delta°\text{C}}\right];$$

consultado la tabla podemos concluir que el material del que está hecho el calorímetro es cobre.

b) La capacidad térmica o capacidad calorífica del calorímetro está dada por $C_{calorímetro} = C_c = c_c\, m_c$, esto es

$$C_c = \left(0.092\left[\frac{\text{cal}}{\text{g} \cdot \Delta°\text{C}}\right]\right) \cdot (300[\text{g}]) = 27.6069\left[\frac{\text{cal}}{\Delta°\text{C}}\right] \cdot \left(\frac{4.186[\text{J}]}{1\,[\text{cal}]}\right) = 115.5626\left[\frac{\text{J}}{\Delta°\text{C}}\right].$$

4. En la gráfica se presenta la temperatura (T) de una muestra en función del calor (Q) que se le suministró. Si la sustancia tenía una masa de 440 [g], determine:



a) El modelo matemático lineal de la gráfica.
b) La capacidad térmica específica de la muestra.

Resolución:

a) De acuerdo con la gráfica, el modelo matemático tendrá la forma T = *m* Q + b, cuya pendiente está dada por $\frac{\Delta T}{\Delta Q}$, entonces basándonos en los dos puntos que presenta la gráfica tenemos que

$m = \frac{(0-(-8))\,[°C]}{(9.95-2)10^3\,[J]} = \frac{8\,[°C]}{7950\,[J]} = 0.001006\left[\frac{°C}{J}\right]$, para calcular la ordenada al origen nos apoyaremos en uno de los puntos que nos proporciona la gráfica, es decir

$b = T_2 - m\,Q_2$, $b = (0[°C]) - \left(0.001006\left[\frac{°C}{J}\right]\right)(9950[J]) = -\,10.0126\ [°C]$,

por lo tanto el modelo matemático solicitado es

$T\,[°C] = 0.001006\left[\frac{°C}{J}\right]Q[J] - 10.0126\ [°C]$.

b) Sabemos que la cantidad de calor, proporcionada a una masa, que modifica su temperatura, está dada por $Q = m\,c\,(T - T_i)$, lo cual se puede escribir como $Q = m\,c\,T - m\,c\,T_i$,

si de esta última expresión despejamos la variable T, tenemos $T = \frac{1}{mc}Q + T_i$;

comparando este modelo con el obtenido en el primer inciso podemos concluir que la pendiente de la gráfica significa $m = \frac{1}{m\,c}$, entonces de esta última expresión podemos despejar la capacidad térmica específica de la muestra, es decir

$c = 1 / (m\ \mathrm{m})$; $c = \frac{1}{\left(0.001006\left[\frac{°C}{J}\right]\right)\cdot(0.44[kg])} = 2259.1722\left[\frac{J}{kg\cdot\Delta°C}\right]$.

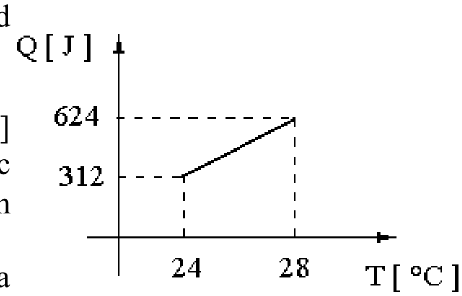
5. En un laboratorio se colocó una muestra de plomo de 600 [g] en un calorímetro. Se midió la energía en forma de calor (Q) que se le proporcionó al plomo y la temperatura (T) que alcanzó, obteniéndose la gráfica mostrada. Determine:

a) La capacidad térmica específica y la capacidad térmica del plomo utilizado.

b) La temperatura inicial que tenía la muestra.

c) La temperatura de equilibrio, si al llegar a 28 [°C] se mezcló el plomo con 100 [g] de agua líquida (c = 4 186 [J/(kg·ΔK)]) que estaba a 10 [°C], sin pérdidas de energía.

d) La cantidad de calor necesaria para que la mezcla del inciso anterior (agua y plomo, ambos a 28 [°C]) aumenten 5 [K], sin disipación de energía.



Resolución:

a) El modelo matemático de la gráfica tiene la forma Q = *m* T + b;
sabemos que el calor necesario para que una masa modifique su temperatura está dado por Q = m c (T – T_i) = m c T – m c T_i, si comparamos esta última expresión con el modelo matemático de la gráfica podemos observar que la pendiente de la ecuación de dicha gráfica es *m* = m c, de donde la capacidad térmica específica es el cociente c = *m* / m, por lo tanto, obteniendo la pendiente podemos determinar la capacidad térmica específica del plomo; entonces

$$m = \frac{(6.24 - 312)\text{J}}{(28 - 24)°\text{C}} = \frac{312\ [\text{J}]}{4[\Delta°\text{C}]} = 78\left[\frac{\text{J}}{\Delta°\text{C}}\right].\ \text{entonces c} = \frac{78\left[\frac{\text{J}}{\Delta°\text{C}}\right]}{0.6\ \text{kg}} = 130\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\Delta°\text{C}}\right];$$

la capacidad térmica es el producto C = m c, por lo tanto es la pendiente de la gráfica, entonces

$$\text{C} = m;\quad \text{C} = 78\left[\frac{\text{J}}{\Delta°\text{C}}\right].$$

b) Para determinar la temperatura inicial de la muestra es necesario obtener la ecuación del modelo matemático de la gráfica, como ya tenemos el valor de la pendiente podemos apoyarnos en uno de los puntos que proporciona dicha gráfica, es decir

$$\text{b} = \text{Q} - m\ \text{T},\ \text{entonces b} = (624\ [\text{J}]) - \left(78\left[\frac{\text{J}}{°\text{C}}\right]\right)(28\ [°\text{C}]) = -1\ 560\ [\text{J}]\ ,$$

sabemos que Q = m c (T – T_i) = m c T – m c T_i, entonces si comparamos esta última expresión con la forma del modelo matemático de la gráfica, es decir con

Q = *m* T + b,

podemos concluir que la ordenada al origen significa b = – m c T_i

de donde podemos despejar la temperatura inicial T_i = b / (– *m* c), por lo tanto

$$T_i = \frac{-1560\,[\mathrm{J}]}{-(0.6\,[\mathrm{kg}])\cdot\left(130\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\Delta°\mathrm{C}}\right]\right)} = 20\,[°\mathrm{C}].$$

c) Aplicando la primera ley de la termodinámica para sistemas aislados, tenemos

$Q_{plomo} + Q_{agua} = 0$, que se puede abreviar como $Q_p + Q_a = 0$,

como $Q = m\,c\,(T_f - T_i)$, podemos escribir $m_p c_p (T_{eq} - T_{ip}) + m_a c_a (T_{eq} - T_{ia}) = 0$,

de donde podemos despejar la temperatura de equilibrio:

$T_{eq} = \dfrac{m_a c_a T_{ia} + m_p c_p T_{ip}}{m_a c_a + m_p c_p}$, entonces

$$T_{eq} = \frac{(0.1\,[\mathrm{kg}])\cdot\left(4\,186\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\Delta°\mathrm{C}}\right]\right)\cdot(10\,[°\mathrm{C}]) + (0.6\,[\mathrm{kg}])\cdot\left(130\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\Delta°\mathrm{C}}\right]\right)\cdot(28\,°\mathrm{C})}{(0.1\,[\mathrm{kg}])\cdot\left(4\,186\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\Delta°\mathrm{C}}\right]\right) + (0.6\,[\mathrm{kg}])\cdot\left(130\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\Delta°\mathrm{C}}\right]\right)}$$

$T_{eq} = 12.83$ [°C].

d) La cantidad total de calor necesaria será la suma de la cantidad que recibirá el agua más la que recibirá el plomo, es decir

$Q_n = Q_p + Q_a = (m_a c_a + m_p c_p)\Delta T$, por lo tanto

$$Q_n = \left[(0.1\,[\mathrm{kg}])\cdot\left(4\,186\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\Delta°\mathrm{C}}\right]\right) + (0.6\,[\mathrm{kg}])\cdot\left(130\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg}\cdot\Delta°\mathrm{C}}\right]\right)\right]\cdot(15\,\Delta\mathrm{K}),$$

$Q_n = 2\,483$ [J].

6. Un resistor eléctrico disipa una potencia de 0.4 [kW] y aumenta la temperatura de 1.2 [ℓ] de agua líquida de 0 [°C] a 54 [°C] en el lapso de 15 minutos. Si la capacidad térmica específica del agua en su fase líquida es c = 1 [cal/(g·Δ°C)] y su densidad es $\rho = 10^3$[kg/m^3] determine, en el SI:

a) El calor que recibe el agua para aumentar su temperatura de 0 [°C] a 54 [°C].

b) La eficiencia del resistor si se sabe que ésta es el cociente del calor transmitido al agua entre la energía disipada total por el resistor.

Resolución:

a) La cantidad de calor que recibe el agua está dada por $Q_a = m\,c_{agua}\,\Delta T = m\,c_a\,\Delta T$, pasaremos la capacidad térmica específica del agua al SI:

$$c_a = = 1\left[\frac{\text{cal}}{\text{g}\cdot\Delta°\text{C}}\right]\cdot\left(\frac{4.186\ [\text{J}]}{1\ [\text{cal}]}\right)\cdot\left(\frac{1\ 000\ [\text{g}]}{1\ [\text{kg}]}\right)\cdot\left(\frac{1\ \Delta°\text{C}}{1\ \Delta\text{K}}\right) = 4\ 186\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\Delta\text{K}}\right],$$

para calcular la masa de agua nos podemos apoyar en su volumen y en la densidad, esto es

$\rho = \dfrac{m}{V}$ de donde $m = \rho V = \left(10^3\left[\dfrac{\text{kg}}{\text{m}_3}\right]\right)\cdot\left(0.0012\ [\text{m}^3]\right) = 1.2\ [\text{kg}]$, entonces

$$Q_a = (1.2\ [\text{kg}])\cdot\left(4.186\left[\frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\Delta\text{K}}\right]\right)\cdot(\ 54 - 0\ )\ \Delta°\text{C} = 271\ 252.8\ [\text{J}].$$

b) De acuerdo con la información proporcionada en el ejercicio, la eficiencia está dada por

$\eta = \dfrac{Q_a}{Q_{disip}}$, el numerador se obtuvo en el inciso anterior, para calcular el denominador nos apoyaremos en el cálculo de la potencia disipada, ya que $Q_{disip} = P_{disip}\,\Delta t$, entonces

$P_{disip} = 0.4[\text{kW}] = 400[\text{W}]$, por lo tanto

$$Q_{disip} = P_{disip}\,\Delta t = (400\ [\text{W}])\cdot(15\ [\text{min}])\cdot\left(\frac{60\ [\text{s}]}{1\ [\text{min}]}\right),$$

Q_{disip} = 360 000 [J], entonces la eficiencia es $\eta = \dfrac{Q_a}{Q_{disip}} = \dfrac{271\ 252.8\ [\text{J}]}{360000\ [\text{J}]} = 0.7535\ [1]$,

o expresada en términos porcentuales η = 75.35 [%].

7. En un calorímetro, cuya capacidad térmica es despreciable, se mezclaron las tres sustancias que se muestran en la tabla. Si la temperatura de equilibrio fue 291.15 [K] = 18 [°C], determine en el SI la capacidad térmica específica del cloruro de sodio.

sustancia	capacidad térmica específica [J/(kg·ΔK)]	temperatura inicial [°C]	masa [g]	temperatura de fusión [°C]	temperatura de ebullición [°C]
alcohol	1 908.82	0	250	− 117.3	78.5
agua	4 186	30	150	0	100
cloruro de sodio	c_c	22	300	801	1 450

Aplicando la primera ley de la termodinámica para sistemas aislados tenemos que $Q_{alcohol} + Q_{agua} + Q_{cloruro\ de\ sodio} = 0$, expresión que se puede abreviar como

$Q_A + Q_B + Q_C = 0$, dado que $Q = m\,c\,(T_f - T_i)$, podemos escribir

$m_A c_A (T_f - T_{iA}) + m_B c_B (T_f - T_{iB}) + m_C c_C (T_f - T_{iC}) = 0$ de donde podemos despejar

$$c_C = \frac{-m_A c_A \left(T_f - T_{iA}\right) - m_B c_B \left(T_f - T_{iB}\right)}{m_C \left(T_f - T_{iC}\right)} \text{, entonces}$$

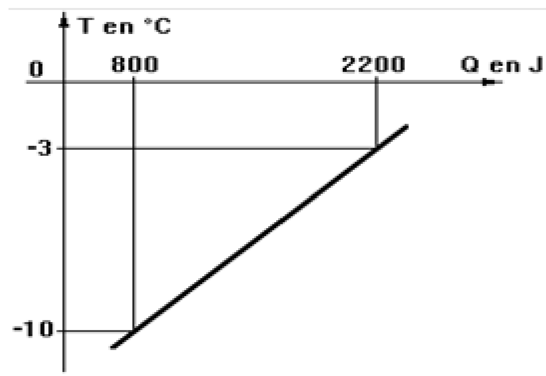
$$c_C = \frac{-\left(0.25\ [\text{kg}]\right)\left(1\ 908.82 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \Delta\text{K}}\right]\right)\left(18 - 0\right)[^\circ\text{C}] - \left(0.15\ [\text{kg}]\right)\left(4\ 186 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \Delta\text{K}}\right]\right)\left(18 - 30\right)[^\circ\text{C}]}{\left(0.3\ [\text{kg}]\right)\left(18 - 22\right)[^\circ\text{C}]}$$

$$c_C = 879.075 \left[\frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \Delta\text{K}}\right].$$

Ejercicios propuestos

1. En la figura se muestra la gráfica que relaciona la temperatura alcanzada por un trozo de hielo, en función del calor suministrado. Considerando que la gráfica es una recta y que la capacidad térmica específica del hielo es c = 2260 [J/(kg·ΔK)], determine:

   a) La masa del trozo de hielo.
   b) La temperatura inicial del trozo de hielo.
   c) La cantidad total de calor que se requiere suministrar al trozo de hielo para que se empiece a fundir.



2. Para poder determinar la temperatura que se tiene dentro de una congeladora industrial, se tomaron cuatro trozos de hielo con diferentes masas, y se midió indirectamente la energía en forma de calor proporcionada, hasta que empezara a derretirse cada trozo. Los valores obtenidos se muestran en la tabla. Sabiendo que la capacidad térmica específica del hielo es c = 2260 J/(kg·K), determine:

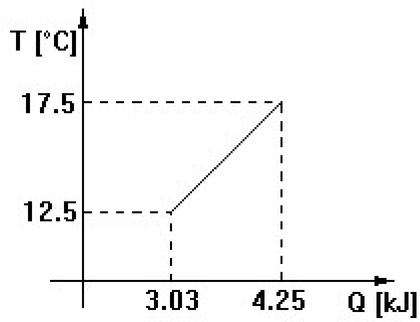
   a) El modelo matemático que mejor se ajuste a estos datos, considerando la masa como abscisa y la energía como ordenada.
   b) El significado físico de la pendiente obtenida.
   c) La temperatura dentro de dicha congeladora, despreciando la ordenada al origen del modelo matemático.

trozo	masa en kg	energía en J
1	0.250	21 800
2	0.390	33 700
3	0.570	49 000
4	1.030	88 500

3. La gráfica muestra el experimento realizado para obtener la relación entre incrementos de temperatura y calor suministrados a 100 g de alcohol. Con base en ello y en la gráfica, determine:

a) La capacidad térmica específica del alcohol.
b) La temperatura al iniciarse el experimento.

c) Si se mezcla todo el alcohol estando a 17.5°C con 100 g de agua a 60°C, ¿cuál sería la temperatura de equilibrio de la mezcla?



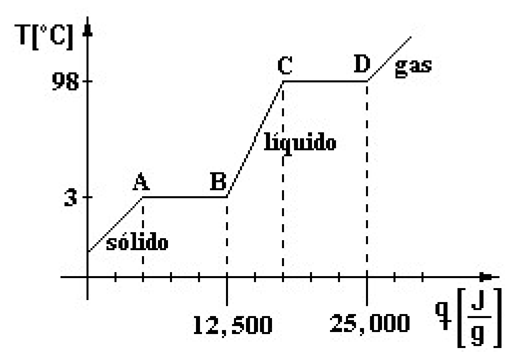
4. En un calorímetro se ponen en contacto 200 [g] de agua a 75 [°C], con algunos balines de cobre a 20 [°C]. Los balines tienen un diámetro de 1 [cm]. Con base en ello, determine:

a) El número de balines de cobre que se usaron si la temperatura de equilibrio es de 60°C. (Suponga que el calorímetro no intercambia calor con los otros componentes).
b) La energía proporcionada al agua si la temperatura inicial fue de 14°C.
c) Si la energía suministrada al agua fue proporcionada por una fuente de voltaje en la cual la diferencia de potencial V = 10 [V] y la corriente eléctrica I = 5 [A], ¿cuál fue el tiempo de funcionamiento de dicha fuente?

Considere: ρ_{Cu} = 8 900 [kg/m^3] ;c_{agua} = 4 186 [J/(kg ΔK)]; c_{Cu} = 380 [J/(kg ΔK)]

5. La gráfica muestra la curva de calentamiento de una sustancia, con base en ello, determine:

a) La capacidad térmica específica de la sustancia (líquido).
b) El calor necesario para hacer que 50 [g] de la sustancia pasen del punto C al D.
c) ¿Cuánto calor necesita un gramo de la sustancia para pasar de A a D?



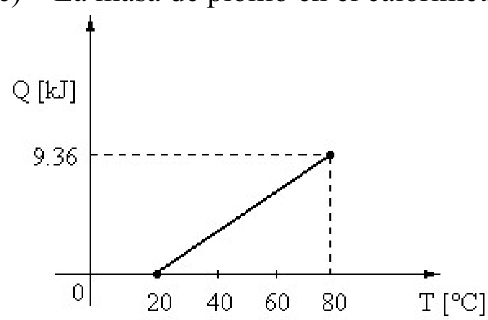
6. Se desea calentar cierta cantidad de agua mediante una parrilla eléctrica. El agua está a temperatura ambiente (293 K) y se requiere a 366 K. La parrilla se alimenta a 127 V y demanda 0.5 A de corriente eléctrica. Con base en ello y considerando que c_{agua} = 4 186 [J/(kg·Δ°C)] y c_{cobre} = 390 [J/(kg·Δ°C)], determine:

a) La cantidad de agua calentada si la parrilla eléctrica funciona durante 5 minutos.

b) La temperatura alcanzada a los 3 minutos.
c) El agua a 366 [K] se mezcla con balines hechos de cobre a 292 [K] y se alcanza una temperatura de 364 [K], ¿cuánto cobre adicional se necesitaría para que la mezcla disminuyese su temperatura hasta un valor de 323 [K]?
d) Si se desea lograr un incremento de 20 [K] en la temperatura del sistema anterior, ¿cuántos minutos se debe calentar la mezcla?

7. En experimentos realizados con una muestra de 400 gramos de cobre se obtuvo el modelo gráfico mostrado. En un calorímetro de cobre, con masa de 150 [g] y temperatura inicial 20 [°C], se colocó una masa de plomo, cuya capacidad térmica específica es 130 [J/(kg·Δ°C)], a 80 [°C] de temperatura junto con 90 [mℓ] de aceite a 40 [°C]. Si la temperatura de equilibrio que alcanza el sistema de las tres sustancias es 45 [°C], determine, en el SI:

a) El modelo matemático que relaciona el calor suministrado (Q) en función de la temperatura (T) de la muestra de cobre.
b) La capacidad térmica específica del cobre.
c) La energía que habría que retirarle a la muestra de cobre con temperatura inicial de 20 [°C] para que su temperatura fuese 0 [°C].
d) La masa de aceite en el calorímetro.
e) La masa de plomo en el calorímetro.

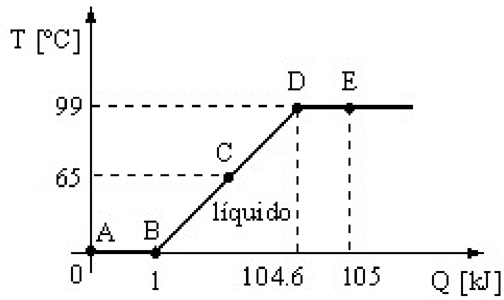


$\rho_{aceite} = 600$ [kg/m^3] ;
$c_{aceite} = 2.09325$ [kJ/(kg·Δ°C)]

8. En un recipiente adiabático de 1500 [cm^3] de capacidad, se tiene agua, cuya capacidad térmica específica es 4186 [J/(kg·Δ°C)] y densidad de 999.97 [kg/m^3] a una temperatura de 20 [°C]. Después se agregó una cierta cantidad de una sustancia desconocida cuya capacidad térmica específica es 2430 [J/(kg·Δ°C)] a 60 [°C], obteniéndose una temperatura de 30 [°C]. Si la masa total de la mezcla es de 900 [g], calcule:

a) La masa de la sustancia desconocida que se agregó.
b) La masa de agua que se tenía en el recipiente.
c) La capacidad térmica de la sustancia desconocida.
d) El volumen que ocupa el agua en el recipiente expresado en litros.
e) La cantidad de energía en forma de calor que habría que proporcionarle a la mezcla para lograr un incremento de temperatura de 5 [K].

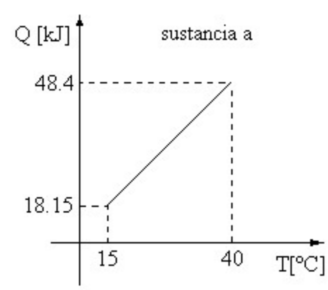
9. En un calorímetro se colocaron 250 [g] de una sustancia. Se le proporcionó energía en forma de calor por medio de un resistor que estaba conectado a una fuente de voltaje de 12 [V]. Se fue midiendo la energía calorífica (Q) proporcionada a la sustancia y la temperatura (T) que tenía y se obtuvo la gráfica que se muestra. Con base en ello, determine:

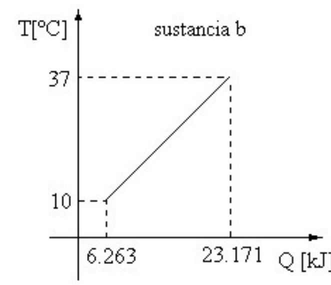


a) La capacidad térmica específica de la sustancia en su fase líquida.
b) La cantidad de energía en forma de calor proporcionada a la sustancia para que ésta pasara del punto D al punto E.
c) La potencia que disipó el resistor para proporcionar la cantidad de calor del inciso anterior si se sabe que para que la sustancia pasara del punto D al punto E la fuente estuvo operando durante 1 minuto.
d) La corriente eléctrica que circuló por el resistor mencionado y su expresión dimensional en el SI.
e) Si cuando la sustancia estaba en el punto C se hubiera desconectado la fuente y se hubiera vertido una cantidad de 100 [g] de la misma sustancia a una temperatura de 20 [°C], ¿cuál hubiera sido la temperatura de equilibrio?

10. Las gráficas siguientes muestran la caracterización térmica de dos sustancias a y b respectivamente.

sustancia	a	b
temperatura inicial [ºC]	10	40
masa	$(4/3)m_b$	m_b





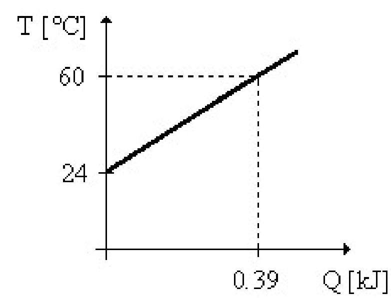
En un recipiente adiabático se mezclan las masas de las dos sustancias, cuyas condiciones iniciales se muestran en la tabla anterior. Una vez mezcladas las dos sustancias y estando en equilibrio térmico se sabe que la masa total de dichas sustancias fue 0.875 [kg]. Determine en el SI:

a) Las masas de las sustancias a y b.
b) La capacidad térmica de las dos sustancias.
c) La capacidad térmica específica de la sustancia a.
d) La temperatura de equilibrio.
e) La expresión dimensional de la capacidad térmica específica de la sustancia b.

11. En un laboratorio de física se le proporcionó energía en forma de calor (Q) a una muestra cuya masa era 78 [g] desde su temperatura inicial hasta alcanzar 60 [°C], como se muestra en la gráfica. Determine:

a) La capacidad térmica específica de la muestra e identifique la sustancia.
b) La temperatura inicial de la muestra y su expresión dimensional, ambas en el SI; diga si esta propiedad es intensiva o extensiva, justificando su respuesta.
c) El modelo matemático de la gráfica.
d) La cantidad total de energía en forma de calor que se le debe suministrar a la masa para lograr en ésta un incremento de 12 [K]. Utilice la capacidad térmica específica experimental de la muestra.
e) Si al llegar a 72 [°C] se colocó la muestra en un calorímetro junto con 56 [g] de agua a 18 [°C] ¿cuál fue la temperatura de equilibrio considerando la capacidad térmica específica del calorímetro despreciable y la capacidad térmica específica experimental de la sustancia?

sustancia	*capacidad térmica específica* [J/(kg·ΔK)]
aluminio	910
cobre	390
hierro	470
mercurio	138
plata	234
agua	4186



12. Un calorímetro cuya capacidad térmica específica es despreciable, contiene 0.09 [litros] de agua cuya capacidad térmica específica es 4 186 [J/(kg·Δ°C)] y su densidad es ρ = 990 [kg/m^3]. La temperatura inicial del agua es 20 [°C], en el interior del calorímetro se coloca un bloque de un material cuya masa es 100 [g] a una temperatura de 85 [°C]. Si el sistema (agua - material) alcanza el equilibrio térmico a los 25 [°C] y se sabe que 1 [cal] = 4.186 [J], determine en unidades del SI:

a) La energía en forma de calor transferida al agua, es decir, la que recibió.
b) La energía cedida por el material.
c) La capacidad térmica específica del material.
d) La cantidad de energía en forma de calor que habría que transferirle al sistema, después de haber alcanzado el equilibrio térmico, para que aumente su temperatura en 2.5 [K].
e) El tiempo que tendría que calentarse el sistema anterior si la energía de inciso anterior la proporciona una fuente de 100 [W].

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. a) $m = 88.5$ [g]
   b) $T_i = - 14$ [°C]
   c) $Q = 2\ 800$ [J]

2. a) Q [J] = 85 543.35 [J/kg] m [kg] + 345.72 [J]
   b) $m = (\Delta T)\ c$
   c) $T = - 37.85$ [°C]

3. a) $c = 2\ 440$ [J/(kg·Δ°C)]
   b) $T = 0.082$ [°C]
   c) $T_f = 45.35$ [°C]

4. a) 177 balines
   b) $Q = 51.069$ [kJ]
   c) $t = 17.02$ [min]

5. a) $c = 52.631$ [J/(g·Δ°C)]
   b) $Q = 375\ 000$ [J]
   c) $Q = 20\ 000$ [J]

6. a) $m = 0.0623$ [kg]
   b) $T = 336.83$ [K]
   c) $m_{adic} = 0.909$ [kg]
   d) $t = 3.268$ [min]

7. a) Q [J] = 156 [J/°C] T [°C] – 3 120 [J]
   b) $c = 390$ [J/(kg·Δ°C)]
   c) $Q = - 3\ 120$ [J]
   d) $m_a = 0.054$ [kg]
   e) $m_p = 0.4456$ [kg]

8. a) $m_s = 0.3283$ [kg]
   b) $m_a = 0.5717$ [kg]
   c) $C_s = 797.77$ [J/°C]
   d) $V_a = 0.5717$ [ℓ]
   e) $Q = 15.955$ [kJ]

9. a) $c_s = 4\ 185.86$ [J/(kg·Δ°C)]
   b) $Q = 400$ [J]
   c) $P = 6.6667$ [W]
   d) $I = 0.5556$ [A]; [I] = I
   e) $T_{eq} = 52.1429$ [°C]

10. a) $m_a = 0.5$ [kg]; $m_b = 0.375$ [kg]
    b) $C_a = 1\ 210$ [J/K]; $C_b = 626.22$ [J/K]
    c) $c_a = 2\ 420$ [J/(kg·ΔK)]
    d) $T_{eq} = 293.23$ [K]
    e) $[c_b] = L^2\ T^{-2}\ \Theta^{-1}$

11. a) $c_s = 138.8889$ [J/(kg·Δ°C)]; mercurio
    b) $T_i = 297$ [K]; dim $(T_i) = \Theta$; propiedad intensiva
    c) T [°C] = 0.0923 [°C/J] Q [J] + 24 [°C]
    d) Q = 130 [J]
    e) T = 20.3853 [°C]

12. a) $Q_a = 1864.863$ [J]
    b) $Q_m = -\ 1864.863$ [J]
    c) $c_m = 310.8105$ [J/(kg·ΔK)]
    d) $Q_s = 1010.1341$ [J]
    e) $\Delta t = 10.1013$ [s]

Electromagnetismo

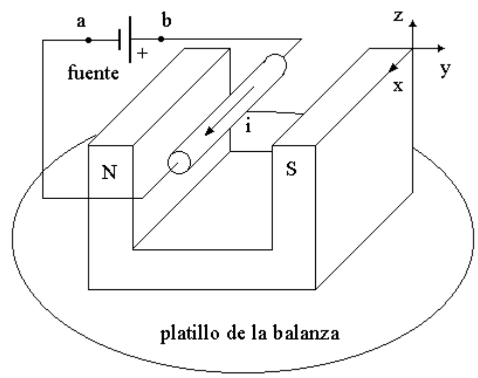
Ejercicios resueltos

1. Si por el conductor recto de longitud ℓ = 10 [cm], que se muestra en la figura, circula una corriente eléctrica de 5 [A] y está inmerso en un campo magnético uniforme de B = 150 [mT], determine en el SI:

a) La fuerza (magnitud y dirección) que experimenta el conductor recto.

b) La variación aparente de masa Δm que se detecta en el imán; indique si la balanza mide aumento o disminución de masa, justifique su respuesta.

c) La fuerza (magnitud y dirección) que experimentaría el conductor recto si el ángulo entre éste y el campo magnético fuese α = 30 [°] y se invirtiera la polaridad en la fuente.



g = 9.78 [m/s^2]

Resolución:

a) La fuerza de origen magnético está dada por

$\vec{F} = i\,\vec{\ell} \times \vec{B}$; de acuerdo con la figura, el vector longitud es $\vec{\ell} = 0.1\ \hat{i}$ [m] y el vector campo magnético es $\vec{B} = 0.15\ \hat{j}\ [T]$; por lo tanto aplicando el producto cruz, tenemos que

$\vec{F} = (5\,A)[(0.1\ \hat{i}) \times (0.15\ \hat{j})]\ [T \cdot m]$; entonces $\vec{F} = 0.075\ \hat{k}$ [N].

b) De acuerdo con la segunda ley de Newton: F = $\Delta m \cdot g$; si de esta expresión despejamos la variación de masa, tenemos que $\Delta m = \dfrac{F}{g} = \dfrac{0.075\ N}{9.78\dfrac{m}{s^2}} = 7.6687 \times 10^3\,kg$

, es decir Δm = 0.0076687 [kg]; si la fuerza de origen magnético $\vec{F}_m$ en el conductor es $\vec{F} = 0.075\ \hat{k}$ [N], en el imán actuará una fuerza de la misma magnitud pero de sentido opuesto, es decir $\vec{F}_{imán} = -0.075\ \hat{k}$ [N], por lo que el platillo de la balanza se desplazará en dirección $(-\hat{k})$; entonces podemos concluir que la balanza detectará un aumento aparente de masa del imán.

c) De la expresión $\vec{F} = i\,\vec{\ell} \times \vec{B}$ podemos escribir que la magnitud de dicha fuerza está dada por

$|\vec{F}| = i\,|\vec{\ell} \times \vec{B}|$, o bien $F = i\,\ell\,B\,\text{sen}\,\alpha = (5\ [A])(0.1\ [m])(0.15\ [T])\ \text{sen}\ 30° = 0.0375\ [N]$, como no hemos invertido los polos del imán, tenemos que $\vec{B} = B(\hat{j})$, sin embargo al invertir la polaridad en la fuente la corriente eléctrica cambia de sentido por lo que el vector longitud sería $\vec{\ell} = \ell\,(-\hat{i})$; entonces al hacer el producto vectorial $\vec{F} = i\,\vec{\ell} \times \vec{B}$, la dirección el vector fuerza de origen magnético tendrá la dirección $\vec{F} = F\,(-\hat{k})$, por lo que $\vec{F} = -0.0375\ \hat{k}\,[N]$.

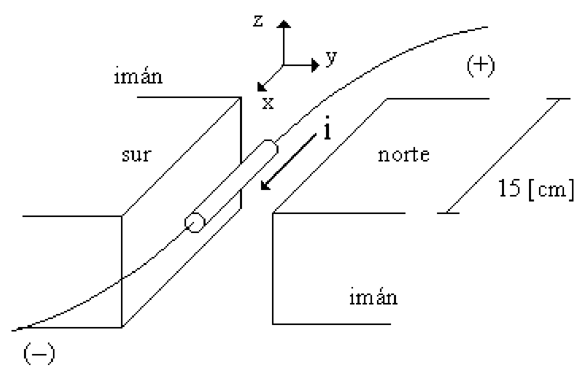
2. En un experimento de fuerza de origen magnético se colocó un conductor de 8 [cm] de longitud que transportaba una corriente (i) dentro de una región de campo magnético generada por un par de imanes; dicho conductor estaba colocado perpendicularmente a las líneas de campo magnético, como se muestra en la figura. Utilizando el método de mínimos cuadrados se obtuvo el modelo matemático que se muestra, con base en ello, determine en el SI:

$$F\,[mN] = 7.52\left[\frac{mN}{A}\right] i\,[A] + 0.9\,[mN]$$

a) La corriente eléctrica que circularía en el conductor si la fuerza magnética que se tuviera en éste fuese 0.017 [N] y la expresión dimensional de cada constante del modelo matemático mostrado.

b) El vector (magnitud y dirección) campo magnético en el que estaba inmerso el conductor.

c) La energía que disipó el conductor si estuvo conectado 5 minutos y recibió una potencia de 24.2 [W].



Resolución:

a) El modelo matemático proporcionado tiene la forma F = *m* i + b del cual podemos despejar la corriente eléctrica, esto es i = (F – b) / *m*, por lo tanto

$$i = \frac{(17\,[mN]) - (0.9\,[mN])}{7.52\left[\frac{mN}{A}\right]} = 2.141\,[A];$$

la expresión dimensional, en el SI, de la pendiente es dim (m) = L M T $^{-2}$ I $^{-1}$, y la de la ordenada al origen es dim (b) = L M T $^{-2}$.

b) La magnitud de la fuerza de origen magnético está dada por $F = i\,\ell\,B\,\text{sen}\,\alpha$, si comparamos esta última expresión con el modelo matemático proporcionado en el ejercicio, tenemos que la pendiente de dicho modelo es $m = \ell$ B sen α, observando la figura podemos decir que $\alpha = 90°$, por lo que $m = \ell$ B, si despejamos la magnitud del campo magnético, tenemos

B = (m/ℓ) = $\dfrac{0.00752\left[\dfrac{N}{A}\right]}{0.08\,[m]} = 0.097\,[T]$, en la figura también se observa que el vector campo magnético es paralelo al eje "y" y va en el sentido negativo de dicho eje, por lo tanto el vector referido se puede escribir como $\vec{B} = -0.094\,\hat{j}\,[T]$.

c) La energía es el producto de $E = P\,(\Delta t)$, por lo tanto E = $(24.2\,[W])\cdot(300\,[s])$, entonces
$E = 7260\,[J]$.

3. En un experimento de fuerza de origen magnético se varió el ángulo (φ) que formaba un conductor de 58 [mm] de longitud con las líneas de campo magnético (B) que producía un imán y se obtuvo la tabla que se muestra. Sabiendo que la corriente en el conductor era 3.2 [A] y que su resistencia era 2.4 [Ω], determine en el SI:

F [mN]	18.19	12.86
φ [rad]	π/2	π/4

a) La magnitud del campo magnético generado por el imán.
b) La diferencia de potencial aplicada al conductor y su expresión dimensional.

Resolución:

a) La relación entre las variables "F" y "φ" no es lineal, por lo tanto es necesario hacer un cambio de variable, de esta manera las variables a considerar serían "F" y "sen φ", por lo tanto

F[N]	0.01819	0.01286
senφ [1]	1	0.7071

A partir de los puntos de la tabla anterior, el modelo matemático tendrá la forma F = m sen φ,

cuya pendiente es $m = \dfrac{\Delta F}{\Delta \text{sen}\varphi}$, por lo tanto m =

$$\frac{(0.01819 - 0.01286)\,[N]}{(1 - 0.7071)[1]} = 0.018197\,[N];$$

si comparamos el modelo matemático experimental F = m sen φ, con el modelo teórico $F = i\,\ell\,B$ sen φ, podemos concluir que la pendiente significa $m = i\,\ell\,B$, de donde podemos despejar la magnitud del campo magnético del imán, es decir

$B = m / (i\,\ell)$, entonces $B = \dfrac{0.018197\ [\mathrm{N}]}{(3.2\ [\mathrm{A}])\cdot(0.058\ [\mathrm{m}])} = 0.098\ [\mathrm{T}]$.

b) La diferencia de potencial aplicada al conductor está dada por $V_{ab} = R\ i = (2.4\ [\Omega])\cdot(3.2\ [\mathrm{A}]) = 7.68\ [\mathrm{V}]$; sabiendo que la diferencia de potencial es el trabajo en cada unidad de carga eléctrica, podemos escribir que $[V_{ab}] = \left[\dfrac{W}{q}\right]$, como el trabajo se puede calcular como el producto del trabajo por la distancia y la carga eléctrica corriente eléctrica por tiempo, podemos establecer que

$$\dim\ (V_{ab}) = \left[\frac{F\cdot d}{i\cdot t}\right] = \frac{M\cdot L^2\ T^{-2}}{I\cdot T}, \quad \dim\ (V_{ab}) = \frac{M\cdot L^2}{I\cdot T^{-3}} = M\ L^2\ T^{-3}\ I^{-1}.$$

4. En un laboratorio se realizaron mediciones de fuerzas magnéticas sobre un conductor al variar su corriente eléctrica y se obtuvo la tabla que se muestra. El campo magnético que rodeaba al conductor, de 24 [cm], era de 0.2 [T] y la aceleración gravitatoria del lugar era 9.78 [m/s^2]. Determine, en el SI:

i [A]	F [mN]
1	38
2	70
3	103

a) El modelo matemático lineal que relaciona a la fuerza magnética en función de la corriente eléctrica. Utilice el método de mínimos cuadrados.

b) El ángulo que formaba el conductor con las líneas de campo magnético.

Resolución:

a) El modelo matemático lineal tendrá la forma $F = m\ i + b$, donde $m = \dfrac{\Delta F}{\Delta i}$, de acuerdo con la tabla, se tienen 3 puntos experimentales, n = 3, como emplearemos el método de mínimos cuadrados, será necesario elaborar la tabla siguiente:

i[A]	F[N]	i F[A·N]	$i^2[A^2]$
1	0.038	0.038	1
2	0.070	0.14	4
3	0.103	0.309	9
$\sum i = 6$	$\sum F = 0.211$	$\sum i\ F = 0.487$	$\sum i^2 = 14$

de acuerdo con las expresiones del método de mínimos cuadrados que se encuentran en el apéndice de este Cuaderno de Ejercicios, la pendiente es

$$m = \frac{(3)\cdot(0.487)-(6)\cdot(0.211)}{(3)\cdot(14)-(16)^2}\left[\frac{\text{N}}{\text{A}}\right] = \frac{0.195}{6}\left[\frac{\text{N}}{\text{A}}\right] = 0.0325\left[\frac{\text{N}}{\text{A}}\right]$$

y la ordenada al origen es

$$\text{b} = \frac{(0.211)\cdot(14)-(0.487)\cdot(6)}{(3)\cdot(14)-(16)^2}[\text{N}] = \frac{0.032}{6}[\text{N}] = 0.005333\ [\text{N}],$$

por lo tanto el modelo matemático es $\text{F}\ [\text{N}] = 0.0325\left[\frac{\text{N}}{\text{A}}\right]\cdot \text{i}\ [\text{A}] + 0.005333\ [\text{N}]$.

b) Sabemos que la fuerza de origen magnético está dada por F = i ℓ B sen ϕ, si comparamos esta última expresión con el modelo matemático obtenido en el inciso anterior, podemos concluir que la pendiente es $m = \ell$ B sen ϕ, de donde podemos despejar el ángulo ϕ, es decir

$$\phi = \text{ang sen}\left(\frac{m}{\ell \text{B}}\right), \text{entonces } \phi = \text{ang sen}\left[\frac{0.0325}{(0.24)(0.2)}\right] = 0.7438\ [\text{rad}].$$

5. En un experimento de electromagnetismo se colocó un conductor de 5 [cm] de longitud, dentro del campo magnético generado por un imán de herradura. La corriente que circuló en dicho conductor fue 10 [A], se varió el ángulo (θ) que el conductor formaba con las líneas de campo y se midió la fuerza magnética (F) en el citado conductor. Determine, en el SI:

F [cN]	10.54	15.46
θ [°]	11	17

a) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento. Considere que la variable dependiente fue la fuerza magnética y que la ordenada al origen es despreciable.

b) La magnitud del campo magnético del imán de herradura.

Resolución:

a) La relación entre las variables "F" y "θ" no es lineal, por lo tanto es necesario realizar un cambio de variable, entonces tenemos

F [N] $\cdot 10^{-2}$	10.54	15.460
sen θ [1]	0.1908	0.2924

El modelo matemático tendrá la forma F = m sen θ + b, sin embargo como la ordenada al origen es despreciable, entonces será F = m sen θ, cuya pendiente es

$$m = \frac{\Delta \text{F}}{\Delta \text{sen}\,\theta} = \frac{(15.46-10.54)10^{-2}[\text{N}]}{(0.2924-0.1908)} = \frac{0.0492\ [\text{N}]}{0.1016} = 0.4843\ [\text{N}],$$

el modelo solicitado es $\text{F}\ [\text{N}] = 0.4843\ [\text{N}]\ \text{sen}\,\theta\ [1]$.

b) Sabemos que la fuerza de origen magnético está dada por F = i ℓ B sen θ, si comparamos esta última expresión con el modelo matemático experimental obtenido en el inciso anterior, podemos concluir que su pendiente es m = i ℓ B, de donde podemos despejar la magnitud del campo magnético del imán de herradura, es decir

$$\text{B} = \frac{m}{\text{i}\cdot\ell} = \frac{(0.4843\ [\text{N}])}{(10\ [\text{A}])\cdot(0.05\ [\text{m}])} = 0.9685\ [\text{T}].$$

6. En un experimento de fuerza de origen magnético se emplearon varios conductores con una corriente eléctrica de 2.9 [A] inmersos dentro de un campo magnético de 98 [mT]. Se varió la longitud (ℓ) de los conductores, se midió la fuerza magnética (F) en cada uno de ellos y se obtuvo la tabla que se muestra. Con base en ello, determine el ángulo que formaba el conductor con las líneas de campo magnético, utilice el método de mínimos cuadrados.

ℓ [cm]	F [mN]
2	6.8
4	11.7
6	16.6

El modelo matemático lineal tendrá la forma F = m ℓ + b, si comparamos este modelo con el modelo matemático teórico F = i ℓ B sen α , entonces la pendiente m será el producto m = i B sen α; para obtener la pendiente utilizaremos el método de mínimos cuadrados por lo que es necesario elaborar la tabla siguiente:

ℓ [m]	F [N]	$\ell \cdot$ F [m·N]	ℓ^2 [m^2]
0.02	0.0068	0.000136	0.0004
0.04	0.0117	0.000468	0.0016
0.06	0.0166	0.000996	0.0036
$\sum \ell = 0.12$	$\sum F = 0.0351$	$\sum \ell \cdot F = 0.0016$	$\sum \ell^2 = 0.0056$

entonces, la pendiente es

$$m = \frac{(3)(0.0016\ [\mathrm{m} \cdot \mathrm{N}]) - (0.12\ [\mathrm{m}])(0.0351\ [\mathrm{N}])}{(3)(0.0056\ [\mathrm{m}^2]) - (0.12\ [\mathrm{m}])^2} = \frac{0.000588\ [\mathrm{N}]}{0.0024\ [\mathrm{m}]} = 0.245 \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]$$

del significado físico de la pendiente, es decir de m = i B sen α,
podemos despejar el seno del ángulo α, esto es

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{m}{\mathrm{i\ B}}, \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{\left(0.245 \left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]\right)}{(2.9\ [\mathrm{A}])(0.098\ [\mathrm{T}])} = 0.8621,$$

de donde $\alpha = \operatorname{ang\,sen}(0.8621) = 59.55[°]$.

7. En un experimento de fuerza de origen magnético, realizado en un Laboratorio de Física, se hizo circular en un conductor 0.8 [A] de corriente eléctrica, dicho conductor estaba inmerso en un campo magnético dado por $\vec{B} = (45\,\hat{j} - 74\,\hat{k})$ [mT]. Si la longitud del conductor se puede expresar como $\vec{\ell} = (-0.05\,\hat{i} + 0.06\,\hat{j})$ [m], determine, en el SI:

a) El vector fuerza de origen magnético sobre el conductor.
b) El ángulo que se formó entre el conductor y el campo magnético.

Resolución:

a) La fuerza de origen magnético en un conductor está dada por $\vec{F} = i\vec{\ell} \times \vec{B}$, entonces haciendo el producto vectorial tenemos

$$\vec{F} = (0.8[A])\,[(-0.05\,\hat{i} + 0.06\,\hat{j}) \times (45\,\hat{j} - 74\,\hat{k})]10^{-3}[m \cdot T],$$

$$\vec{F} = (0.8)\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -0.05 & +0.06 & 0 \\ 0 & 45 & -74 \end{vmatrix} 10^{-3}[N],$$

$$\vec{F} = (0.8)(10^{3})\,[(\hat{i})(0.06)(-74) - (\hat{j})(-0.05)(-74) + (\hat{k})(-0.05)(45)][N],$$

$$\vec{F} = (0.8)(10^{3})\,[(-4.44\,\hat{i}) - (3.7\,\hat{j}) + (-2.25\,\hat{k})]\ [N],$$ entonces el vector fuerza es

$$\vec{F} = (-0.00355\,\hat{i} - 0.00296\,\hat{j} - 0.0018\,\hat{k})][N]$$

b) El módulo del vector fuerza está dado por $\left|\vec{F}\right| = i\left|\vec{\ell} \times \vec{B}\right|$, es decir $\left|\vec{F}\right| = i\left|\vec{\ell}\right|\left|\vec{B}\right| \operatorname{sen}\alpha$, donde α es el ángulo entre el conductor y las líneas de campo magnético; para encontrar el valor de este ángulo, determinaremos los módulos de los vectores involucrados

$$\left|\vec{F}\right| = \sqrt{(-0.00355)^2 + (-0.00296)^2 + (-0.0018)^2}\ [N] = 4.9603 \times 10^{-3}\ [N],$$

$$\left|\vec{\ell}\right| = \sqrt{(-0.05)^2 + (0.06)^2}\ [m] = 7.8102 \times 10^{-2}\ [m],$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{(0.045)^2 + (-0.074)^2}\ [T] = 8.6608 \times 10^{-2}\ [T],$$

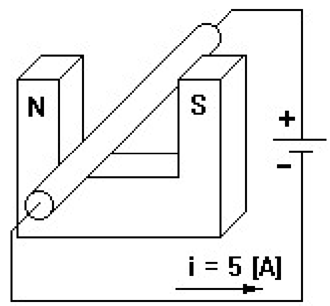
entonces, $$\operatorname{sen}\alpha = \frac{F}{i\ell B} = \frac{(4.9603x10^{-3}[N])}{(0.8[A])(7.8102x10^{-2}[m])(8.6608x10^{-2}[T])} = 0.9166,$$

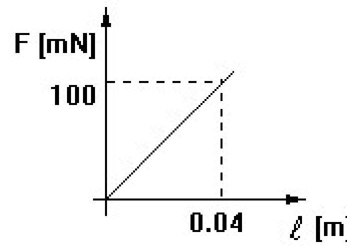
por lo tanto α = ang sen (0.9166) = 66.4394 [°].

Electromagnetismo

Ejercicios propuestos

1. En cierto laboratorio se realizó un experimento como el mostrado en la figura, donde se varió la longitud del conductor para obtener datos sobre la fuerza magnética. El conductor está colocado perpendicularmente a las líneas de campo magnético. Con base en la figura y en la gráfica, obtenga:





a) El modelo matemático que relaciona a F con ℓ.
b) La magnitud del campo magnético del imán.
c) ¿Qué longitud debe tener el conductor para que F = 1 [N]?
d) Si el conductor se gira 90 grados, ¿cuánto vale la magnitud de la fuerza para una longitud del conductor de 1 [m]?

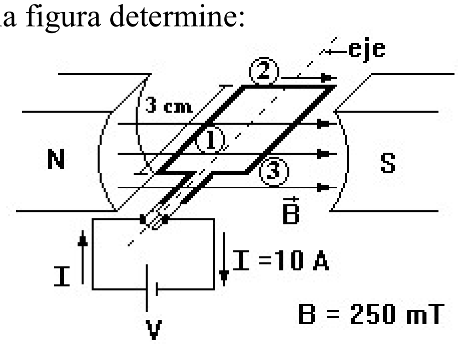
2. En el laboratorio de electricidad y magnetismo se realizó el experimento de fuerza magnética. Se tabularon los valores de F_m y θ, con base en ello determine:

a) El modelo matemático lineal $F_m = f(\theta)$.
b) El significado físico de la pendiente.
c) El valor del campo magnético si I=5 [A] y ℓ=4 [cm].
d) ¿Cuál es el valor de la magnitud de la fuerza si θ=45°?

F_m [N]	θ [°]
0	0
0.0342	20
0.0643	40
0.0866	60
0.0985	80
0.0996	85
0.1000	90

3. Para la posición del motor de C. D. mostrado en la figura determine:

a) La magnitud de la fuerza magnética que actúa en el lado 1 de la espira en la posición de la figura.
b) La magnitud de la fuerza magnética que actúa en el lado 2 de la espira en la posición de la figura.
c) El sentido de giro del motor, en las condiciones mostradas.
d) ¿Existe alguna posición de la espira donde el motor no gire? ¿Por qué?



4. Se sabe que en un conductor su longitud ℓ se relaciona con la corriente eléctrica que transporta I, según el modelo matemático $\ell = 2.5 + 0.5\ I$, en donde I está en miliamperes y ℓ está en centímetros. El conductor se emplea en un experimento electromagnético que arroja los resultados de la tabla. θ es el ángulo en grados que el conductor forma con las líneas de campo magnético (B=400 mT). Con base en ello determine:

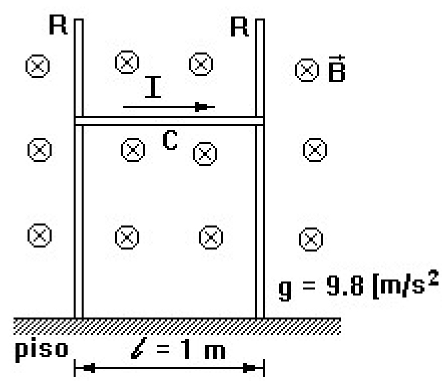
a) La fuerza magnética para un ángulo de 60°.
b) Exprese las unidades de las constantes en la ecuación que relaciona a ℓ con I en el Sistema internacional.
c) La longitud del conductor ℓ en [m].
d) La corriente eléctrica I en [mA].

θ [°]	F [N]$\times 10^{-5}$
15	1.24
25	2.03
35	2.75
45	3.39
55	3.93

5. El arreglo que se muestra en la figura consta de un conductor horizontal móvil (C) y dos rieles conductores verticales fijos (R), todos ellos inmersos en un campo magnético (B). Dicho arreglo permite que el conductor C se desplace en forma vertical y que fluya a través de él una corriente (I). Se midieron diferentes valores de fuerza (F) para diversos valores de corriente (I) obteniéndose la tabla que se muestra. Con base en ello:

a) Obtenga el modelo matemático que relaciona a la fuerza (F) con la corriente que circula en el conductor (I). Elija a F como ordenada.
b) Calcule la magnitud del campo magnético.
c) Determine la magnitud de la fuerza a la que está sujeto el conductor C cuando no fluye corriente en este último (I=0) si su masa es de 200 gramos.
d) Obtenga la corriente necesaria que debe circular por el conductor C para que se mantenga en equilibrio.

I[A]	F[mN]
0	0
0.2	13.0
0.4	26.1
0.6	38.9
0.8	52.5
1.0	66.0



6. En un experimento en el laboratorio se midió el ángulo γ (ángulo entre conductor de cobre y las líneas de campo magnético) y la fuerza de origen magnético F_m que experimentaba dicho conductor el cual transportaba una corriente eléctrica de 2.5 [A]. Se sabe que la masa del conductor era de 2 [g], tenía 1.8 [mm] de diámetro y su densidad era ρ_{Cu} = 8.93 [kg/dm^3], con base en ello determine:

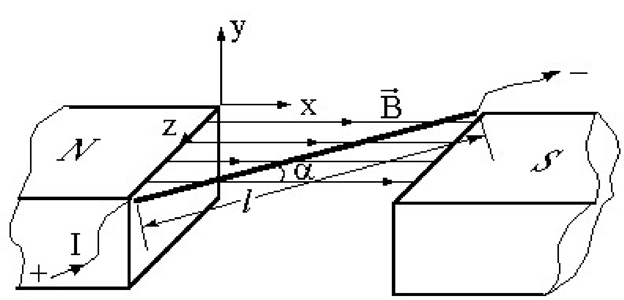
a) El modelo matemático que relaciona linealmente las variables F_m y γ considere que la variable independiente fue el ángulo.
b) El significado físico de la pendiente del modelo matemático anterior.
c) La magnitud del campo magnético presente durante el experimento en [mT].
d) La magnitud de la fuerza de origen magnético, a partir de su modelo obtenido, si el ángulo fuese $\pi/2$ radianes.

γ [°]	F_m [N]
0	0
13	0.0018
26	0.0035
39	0.0051
52	0.0064
65	0.0072

7. Un conductor de ℓ = 40 [cm] de longitud se encuentra dentro de un campo magnético $\vec{B} = B\ \hat{\imath}$ [T], formándose entre ellos un ángulo α = 60 [°]. Se midieron las magnitudes de las fuerzas (F) que actuaron sobre el conductor para los valores de corriente (I) que se muestran en la tabla; determine, en el SI:

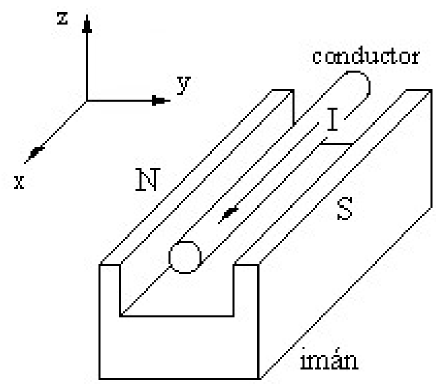
a) El modelo matemático que relaciona la corriente I con la fuerza F, es decir F = f(I).
b) La expresión dimensional de cada una de las constantes del modelo anterior.
c) El vector campo magnético del imán.
d) La fuerza (magnitud y dirección) que se ejercería en el conductor para una corriente de 10 [A], de acuerdo con el sistema de referencia mostrado en la figura.
e) La magnitud de la fuerza máxima que se tendría si lo único que se pudiera variar fuese el ángulo α. Considere el valor de la corriente del inciso anterior.

I [A]	F [mN]
0	0
4	259.8
8	519.6
12	789.4



8. Un alumno de Física Experimental realizó la práctica de electromagnetismo en un laboratorio, tomando como datos el incremento aparente de masa del imán y la intensidad de corriente eléctrica correspondiente. Parte de las mediciones se muestran en la tabla. Si el conductor estaba colocado perpendicularmente a las líneas de campo magnético del imán utilizado, como se muestra en la figura, y la aceleración gravitatoria del lugar era g = 9.8 [m/s^2], determine :

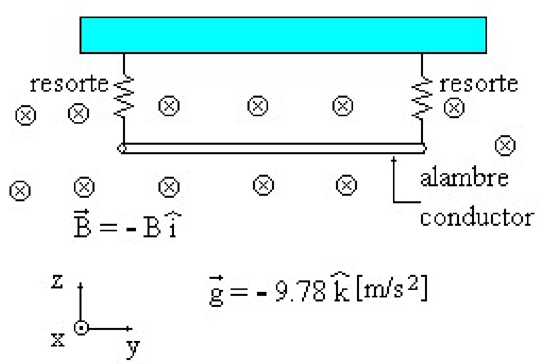
I [A]	$\overline{m}$ [kg]	Δm [kg]
0	0.315	0
1	0.320	0.005
2	0.325	0.01
3	0.329	0.014
4	0.334	0.019
5	0.340	0.025



a) El modelo matemático que relaciona a la fuerza de origen magnético en función de la corriente eléctrica. Considere que la ordenada al origen es despreciable.
b) El vector fuerza que se tendría en el conductor para una corriente de 3.5 [A].
c) La magnitud del campo magnético utilizado si el conductor tenía una longitud de 10 [cm].
d) El porcentaje de error en el cálculo del campo magnético anterior si el valor real es B = 0.5 [T].
e) La masa del imán, en gramos.

9. Se coloca un conductor de 14 [cm] de longitud perpendicularmente a las líneas de un campo magnético uniforme. Se efectuaron mediciones y se obtuvo la tabla siguiente:

I [A]	0.8	1.5	2.6	3.4	4.1	5.0
F_m [mN]	33.6	63.0	109.2	142.8	172.2	210.0

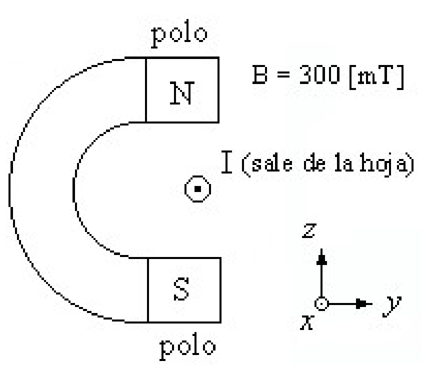


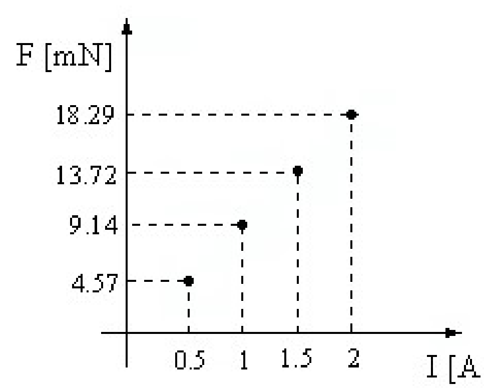
Adicionalmente, en el mismo campo magnético se coloca un alambre de 2 [mm] de diámetro, 17 [cm] de longitud y densidad $\rho = 8.96$ [g/cm^3] como se muestra en la figura. Considerando que g = 9.78 [m/s^2] determine en el SI:

a) El valor del campo magnético utilizado.
b) La masa del alambre conductor de la figura.
c) La fuerza necesaria (magnitud y dirección) para que los resortes no estén estirados ni comprimidos; es decir, para que el alambre conductor levite.
d) La corriente eléctrica necesaria que debe circular por el alambre, indicando su sentido, para que se cumpla la condición del inciso anterior.
e) La expresión dimensional del campo magnético calculado en el inciso a de este problema.

10. En un experimento de fuerza de origen magnético se varió la corriente eléctrica (I) que circulaba a través de un conductor colocado perpendicularmente a las líneas de campo magnético (B) de un imán en forma de herradura, como se muestra en la figura. A partir de las mediciones realizadas se obtuvo la gráfica que se muestra, con base en ello, determine:

a) El modelo matemático lineal correspondiente al modelo gráfico mostrado, en el SI.
b) La longitud del conductor.
c) El vector fuerza en el conductor si la corriente eléctrica a través de él fuese 0.6 [A].
d) La magnitud de la fuerza, en función de la corriente (I), que experimentaría el conductor si éste se girara, a partir de la posición mostrada, un ángulo $\pi/12$ [rad] manteniendo al conductor paralelo al plano *xy*.



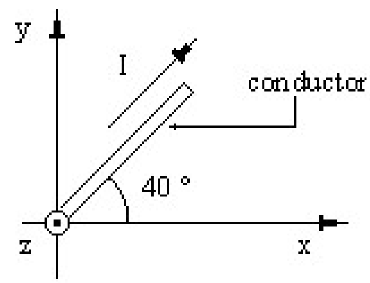


11. En un experimento de electromagnetismo se midió el ángulo ϕ, ángulo entre un conductor y las líneas de campo magnético, y la magnitud de la fuerza de origen magnético (F) que experimentaba dicho conductor. Este último estaba inmerso en un campo magnético y transportaba una corriente eléctrica de 2.1 [A]. Las mediciones se muestran en la tabla. Si se sabe que la masa del conductor era 2.8 [g], que tenía una sección transversal circular de 0.8 [mm] de diámetro y que era de cobre (ρ_{Cu} = 8 930 [kg/m^3]), determine:

a) El modelo matemático lineal que relaciona las variables F y ϕ, es decir $F = f(\phi)$. Considere que la ordenada al origen es despreciable.
b) El significado físico de la pendiente del modelo anterior.
c) La longitud del conductor.
d) La magnitud del campo magnético.
e) A partir del modelo obtenido, la magnitud de la fuerza que se tendría en el conductor si ϕ fuese 1 [rad].

F [mN]	ϕ [°]
0.51	13
0.99	26
1.42	39
1.79	52

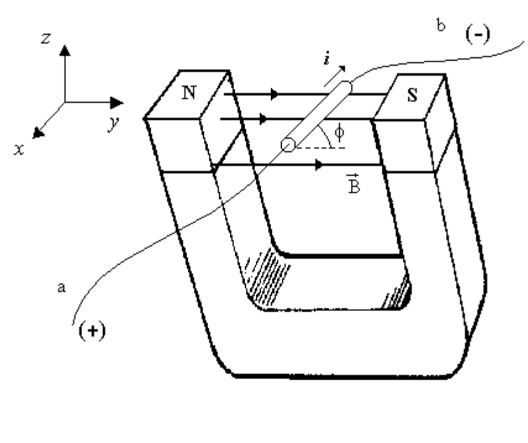
12. Un conductor, cuya longitud es 3.6 [cm] se encuentra colocado como se indica en la figura. Si la corriente eléctrica que transporta el conductor es 3.4 [A], determine el vector fuerza de origen magnético que actúa sobre el conductor considerando que éste se halla inmerso en un campo magnético $\vec{B} = 0.5\ \hat{j} - 0.4\ \hat{k}$ [T], exprese en resultado en la unidad del SI.



13. En un experimento de electromagnetismo se colocó un conductor dentro de un campo magnético generado por un imán en forma de herradura, como se muestra en la figura. El conductor de 9.5 [cm] estaba colocado en el plano *xy* formando un ángulo $\varphi = \pi/6$ [rad] con respecto a las líneas de campo magnético. Se varió la corriente eléctrica (i) en el conductor y se midió en forma indirecta la fuerza magnética (F) sobre el mismo. Determine, en el SI:

a) El modelo matemático lineal que relaciona a la fuerza magnética en función de la corriente eléctrica, es decir $F = f(i)$. Considere que la ordenada al origen es despreciable.
b) El vector (magnitud y dirección) campo magnético.
c) El vector (magnitud y dirección) fuerza que se tendría para una corriente de 0.6 [A] en el conductor.
d) La magnitud de la fuerza magnética máxima si la corriente eléctrica fuese 1.3 [A] y únicamente se pudiera variar el ángulo φ.
e) La diferencia de potencial (V_{ab}) aplicada al conductor para la corriente del inciso anterior si su resistencia era 5.3 [Ω].
(Recuerde que $1\ \Omega = V/A$).

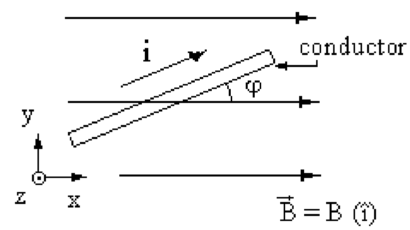
I [A]	0	0.4	0.8	1.2
F [mN]	0	3.4	7.0	10.3



14. En un experimento de electromagnetismo se varió la longitud del conductor utilizado que se muestra en la figura. Dicho conductor estaba inmerso en un campo magnético de 52 [mT] y circulaba por él una corriente eléctrica de 2.2 [A]. Sabiendo que con el método de mínimos cuadrados se obtuvo el modelo matemático $F = 0.0735\ \ell$ (en el SI), determine:

a) El ángulo φ, si la longitud del conductor es 6 [cm].

b) El vector (magnitud y dirección) fuerza de origen magnético que actuaba en dicho conductor si éste se hallaba colocado en el plano *xy*, como se muestra.



Respuestas de los ejercicios propuestos

1. a) F [N] = 2.5 [N/m] ℓ [m]
   b) B = 500 [mT]
   c) ℓ = 40 [cm]
   d) F = 0 [N]

2. a) F_m [N] = 0.1 [N] sen θ
   b) m = B I ℓ
   c) B = 500 [mT]
   d) F = 0.0707 [N]

3. a) F_1 = 75 [mN]
   b) F_2 = 0 [N]
   c) sentido contrario a las manecillas del reloj.
   d) si la espira gira 90° a partir de la posición mostrada.

4. a) F = 41.5353 [μN]
   b) 0.025 [m]; 5 [m/A]
   c) ℓ = 4 [cm]
   d) I = 3 [mA]

5. a) F [N] = 0.0659 [N/A] I [A] – 0.0002 [N]
   b) B = 65.9 [mT]
   c) W = 1.96 [N]
   d) I = 29.742 [A]

6. a) F [N] = 0.008027 [N] sen γ
   b) m = I ℓ B
   c) B = 36.48 [mT]
   d) F = 8.027 [mN]

7. a) F [N] = 0.0657 [N/A] I [A] – 0.0002 [N]
   b) dim(m) = $L\,M\,T^{-2}\,I^{-1}$; dim(b) = $L\,M\,T^{-2}$
   c) B = 0.1897 [T]
   d) $\vec{F} = -\,0.657\ \hat{j}$ [N]
   e) $F_{máx}$ = 0.7586 [N]

8. a) F [N] = 0.0479 [N/A] I [A]
   b) $\vec{F} = 0.1676\ \hat{k}$ [N]
   c) B = 0.4788 [T]
   d) %e = 4.24 %
   e) m = 315 [g]
9. a) B= 0.3 [T]

b) $m = 4.7853 \times 10^{-3}$ [kg]

c) $\vec{F} = 0.0468\ \hat{k}$ [N]

d) $I = 0.9176$ [A] (hacia la derecha)

e) $\dim(B) = M\ T^{-2}\ I^{-1}$

10. a) F [N] = 0.0092 [N/A] I [A]

b) $\ell = 0.0305$ [m]

c) $\vec{F} = 5.49\ \hat{j}$ [mN]

d) F [N] = 0.0092 [N/A] I [A] (modelo matemático del inciso a)

11. a) F [N] = 0.00227 [N] sen ϕ [1]

b) $m = i\ \ell\ B$

c) $\ell = 0.6238$ [m]

d) B = 1.7315 [mT]

e) F = 1.9101 [mN]

12. $\vec{F} = -\,0.0314\ \hat{i} + 0.0375\ \hat{j} + 0.0469\ \hat{k}$ [N]

13. a) F [N] = 0.008625 [N/A] i [A]

b) $\vec{B} = 0.1816\ \hat{j}$ [T]

c) $\vec{F} = -\,0.005175\ \hat{k}$ [N]

d) $F_{máx} = 0.02243$ [N]

e) $V_{ab} = 6.89$ [V]

14. a) $\varphi = 39.9772$ [°]

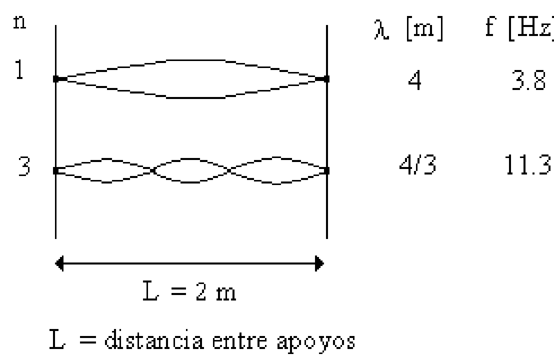
b) $\vec{F} = -\,4.41\ \hat{k}$ [mN]

Movimiento ondulatorio

Ejercicios resueltos

1.Un alumno generó varios patrones de ondas estacionarias en el laboratorio de Física Experimental. La distancia entre apoyos que utilizó era 2 [m]. Varió la longitud de onda (λ) y midió la frecuencia (f) correspondiente, parte de las mediciones se muestran en la figura. Sabiendo que la longitud de onda fue la variable independiente, determine en el SI:

a) La rapidez de propagación de la onda.
b) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento.
c) La densidad lineal de la cuerda si la tensión que se le aplicó fue 2.4 [N].
d) El porcentaje de error de exactitud si la rapidez teórica de la onda era 18 [m/s].



Resolución:

a) Las variables del experimento longitud de onda (λ) y frecuencia (f) no guardan una relación lineal, por lo tanto será necesario hacer un cambio de variable. Se propone un modelo matemático lineal que relacione al periodo (τ) en función de la longitud de onda (λ), entonces las variables involucradas serían las de la tabla que se muestra a continuación, recordando que el periodo es el recíproco de la frecuencia:

λ [m]	τ [s]
4	0.2632
4/3	0.0885

Sabemos que la rapidez de propagación de una onda se puede calcular como v = f λ, lo que se puede escribir como $v = \frac{\lambda}{\tau}$, de esta última expresión podemos despejar el periodo, es decir $\tau = \frac{\lambda}{v}$, o bien $\tau = \left(\frac{1}{v}\right)\lambda$, si comparamos esto último con el modelo matemático propuesto al principio de este inciso, es decir con $\tau = m\,\lambda + b$, podemos concluir que la pendiente es $m = \left(\frac{1}{v}\right)$, por lo tanto para obtener la rapidez de propagación de la onda obtendremos la pendiente:

$$m = \frac{\Delta\tau}{\Delta\lambda} = \frac{(0.0885 - 0.2632)\ [s]}{(4/3\ \ - 4)\ [m]} = \frac{-0.1747\ \ [s]}{-2.6667\ \ [m]} = 0.0655\ \left[\frac{s}{m}\right],$$ con esta pendiente podemos determinar la rapidez, esto es: $v = \dfrac{1}{0.0655\left[\frac{s}{m}\right]}$, $v = 15.2643\ \left[\frac{m}{s}\right]$.

b) Determinaremos la ordenada al origen con la pendiente obtenida en el inciso anterior y uno de los puntos experimentales que se tienen, es decir:

$b = \tau_1 - m\,\lambda_1 = (0.2632\ [s]) - (0.0655\ [s/m])(4\ [m]) = 0.0012\ [s]$, entonces el modelo es

$$\tau\ [s] = 0.0655\left[\frac{s}{m}\right]\lambda\ [m] + 0.0012\ [s].$$

c) Sabemos que la rapidez de propagación, en una onda mecánica transversal, está dada por

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}\ ;\ \text{de donde}\ \mu = \frac{T}{v^2},\ \text{entonces}\ \mu = \frac{2.4\ \ N}{\left(15.2643\left[\frac{m}{s}\right]\right)^2} = 0.0103\left[\frac{kg}{m}\right].$$

d) El porcentaje de error de exactitud esta dado por

$$\%EE = \left|\frac{v_{\text{teórica}} - v_{\text{experimental}}}{v_{\text{teórica}}}\right| \times 100\%\ ,\ \text{entonces}$$

$$\%EE = \left|\frac{(18 - 15.2643)}{18}\right| \times 100\% = 15.1983\ \%.$$

2. En un experimento de ondas estacionarias y modos de vibración en una cuerda tensa, en el Laboratorio de Física Experimental, se obtuvieron las lecturas de longitud de onda (λ) y frecuencia (f) que se muestran; la aceleración gravitatoria del lugar era 9.78 [m/s^2]. Con base en ello, determine:

n [1]	λ [m]	f [mHz]
3	2.0	29 900
5	1.2	51 500

a) La rapidez de propagación de la onda, a partir del modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento.
b) La masa que se utilizó para tensar la cuerda si la densidad lineal de esta última era 0.0003 [kg/m].
c) La longitud de la cuerda si su masa era de 0.84 [g], exprese el resultado en el sistema c.g.s. gravitatorio, es decir en [cm].

Resolución:

a) Las variables longitud de onda "λ" y frecuencia "f" no guardan una relación lineal, por lo tanto es necesario realizar un cambio de variable, se propone utilizar el periodo, que es el recíproco de la frecuencia; entonces los valores a considerar para el modelo matemático serán

λ[m]	2.0	1.2
τ[s]	0.0334	0.0194

El modelo matemático tendrá la forma $\tau = m\,\lambda + \text{b}$, cuya pendiente es $m = \dfrac{\Delta\tau}{\Delta\lambda}$,

por lo tanto $m = \dfrac{(0.0194 - 0.0334)\,[\text{s}]}{(1.2 - 2)\,[\text{m}]} = 0.0175\left[\dfrac{\text{s}}{\text{m}}\right]$, el significado físico de la pendiente de este modelo matemático es $m = \dfrac{1}{\text{v}}$, entonces

$$\text{v} = \frac{1}{0.0175\left[\dfrac{\text{s}}{\text{m}}\right]} = 57.1429\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right].$$

b) Sabemos que la rapidez de propagación en una onda mecánica y transversal está dada por $\text{v} = \sqrt{\dfrac{\text{T}}{\mu}}$, de donde la tensión aplicada a la cuerda se puede calcular como $\text{T} = \mu\,\text{v}^2$, por otra parte la tensión es $\text{T} = \text{m}_\text{P}\cdot\text{g}$, igualando estas últimas dos expresiones tenemos $\text{m}_\text{P}\cdot\text{g} = \mu\,\text{v}^2$, de donde podemos despejar la masa que se utilizó para tensar a la cuerda, es decir

$$\text{m}_\text{p} = \frac{\mu\,\text{v}^2}{\text{g}},\ \text{entonces}\ \text{m}_\text{p} = \frac{\left(0.0003\left[\dfrac{\text{kg}}{\text{m}}\right]\right)\cdot\left(57.1429\left[\dfrac{\text{m}}{\text{s}}\right]\right)^2}{9.78\left[\dfrac{\text{m}}{\text{s}^2}\right]} = 0.1002\ [\text{kg}].$$

c) La densidad lineal de la cuerda está dada por $\mu = \dfrac{\text{m}_\text{c}}{\ell_\text{c}}$ de donde podemos despejar la longitud de dicha cuerda, es decir $\ell_\text{c} = \dfrac{\text{m}_\text{c}}{\mu} = \dfrac{(0.00084\,[\text{kg}])}{0.0003\left[\dfrac{\text{kg}}{\text{m}}\right]} = 2.8\ [\text{m}] = 280\ [\text{cm}]$.

3. En un experimento de ondas se tensó una cuerda y se generaron varios patrones de ondas estacionarias con ella; se midieron la longitud de onda y la frecuencia que se muestran en la tabla. Con base en ello, determine en el SI:

frecuencia [Hz]	14	28	42	56
longitud de onda [cm]	33.6	16.81	11.21	8.4

a) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento. Considere que la ordenada al origen es despreciable y que la variable independiente fue la frecuencia.
b) La rapidez de propagación de la onda y su expresión dimensional.
c) La longitud de la cuerda utilizada si su masa es 80 [g] y la tensión que se le aplicó fue 3 [N].

Resolución:

a) La relación entre las variables de la tabla no es lineal, por lo tanto es necesario realizar un cambio de variable, sacaremos el recíproco de la frecuencia, es decir el periodo, por lo tanto los valores a considerar para determinar el modelo matemático serán:

τ [s]	λ [m]
0.0714	0.336
0.0357	0.1681
0.0238	0.1121
0.0179	0.084

El modelo matemático tendrá la forma $\lambda = m\,\tau + b$, cuya pendiente es $m = \dfrac{\Delta\lambda}{\Delta\tau}$, por lo tanto

$$m = 4.7077\left[\frac{m}{s}\right],$$

entonces el modelo matemático lineal es $\lambda\,[m] = 4.7077\left[\frac{m}{s}\right]\tau\,[s]$.

b) La pendiente de este modelo es $m = v$, por lo tanto la rapidez de propagación de la onda es

$v = 4.7077\left[\frac{m}{s}\right]$ y su expresión dimensional es $\dim(v) = L\,T^{-1}$.

c) La rapidez de propagación está dada por $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$; de donde $v^2 = \dfrac{T}{\mu} = \dfrac{T}{\left(\dfrac{m_c}{\ell_c}\right)} = \dfrac{T\,\ell_c}{m_c}$,

de esta última expresión podemos despejar la longitud de la cuerda, es decir

$$\ell_c = \frac{v^2\,m_c}{T} = \frac{\left(4.7077\left[\frac{m}{s}\right]\right)^2\cdot(0.08\,[kg])}{3\,[N]} = 0.591\,[m].$$

4. En un experimento de ondas en una cuerda tensa, se varió la frecuencia (f) y se midió la longitud de onda (λ) correspondiente. Se obtuvo el modelo matemático siguiente:

$$\tau\ [s] = 0.004\ [s] + 0.0253\ [s/m]\ \lambda\ [m]$$

Determine:

a) La tensión aplicada a la cuerda si su densidad lineal era 1.658 [g/m]. Exprese el resultado en el sistema c.g.s. absoluto, es decir en [dinas]. Considere que 10^5 [dinas] = 1 [N].

b) La frecuencia (valor experimental) de la onda que se tendría si su distancia de cresta a cresta fuese 1 [ft] = 0.3048 [m].

Resolución:

a) El modelo matemático proporcionado tiene la forma $\tau = b + m\,\lambda$, cuya pendiente es $m = v^{-1}$, por lo tanto $v = \left(0.0253\left[\frac{s}{m}\right]\right)^{-1} = 39.5257\left[\frac{m}{s}\right]$,

también sabemos que $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$; de donde $v^2 = \frac{T}{\mu}$, despejando de esta última expresión la tensión aplicada a la cuerda podemos escribir $T = v^2\,\mu$, por lo tanto

$$T = \left(39.5257\left[\frac{m}{s}\right]\right)^2 \cdot \left(0.001658\left[\frac{kg}{m}\right]\right) = 5.5903\,[N]\cdot\left(\frac{10^5\,[\text{dinas}]}{1\,[N]}\right),$$

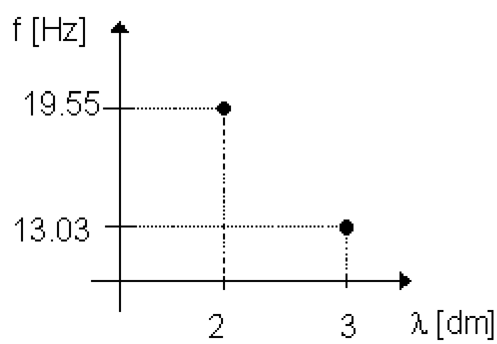
$$T = 259\,026.07\ [\text{dinas}].$$

b) La distancia de cresta a cresta es la longitud de onda, por lo tanto $\lambda = 0.3048$ [m], a partir del modelo matemático podemos determinar el periodo correspondiente a esa longitud de onda, esto es

$$\tau[s] = 0.004[s] + 0.0253[s/m]\cdot(0.3048[m]) = 0.0117\,[s],\ \text{entonces}$$

$$f = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0.0117\,[s]} = 85.3866\,[\text{Hz}].$$

5. En un experimento de movimiento ondulatorio se generaron varias ondas en una cuerda tensa; se midió la frecuencia (f) de dichas ondas para algunas longitudes de onda (λ) y se obtuvo la gráfica que se muestra. Sabiendo que la aceleración gravitatoria del lugar era 9.78 [m/s^2] y que 2.5 [m] de la cuerda utilizada tenían una masa de 400 [g], determine, en gramos, el valor de la masa utilizada para tensar la cuerda y observar el movimiento ondulatorio.



Resolución:

La relación entre las variables de la gráfica no es lineal, por lo tanto es necesario realizar un cambio de variable, entonces tenemos que las variables serán las que se muestran en la tabla siguiente:

$\lambda[m]$	$\tau[s]$
0.2	0.051151
0.3	0.076746

El modelo matemático lineal que relaciona a la longitud de onda en función del periodo tiene la forma $\lambda = m\,\tau + b$, cuya pendiente es $m = \dfrac{\Delta\,\tau}{\Delta\,\lambda}$, esto es

$m = \dfrac{(0.0767 - 0.0512)\,[s]}{(0.3 - 0.2)\,[m]} = \dfrac{0.0255\,[s]}{0.1\,[m]} = 0.255\left[\dfrac{s}{m}\right]$, el significado físico de la pendiente de dicho modelo es $m = v^{-1}$, por lo tanto $v = m^{-1}$, entonces $v = \left(0.255\left[\dfrac{s}{m}\right]\right)^{-1} = 3.9216\left[\dfrac{m}{s}\right]$; sabemos, también que la rapidez de propagación está dada por $v = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$, de donde $v^2 = \dfrac{T}{\mu}$, despejando la tensión tenemos que $T = v^2\,\mu$ y como la tensión es también el producto $T = m_P\,g$, podemos escribir $m_P\,g = v^2\,\mu$, de esta última expresión podemos despejar la masa utilizada para tensar la cuerda, es decir

$$m_P = \frac{v^2\mu}{g} = \frac{v^2\left(\dfrac{m_c}{\ell_c}\right)}{g} = \frac{v^2 m_c}{g\,\ell_c}\text{, por lo tanto}$$

$$m_P = \frac{\left(3.9216\left[\dfrac{m}{s}\right]\right)^2\cdot(0.4\,[kg])}{(2.5\,[m])\cdot\left(9.78\left[\dfrac{m}{s^2}\right]\right)} = 0.2516\,[kg]\left(\frac{1000\,[g]}{1\,[kg]}\right) = 251.5983\,[g].$$

6. Se generaron varios patrones de ondas en una cuerda tensa; se midieron las longitudes de onda (λ), las frecuencias (f) correspondientes y se obtuvo la tabla que se muestra. Sabiendo que los patrones de onda que se generaron son de tipo senoidal de la forma $y\,(x\,,\,t) = A\,sen\,(\,\omega\,t - k\,x\,)$, determine en el SI:

λ [m]	0.4	0.5	0.6
f [Hz]	56	44	37

a) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento; considere que la variable independiente fue la longitud de onda y que la ordenada al origen es despreciable.
b) La rapidez de las ondas, basándose en el modelo del inciso anterior.
c) La ecuación de onda para una perturbación cuya amplitud es 0.05 [m], frecuencia $65/(2\pi)$ [Hz] y longitud de onda $(2\pi)/28$ [m].

Resolución:

a) Como la relación entre las variables frecuencia y longitud de onda no es lineal, será necesario hacer un cambio de variable; lo adecuado entonces será trabajar con las variables longitud de onda y periodo. El modelo matemático lineal tendrá la forma $\tau = m\,\lambda$, cuya pendiente es

$m = \Delta\tau / \lambda\Delta$; para determinar el modelo matemático utilizando el método de la suma de los cuadrados mínimos se puede elaborar la tabla siguiente:

λ[m]	τ[s]	$\lambda \cdot \tau$ [m·s]	λ^2[m^2]
0.4	0.0179	0.00716	0.16
0.5	0.0227	0.01135	0.25
0.6	0.0270	0.01620	0.36
$\Sigma\lambda$=1.5	$\Sigma\tau$=0.0676	$\Sigma\lambda\cdot\tau$=0.03471	$\Sigma\lambda^2$=0.77

A partir de las expresiones del método de mínimos cuadrados mostradas en el Apéndice de este Cuaderno de Ejercicios tenemos

$$m = \frac{(3)(0.0371[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}]) - (1.5[\mathrm{m}])(0.0676[\mathrm{s}])}{(3)(0.77[\mathrm{m}^2]) - (1.5[\mathrm{m}])^2} = \frac{0.00273[\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}]}{0.06[\mathrm{m}^2]} = 0.0455 \text{ [s/m]}.$$

entonces el modelo matemático es τ [s] = 0.0455 [s/m] λ [m].

b) Dado que la pendiente del modelo matemático del inciso anterior es $m = 1 / v$, entonces $v = m^{-1} = (0.0455 \text{ [s/m]})^{-1} = 21.978$ [m/s].

c) La ecuación de onda tiene la forma $y(x, t) = A \operatorname{sen}(\omega t - kx)$, sabemos que la frecuencia angular está dado por $\omega = 2\pi f$, por lo tanto $\omega = 2\pi (65/2\pi)$ [rad/s] = 65[rad/s], por otra parte el número de onda se puede calcular como $k = 2\pi / \lambda$, entonces $k = 2\pi / (2\pi / 28)$ [rad/m] = 28[rad/m], con base en esto la ecuación de onda es

$y(x, t) = 0.05 \operatorname{sen}(65 \text{ [rad/s] } t \text{ [s]} - 28 \text{ [rad/m] } x \text{ [m]})$ [m].

Movimiento ondulatorio

Ejercicios propuestos

1. En cierto laboratorio de física se realizaron mediciones de longitud de onda (λ) y frecuencia (f), los resultados experimentales se muestran en la tabla. Con base en ello determine:

a) El mejor estimador de la rapidez de la onda.
b) El modelo matemático lineal de dicho experimento. Considere la longitud de onda como variable dependiente.
c) Si la rapidez obtenida es la de una onda sonora, ¿en qué medio se propaga? (aproximadamente).
d) El valor de la longitud de onda para una frecuencia de 60 Hz.

f [Hz]	λ [m]
340	1.0
170	2.0
113	3.0
85	4.0
68	5.0
56	6.0
48	7.0
42	8.0
37	9.0
34	10.0

Medio	*v* [m/s]
agua	1493
aire	343
hierro	5130
goma	54

2. La cuerda más corta de un piano mide 5.1 [cm] y genera una frecuencia de 4 186 [Hz] al pulsarse. La cuerda más larga del piano mide 1.98 [m] y genera 32.8 [Hz]. Calcule la relación de la densidad lineal de la cuerda larga entre la densidad lineal de la cuerda corta. La tensión en cada cuerda es la misma.

3. A una cuerda elástica e inextensible se le ata en uno de sus extremos y en el otro se le aplica una tensión. Dicha cuerda tiene una masa de 1.25 [kg] y una longitud de 5 [m] y al excitar uno de sus extremos con perturbaciones sinusoidales de la forma $y(x,t) = 0.03 \text{ sen } (\omega t - k x)$ [m] se obtuvieron los datos de frecuencia y longitud de onda mostradas en la tabla. Determine, en el SI:

a) La rapidez de propagación de la onda en la cuerda.
b) La tensión que se aplicó a la cuerda.
c) Si $y = 0.03 \text{ sen } (120\pi t - 8\pi x)$ [m], determine la amplitud, la frecuencia angular y la longitud de onda de la perturbación.

f [Hz]	λ [m]
5	3.0
10	1.5
15	1.0
20	0.75
25	0.60
30	0.50

4. En un enlace vía satélite, entre la cd. A y la cd. B, ambas al nivel del mar, se obtuvieron las mediciones de la tabla. Sabiendo que las ciudades distan 1,000 [km] entre sí y que el satélite está situado a 35 788 [km] sobre el nivel del mar; determine:

a) El modelo matemático lineal que relacione la longitud de onda de la señal con su frecuencia. Elija a λ como la ordenada.
b) El significado físico de la pendiente.
c) La rapidez (experimental) de propagación de la señal.
d) El tiempo que tarda la señal en llegar de la cd. A a la B, si el satélite se encuentra en medio de las dos ciudades y la señal se propaga con rapidez constante en la atmósfera. Desprecie el efecto de curvatura de la Tierra y considere que la rapidez de la señal es constante.

λ [m]	f [GHz]
0.30	1
0.25	1.1
0.21	1.3
0.18	1.4

5. En una línea de transmisión viaja un mensaje analógico. Se tiene la información que se muestra en la tabla. Con base en ello, determine:

a) La rapidez de propagación con la que viaja dicho mensaje.
b) ¿Cuántos ciclos en cada segundo se tendrían si la longitud de onda fuese λ = 150 [Å]?
c) ¿Cuál sería la distancia de cresta a cresta si el periodo fuese de 0.01 [μs]?

λ [Å]	T [μs]	f [MHz]
200	0.0500	20
100	0.0250	40
66	0.0166	60
50	0.0125	80
40	0.0100	100
33	0.0083	120

1 [Å] = 1×10^{-10} [m]

6. Si una cuerda del violín, que mide 33 cm, se pulsa, genera la nota *"la"* cuya frecuencia es de 440 Hz.

a) ¿A qué distancia del puente debe pisarse la cuerda para generar la nota *"mi"*, cuya frecuencia es de 659 Hz ?
b) Si la tensión de ésta fuese 55 N, ¿cuál sería su masa, en [mg]?

7. En el laboratorio de Física Experimental se realizó un experimento de ondas generando un patrón de ondas estacionarias y se obtuvo la tabla que se muestra. Si la distancia entre los puntos de apoyo de la cuerda fue 2 [m], se utilizó una masa de 200 [g] para tensar dicha cuerda y $g = 9.78$ [m/s^2] determine:

a) El modelo matemático lineal que representa el fenómeno estudiado. Considere a la longitud de onda (λ) en el eje de las abscisas y que la ordenada al origen es despreciable.
b) La rapidez de propagación de la onda a partir del modelo matemático anterior.
c) La densidad lineal de la cuerda y su expresión dimensional en el SI.
d) Si la tensión aumenta al cuádruple de la indicada ¿cómo se modificaría la rapidez de propagación de la onda?

n (modo de vibración)	f [Hz]
1	4.8
2	11.2
3	15.0
4	20.6
5	26.7
6	29.8

8. Una cuerda inextensible se ata en uno de sus extremos. Se genera una onda transversal con una frecuencia de 10 ciclos en cada segundo. Si la longitud de onda medida fue 1.25 [m] determine:

a) La tensión que se le aplicó a la cuerda, si ésta tiene una longitud de 2 [m] y su masa es de 25 [mg], expresándola en dinas, si se sabe que 1 [N] = 10^5 [dinas].
b) La frecuencia angular de la señal y su expresión dimensional en el SI.

9. Estudiando en la Ciudad de México la propagación de ondas transversales en una cuerda tensa, cuya densidad es 318 [kg/m^3] y el diámetro de su sección transversal es 4 [mm], se generaron varios patrones de onda estacionaria y se midieron los valores de frecuencia (f) para varios modos de vibración (n) y los datos registrados se presentan en la tabla. Considerando que para el primer modo de vibración la distancia entre nodos fue de 3 [m], determine:

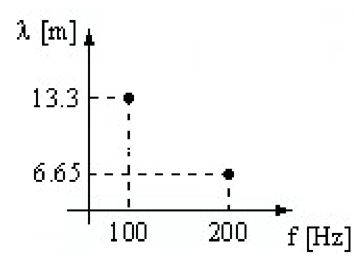
a) El modelo matemático lineal que relaciona las variables período y longitud de onda. Considere la longitud de onda (λ) en el eje de las abscisas.
b) La rapidez de propagación de las ondas.

c) La densidad lineal de la cuerda utilizada considerando que en el modo de vibración unitario se utilizó toda la cuerda entre los puntos de apoyo.
d) El valor de la masa que se utilizó para tensar la cuerda.

n	f [mHz]
1	10 100
2	19 800
3	29 900
4	41 000
5	51 500
6	59 000

10. En un laboratorio se transmitió una onda sonora a través de un gas. Con las mediciones realizadas se obtuvo la gráfica que se muestra. Con base en ello determine:

Gas (a 20 °C)	rapidez del sonido [m/s]
aire	344
helio	999
hidrógeno	1330



a) El modelo matemático lineal que relaciona las variables del experimento. Considere que la ordenada al origen es despreciable.
b) El significado físico de la pendiente del modelo anterior y su expresión dimensional en el SI.
c) De acuerdo con la tabla que se muestra, identifique el gas utilizado en el experimento.
d) A partir del modelo obtenido, la longitud de onda que se tendría para una frecuencia de 300 [Hz].
e) Suponiendo que el gas utilizado hubiese sido aire, ¿qué longitud de onda se tendría para un periodo τ = 10 [ms]?

11. En una cuerda, fija en uno de sus extremos, se generaron varios patrones de onda estacionarios. Se dejó fija la frecuencia y cambiando las masas se varió la rapidez de propagación de la onda obteniéndose la tabla que se muestra. Con base en ello, encuentre, en el SI:

v [m/s]	λ [dm]
15	5.4
17	6
19	6.8
21	7.5

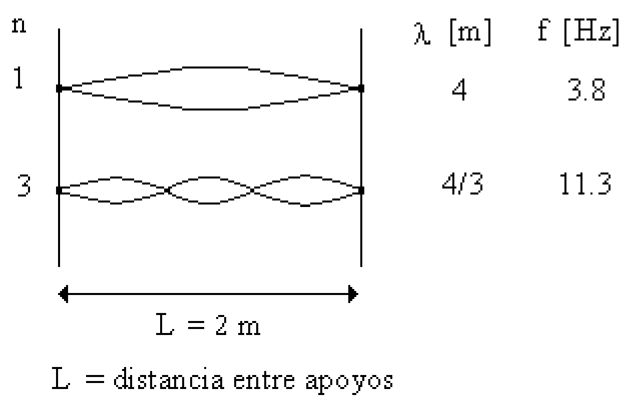
a) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento. Considere que la variable dependiente fue la longitud de onda.
b) El periodo de la señal propagada.

c) Si la rapidez de propagación de la onda fuese v = 25 [m/s], ¿cuál sería la longitud de onda, la frecuencia, la frecuencia angular y el número de onda correspondientes?

12. La cuerda de un instrumento musical se cambió por otra del mismo material, pero con un diámetro dos veces mayor que el original. ¿Cómo debe ser la tensión de la cuerda para que su frecuencia de vibración sea la misma que para la cuerda original?

13. Un alumno generó varios patrones de ondas estacionarias en el laboratorio de Física Experimental. La distancia entre apoyos que utilizó era 2 [m]. Varió la longitud de onda (λ) y midió la frecuencia (f) correspondiente, parte de las mediciones se muestran en la figura. Sabiendo que la longitud de onda fue la variable independiente, determine en el SI:

a) La rapidez de propagación de la onda.
b) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento.
c) La densidad lineal de la cuerda si la tensión que se le aplicó fue 2.4 [N].
d) El porcentaje de error de exactitud si la rapidez teórica de la onda era 18 [m/s].



14. En un experimento de ondas se varió la frecuencia, se midió la longitud de onda (λ) y se determinó el periodo (τ) correspondientes, obteniéndose la tabla que se muestra. Con base en ello, determine:

a) El modelo matemático lineal que relaciona las variables del experimento, considere a la variable λ en el eje de las abscisas.
b) A partir del modelo del inciso anterior, la rapidez de propagación de la onda, la frecuencia angular y el número de onda para una longitud de onda de 0.35 [m].

λ [m]	f [Hz]	τ [s]
0.2	14.28	0.07
0.3	10	0.1
0.4	7.69	0.13

15. En un experimento de movimiento ondulatorio se generaron varios patrones de ondas estacionarias con una cuerda que se tensó utilizando una masa M. Se varió la frecuencia y se midió la longitud de onda correspondiente obteniéndose la tabla que se muestra. Sabiendo que la aceleración gravitatoria del lugar era 9.78 [m/s^2], determine:

a) La rapidez de propagación de la onda.
b) La longitud de la cuerda utilizada si la masa M era 1.2 veces la masa de la cuerda.

f [Hz]	7.5	8.1	9.2	10.5
λ [cm]	50	45	40	35

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. a) v = 335.6774 [m/s]
   b) λ [m] = 335.6774 [m/s] τ [s] + 0.0257 [m]
   c) aire
   d) λ = 5.6203 [m]

2. μ_2 / μ_1 = 10.8059 [1]

3. a) v = 15 [m/s]
   b) T = 56.25 [N]
   c) A = 0.03 [m], $\omega = 120\pi$ [rad/s], λ = 0.25 [m]

4. a) λ [m] = (3.9511×10^8 [m/s]) τ [s] – 0.1 [m]
   b) *m* = v (rapidez de propagación)
   c) v = 3.9511×10^8 [m/s]
   d) t = 181.17 [ms]

5. a) v = 0.4003 [m/s]
   b) f = 26.6867 [MHz]
   c) λ = 4 [nm]

6. a) d = 0.2203 [m]
   b) m = 215.22 [mg]

7. a) τ [s] = 0.0534 [s/m] λ [m]
   b) v = 18.7266 [m/s]
   c) μ = 5.5776 [g/m] ; dim(μ) = $M\,L^{-1}$
   d) aumenta al doble.

8. a) T = 195.31 [dinas]
   b) $\omega = 20\pi$ [rad/s] ; dim(ω) = T^{-1}

9. a) τ [s] = 0.0165 [s/m] λ [m]
   b) v = 60.477 [m/s]
   c) μ = 1.332 [g/m]
   d) m = 498.1 [g]

10. a) λ [m] = 1330 [m/s] τ [s]
    b) *m* = v ; [*m*] = $L\,T^{-1}$
    c) hidrógeno.
    d) λ = 4.4333 [m]
    e) λ = 3.44 [m]

11. a) λ [m] = 0.0355 [s] v [m/s] + 0.0035 [m]
b) τ = 35.5 [ms]
b) λ = 0.891 [m], f = 28.169 [Hz], ω = 176.9911 [rad/s], k = 7.0518 [rad/m]

12. a) $T_{nueva} = 4\ T_{original}$

13. a) v = 15.2643 [m/s]
b) τ [s] = 0.0655 [s/m] λ [m] + 0.0012 [s]
c) μ = 0.0103 [kg/m]
d) %EE = 15.1983%

14. a) τ [s] = 0.3 [s/m] λ [m] + 0.01 [s]
b) v = 3.3333 [m/s], ω = 54.6364 [rad/s], k = 17.952 [rad/m]

15. a) v = 3.848 [m/s]
b) ℓ_{cuerda} = 1.2617 [m]

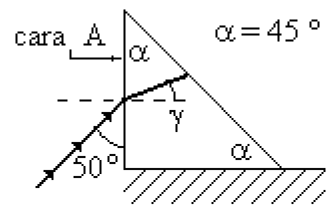
Óptica geométrica

Ejercicios resueltos

1. En un prisma, rodeado de aire ($n_{aire} = 1$), colocado como se muestra en la figura, se hizo incidir un rayo de luz monocromática en la cara A. Sabiendo que $c = 3\times10^8$ [m/s], determine en SI:

a) El índice de refracción del prisma si se sabe que la rapidez de propagación dentro del mismo es 187.5×10^6 [m/s]. Indique también su expresión dimensional.

b) El ángulo de transmisión que forma el rayo de luz dentro del prisma, es decir, el ángulo γ que se indica.



Resolución:

a) El índice de refracción del prisma está dado por el cociente:

$$n_p = \frac{c}{v_p} = \frac{3\times10^8 \frac{m}{s}}{187.5\times10^6 \frac{m}{s}}$$, entonces $n_p = 1.6$ [1] y su expresión dimensional es $[n_p] = [1]$.

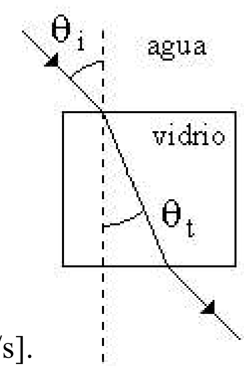
b) Aplicando la ley de Snell en el punto donde incide el rayo en la cara izquierda del prisma, tenemos que $n_a \text{sen } \theta i = n_p \text{sen } \gamma$, de donde $\text{sen}\,\gamma = \frac{n_a}{n_p}\text{sen}\,\theta i$, como el ángulo de incidencia se mide con respecto a la normal $\theta_i = 90° - 50° = 40°$, entonces

$$\text{sen } \gamma = \frac{1}{1.6}\text{sen } 40° = 0.4017$$, despejando el ángulo γ tenemos

$\gamma = \text{ang sen } (0.4017) = 23.6871[°]$ y como el resultado lo piden en el SI, entonces $\gamma = 0.4134$ [rad].

2. Un alumno hizo incidir un rayo de luz en una cara de un prisma de vidrio en forma de cubo. Este último estaba rodeado de agua ($n_a = 1.333$) y tenía 5 [cm] en cada lado, como se muestra en la figura. El alumno varió el ángulo de incidencia, midió en forma indirecta el ángulo de transmisión y obtuvo el modelo matemático siguiente:

$$\text{sen}\,\theta_t = 0.9 \text{ sen}\,\theta_i \text{ [1]}$$



Determine, en el SI:

a) La rapidez de la luz dentro del vidrio. Recuerde que $c = 3 \times 10^8$ [m/s].

b) El ángulo de transmisión (θ_t) que se tendría para un ángulo de incidencia (θ_i) de $\pi/18$ [rad].

Resolución:

a) Sabemos que la pendiente del modelo matemático proporcionado es el cociente de los índices de refracción del aire y del vidrio, es decir:

$m = \dfrac{n_a}{n_v}$; por lo tanto $n_v = \dfrac{n_a}{m} = \dfrac{1.333[1]}{0.9[1]} = 1.4811[1]$; por otra parte el índice de refracción del vidrio se puede escribir como $n_v = \dfrac{c}{v_v}$, de donde podemos despejar la rapidez de la luz en el vidrio, es decir $v_v = \dfrac{c}{n_v} = \dfrac{3x10^8\,[m/s]}{1.4811} = 2.026x10^8\left[\dfrac{m}{s}\right]$.

b) De acuerdo con la ley de Snell, tenemos

$n_a \operatorname{sen}\theta_i = n_v \operatorname{sen}\theta_t$; por lo tanto $\operatorname{sen}\theta_t = \dfrac{n_a}{n_v}\operatorname{sen}\theta_i$, sustituyendo tenemos

$\operatorname{sen}\theta_t = \dfrac{1.333}{1.4811}\operatorname{sen}(\pi/8) = 0.1563$, de donde el ángulo de transmisión es

$\theta_t = \operatorname{ang\,sen}(0.1563)$, es decir $\theta_t = 0.1569\,[\text{rad}]$.

3. Al realizar una práctica de óptica geométrica, un alumno hizo incidir desde el aire ($n_{aire} \approx 1$) varios rayos de luz a una muestra de vidrio y obtuvo la tabla que se muestra. Con base en ello, determine:

ángulo de incidencia θ_i [°]	30	40
ángulo de transmisión θ_t [°]	17.1	22.22

a) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento. Considere que el ángulo de incidencia fue la variable independiente y que la ordenada al origen es despreciable.

b) El índice de refracción del vidrio.

c) El ángulo de transmisión, dentro del vidrio, para un ángulo de incidencia de 20 [°]. Para este inciso suponga que la muestra tiene un índice de refracción de 1.5 [1].

Resolución:

a) El modelo matemático solicitado tendrá la forma sen $\theta_t = m$ sen θ_i + b,
como b = 0, entonces quedará como sen $\theta_t = m$ sen θ_i, cuya pendiente es

$m = \dfrac{\Delta \operatorname{sen}\theta_t}{\Delta \operatorname{sen}\theta_i}$; a partir de la tabla proporcionada podemos generar otra realizando los cambios de variable adecuados, es decir

$\operatorname{sen}\theta_i$ [1]	$\operatorname{sen}\theta_t$ [1]
0.5	0.2940
0.6428	0.3782

calculando la pendiente tenemos

$$m = \frac{\left(0.3782 - 0.2924\right)[1]}{\left(0.6428 - 0.5\right)[1]} = \frac{0.0842\ [1]}{0.1428\ [1]} = 0.5896\ [1]\ ,$$

por lo tanto el modelo matemático solicitado es $\quad \text{sen}\theta_t\,[1] = 0.5896\,[1] \cdot \text{sen}\theta_i\,[1]$.

b) De acuerdo con la ley de Snell, sabemos que

$n_a \text{sen}\theta_i = n_v \text{sen}\theta_t$; de donde podemos despejar $\quad \text{sen}\theta_t = \frac{n_a}{n_v}\text{sen}\theta_i$; por lo tanto el significado físico de la pendiente del modelo matemático del inciso anterior es

$m = \frac{n_a}{n_v}$; de donde el índice de refracción del vidrio será $n_v = \frac{n_a}{m}$; es decir

$$n_v = \frac{1}{0.5896} = 1.696[1]\ .$$

c) A partir de la ley de Snell, podemos escribir $\text{sen}\theta_t = \frac{n_a}{n_v}\text{sen}\theta_i = \frac{1}{1.5}\text{sen}\left(20°\right) = 0.228$,

por lo tanto el ángulo de transmisión es $\theta_t = \text{ang sen}\left(0.228\right) = 13.18[°]$.

4. En un experimento de óptica se hizo incidir un rayo de luz en un material transparente, rodeado de aire (n_{aire} = 1.00029). Se midieron los ángulos de incidencia (θ_i) y de transmisión (θ_t), obteniéndose la tabla que se muestra.

θ_i [°]	8.3	25.4	44.4	71.7
θ_t [°]	5	15	25	35

Determine:

a) El modelo matemático lineal que relaciona a las variables del experimento de refracción. Considere que el ángulo de transmisión fue la variable independiente y que la ordenada al origen es despreciable.

b) El índice de refracción del material utilizado.

Resolución:

a) Para obtener un modelo matemático lineal se hacen dos cambios de variable de manera que el modelo tendrá la forma: $\quad$ sen $\theta_i = m$ sen θ_t + b ,

como la ordenada al origen es despreciable, la expresión anterior queda como

sen $\theta_i = m$ sen θ_t, cuya pendiente es $m = \frac{\Delta\,\text{sen}\,\theta_i}{\Delta\,\text{sen}\,\theta_t}$, entonces nos podemos apoyar en la tabla siguiente:

sen θ_t [°]	0.0872	0.2588	0.4226	0.5736
sen θ_i [°]	0.1444	0.4289	0.6997	0.9494

Con el método de los mínimos cuadrados: m = 1.6549 , por lo tanto, el modelo matemático solicitado es $\operatorname{sen}\theta_i\,[1] = 1.6549\,[1] \cdot \operatorname{sen}\theta_t\,[1]$.

b) El significado físico de la pendiente del modelo matemático anterior es

$m = \dfrac{n_{material}}{n_{aire}}$, de donde $n_{material} = m\; n_{aire}$,

$n_{material} = (1.6549)\cdot(1.00029)$, es decir, $n_m = 1.6554\,[1]$.

5. En una cara de un prisma de vidrio, de forma cúbica, cuya arista era 2.5 [cm], se hizo incidir un rayo de luz con un ángulo de 18 [°] con respecto a la normal; una parte del rayo se reflejó y la otra se transmitió dentro del cubo para salir nuevamente por la cara opuesta. Sabiendo que el prisma estaba rodeado de aire (n_{aire} = 1.00029 [1]), determine:
a) El ángulo de transmisión dentro del prisma si la desviación lateral del rayo, al salir por la cara opuesta, fue de 3.4 [mm].
b) El índice de refracción del cubo.
c) El ángulo de reflexión y la rapidez de propagación de la luz dentro del prisma.

Recuerde que: $\tan\theta_t = \dfrac{\operatorname{sen}\theta_i - \frac{d}{e}}{\cos\theta_i}$; $c = 3 \times 10^8$ [m/s].

Resolución:

a) Sabemos que $\tan\theta_t = \dfrac{\operatorname{sen}\theta_i - (d/e)}{\cos\theta_i}$; por lo tanto

$\tan\theta_t = \dfrac{\operatorname{sen}18° - (3.4[\text{mm}]/25[\text{mm}])}{\cos 18°}$ = 0.1819 , entonces θ_t = ang tan (0.1819) ,

θ_t = 10.3105 [°].

b) Con base en la ley de Snell, podemos escribir $n_a \operatorname{sen}\theta_i = n_p \operatorname{sen}\theta_t$, de donde podemos despejar el índice de refracción del prisma de vidrio

$n_p = \dfrac{n_a \operatorname{sen}\theta_i}{\operatorname{sen}\theta_t}$, por lo tanto

$n_p = \dfrac{(1.0029)\operatorname{sen}18°}{\operatorname{sen}(10.3105°)}$, n_p = 1.727 [1].

c) Sabemos que el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión, es decir $\theta_r = \theta_i$, por lo tanto θ_r = 18 [°];
por otra parte con base en la definición del índice de refracción, podemos escribir

$n_p = \dfrac{c}{v_p}$, de donde podemos despejar la rapidez de la luz dentro del prisma

$v_p = \dfrac{c}{n_p} = \dfrac{3\text{x}10^8[\text{m/s}]}{1.727}$, $v_p = 1.737\times10^8$[m/s].

6. Un cubo de vidrio tiene 1 [cm] de cada lado y se encuentra rodeado de agua (n_{agua} = 4/3). Se midieron para varios ángulos de incidencia (θ_i) los correspondientes ángulos de reflexión (θ_r), según se muestra en la tabla. Si el índice de refracción del vidrio utilizado es n_{vidrio} = 1.47, determine, en el SI:
a) El modelo matemático lineal que relaciona las variables del experimento. Considere que la variable independiente fue el ángulo de incidencia y utilice el método de mínimos cuadrados.
b) El ángulo de transmisión para un ángulo de incidencia de $\pi/4$ [rad].

θ_i [rad]	0.1	0.2	0.3
θ_r [rad]	0.11	0.22	0.32

Resolución:

a) El modelo matemático lineal tendrá la forma $\theta_r = m\,\theta_i + b$,
El número de parejas ordenadas es tres, por lo tanto n = 3, como el modelo deberá obtenerse a partir del método de mínimos cuadrados, es conveniente elaborar la tabla siguiente:

θ_i [rad]	θ_r [rad]	$\theta_i \cdot \theta_r$ [rad^2]	θ_i^2 [rad]^2
0.1	0.11	0.011	0.01
0.2	0.22	0.044	0.04
0.3	0.32	0.096	0.09
$\Sigma\theta_i = 0.6$	$\Sigma\theta_r = 0.65$	$\Sigma\theta_i \cdot \theta_r = 0.151$	$\Sigma\theta_i^2 = 0.14$

Con base en las expresiones que aparecen en el Apéndice de este Cuaderno de Ejercicios, tenemos

$$m = \frac{(3)(0.151) - (0.6)(0.65)}{(3)(0.14) - (0.6)^2} = 1.05 \text{ [rad/rad]},$$

$$b = \frac{(0.65)(0.14) - (0.151)(0.6)}{(3)(0.14) - (0.6)^2} = 0.0067 \text{ [rad]},$$ por lo tanto el modelo matemático es

θ_r [rad] =1.05 [rad/rad] θ_i [rad] + 0.0067 [rad].

b) Con base en la ley de Snell, tenemos $n_a \operatorname{sen}\theta_i = n_v \operatorname{sen}\theta_t$, de donde $\operatorname{sen}\theta_t = \frac{n_a}{n_{v\,i}} \operatorname{sen}\theta_i$,

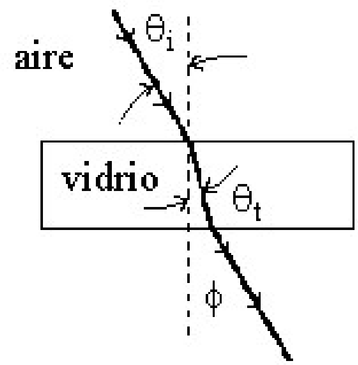
entonces $\operatorname{sen}\theta_t = \frac{(4/3)}{1.47}$ sen ($\pi/4$) = 0.6414, por lo que θ_t = ang sen (0.6414) = 0.6963 [rad].

Óptica geométrica

Ejercicios propuestos

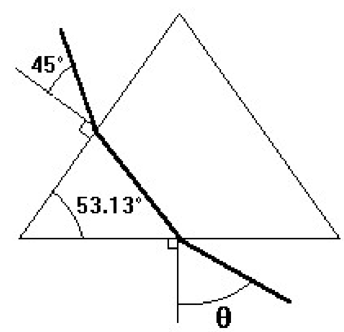
1. Se tiene una muestra de vidrio flint, como se indica en la figura. Un rayo de luz incide sobre la muestra y la velocidad del rayo en dicha muestra es de 1.6×10^8 [m/s] con una longitud de onda de 656 [nm]. Con base en ello, determine:

a) El índice de refracción del material.
b) La frecuencia con la cual se propaga la luz en el material.
c) El ángulo de refracción si $\theta_i = 30°$.
d) El ángulo con el cual sale el rayo de luz del otro lado de la muestra, es decir ϕ.



2. Con base en la figura:

a) Determinar el ángulo θ al que el rayo luminoso sale del prisma, si se sabe que el medio circundante al prisma es agua y que los índices de refracción del agua y del prisma son respectivamente: $n_a = 1.33$, $n_p = 1.65$.
b) Calcule la rapidez a la que viaja la luz dentro del prisma considerando que la rapidez de la luz en el vacío es de $c = 3\times10^8$ [m/s].



3. En un tanque cilíndrico abierto en su parte superior, el cual tiene un diámetro de 3 m y está completamente lleno de un líquido, se realizaron mediciones de presión manométrica (P) a diferentes profundidades (z), como se muestra en la tabla. Si se sabe que el valor de la aceleración de la gravedad del lugar es de 9.81 m/s^2 y que la masa del líquido contenido es de 23 962 kg, calcule:

a) El módulo del peso específico del líquido.
b) La densidad de dicho líquido.
c) El volumen del tanque en litros.
d) El índice de refracción del líquido si se sabe que cuando la luz del Sol, en el ocaso, forma un ángulo de 28° con el horizonte, la luz solar deja de iluminar el fondo del tanque.
$n_{aire} = 1.00029$

P [kPa]	z [m]
0	0
9.798	1
19.597	2
29.405	3

4. En la figura se muestra un arreglo de dos superficies una refractiva y otra reflectora. Desde el aire se hizo incidir un rayo de luz en la primera y se midieron las desviaciones del rayo que incide sobre la segunda. obteniéndose la tabla I. Con base en la figura y en las dos tablas determine:

a) El modelo matemático lineal que relaciona el ángulo de incidencia (θ_i) con el ángulo de transmisión (θ_t). Considere en el eje de las ordenadas al ángulo de incidencia.
b) El significado físico de la pendiente del modelo anterior.
c) A partir de la tabla II, indique de qué material es la superficie refractiva.
d) ¿Qué ángulo debe girar el espejo, en el sentido que se muestra y a partir de esta posición en la figura, para que el rayo reflejado sea paralelo a la normal de la superficie refractiva?

Tabla I

θ_i [º]	d [mm]
10	1.19
20	2.47
30	3.92
40	5.65
50	7.75
60	10.32

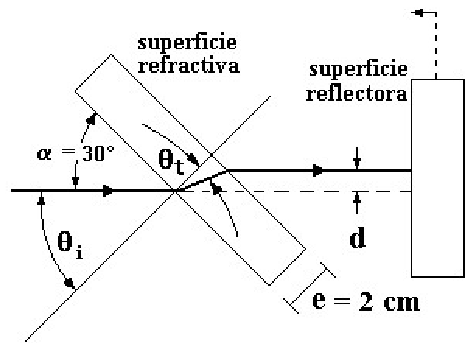


Tabla II

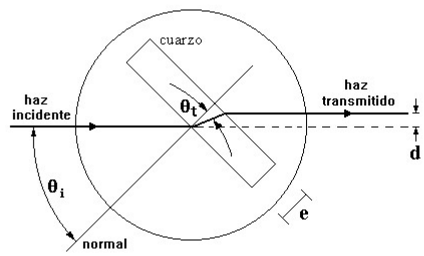
material	índice de refracción
diamante	2.42
plexiglás	1.51
vidrio	1.66

5. Con el dispositivo que se muestra en la figura, se tomaron datos del ángulo de incidencia y de la desviación lateral d, para determinar el índice de refracción del cuarzo, cuyo espesor "e" es de 5 mm. Considerando que el cuarzo se encontraba rodeado de aire:

a) Obtenga el modelo matemático que relaciona el sen θ_i en función del sen θ_t.
b) ¿Cuál es el índice de refracción del cuarzo?
c) Si el índice de refracción del cuarzo fuese 1.54, ¿cuál sería el ángulo de reflexión de un rayo de luz que incidiera con un ángulo de 60°, respecto a la normal de la superficie del cuarzo?

d) Si el índice de refracción del cuarzo fuese 1.54, ¿cuál sería el ángulo de refracción de un rayo de luz que incidiera con un ángulo de 50°, respecto a la normal de la superficie del cuarzo?

θ_i [°]	d [mm]
30	1.02
35	1.23
40	1.46
45	1.71
50	1.99
55	2.30



6. En una superficie de un material translúcido se hizo incidir un rayo de luz variando el ángulo α como se muestra en la figura. Se midió también el ángulo β dentro del material según se muestra en la tabla 1. El material se encontraba rodeado de etanol líquido. Con base en ello, determine:

a) El modelo matemático lineal que relaciona el ángulo de incidencia θ_i con el ángulo de transmisión θ_t, (considerando que el ángulo de incidencia está tabulado en el eje de las ordenadas).
b) El material del que probablemente se trata, de acuerdo con la tabla 2.
c) El ángulo de reflexión si un rayo de luz incide a 30° con respecto a la normal, suponiendo que el material es vidrio.
d) La velocidad del rayo de luz en el material, suponiendo que este último es poliestireno y que el ángulo de incidencia fuese de 45°.

Tabla 1

α [°]	β [°]
85	4.47
75	13.39
65	22.82
55	30.88
45	39.25
35	47.13

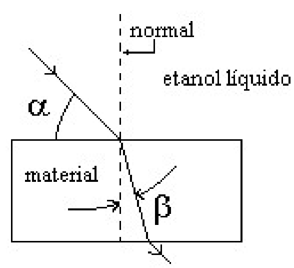


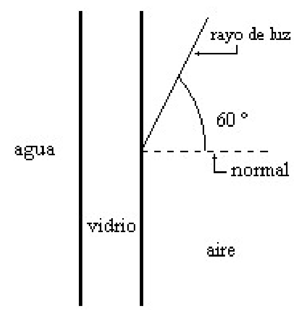
Tabla 2

material	n
etanol	1.36
vidrio	1.52
poliestireno	1.60
plástico	1.2
material “x”	1.6453

7. En una pecera de vidrio de base rectangular se coloca agua y dentro de ella unos diamantes. En la figura se muestra una sección transversal de la pecera. Con base en la figura y en la tabla que se muestra, determine:

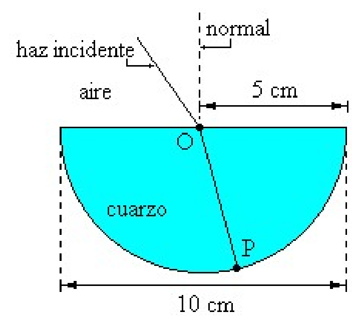
a) El ángulo de refracción o transmisión, en el agua, del rayo de luz que se muestra en la figura.
b) La rapidez del rayo de luz en el vidrio y en el agua. Recuerde que $c = 3 \times 10^8$ [m/s].

material	n
aire	1.0003
agua	1.333
vidrio	1.52
diamante	2.4



8. Un haz de luz en el aire incide sobre una superficie de una placa semicircular de cuarzo formando un ángulo de $\pi/5$ radianes con la normal como se indica en la figura. El haz respectivo tiene una longitud de onda $\lambda = 589$ [nm]. El índice de refracción del cuarzo empleado es 1.46, determine:

a) El ángulo de transmisión o refracción, en grados, en el cuarzo.
b) La velocidad del rayo de luz en el cuarzo.
c) El período del haz de luz en el cuarzo.
d) El ángulo que forma el haz emergente, es decir el haz que sale del cuarzo, con la recta tangente al material en el punto en que éste sale (punto P).

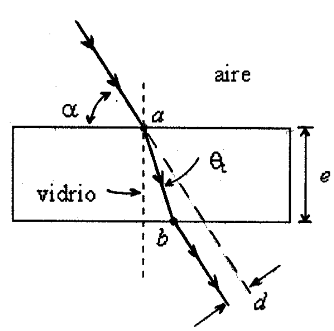


9. Un rayo de luz incide desde el aire ($n_a = 1.00029$) en el punto *a* de una placa de sección rectangular, de vidrio con índice de transmisión $n_v = 1.4$. El rayo de luz sale de la muestra en el punto *b*, la desviación *d* es 0.59 [cm] y el espesor *e* es 3.5 [cm], determine:

a) El ángulo θ_t en el vidrio, en radianes.
b) El tiempo Δt que emplea la luz en cruzar el vidrio.

$c = 3\times10^8$ [m/s]

$\alpha = 60$ °



10. En un experimento se generaron varias ondas electromagnéticas. Se modificó el medio en el cual se propagaban y con ello la rapidez de propagación de dichas ondas. Si se conocen los índices de refracción (n) de los medios empleados, las longitudes de onda (λ) correspondientes, según se muestra en la tabla, y se mantuvo la frecuencia de la señal fija, determine en el SI:

a) El modelo matemático lineal, en el SI, que relaciona a la rapidez de propagación con la longitud de onda, es decir $v = f(\lambda)$. Para ello utilice el método de mínimos cuadrados y considere que la ordenada al origen es despreciable.
b) El significado físico de la pendiente del modelo anterior y calcule la frecuencia empleada en el experimento.
c) Si el medio utilizado hubiese sido diamante, (n = 2.4), ¿cuál hubiese sido la longitud de onda del rayo utilizado? Utilice el modelo matemático obtenido en el primer inciso.
d) Considerando el rayo del inciso anterior, si el ángulo de incidencia hubiese sido 36 [°], con respecto a la normal, ¿cuál hubiese sido el ángulo de reflexión al incidir en el diamante?

medio	n	λ [nm]
hielo (H_2O)	1.309	389.77
Fluorita (CaF_2)	1.434	355.79
Cuarzo (SiO_2)	1.544	330.44
Circonita ($ZrO_2 \cdot SiO_2$)	1.923	265.32

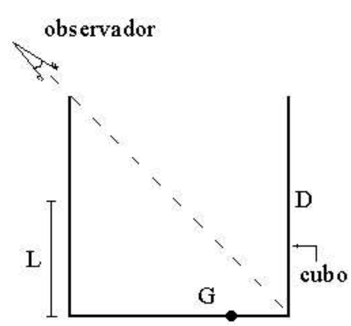
c = 300 000 [km/s]

11. En un experimento de óptica se hizo incidir un rayo de luz en un cubo de vidrio (n_{vidrio} = 1.7) rodeado de aire ($n_{aire} \approx 1$). Se midieron los ángulos de incidencia (θ_i) y los ángulos de reflexión (θ_r) correspondientes, determine, en el SI:

a) El modelo matemático que relaciona a las variables del experimento, considere que el ángulo de incidencia fue la variable independiente y que la ordenada al origen es despreciable.
b) El ángulo de refracción o transmisión (θ_t) dentro del vidrio si $\theta_i = \pi/4$ [rad].

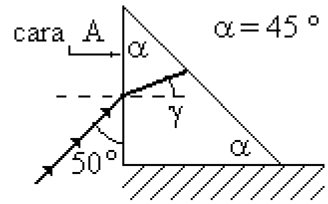
θ_i [°]	θ_r [rad]
5	0.09
15	0.267

12. El cubo de la figura es de paredes opacas, de 40 [cm] de lado y se encuentra rodeado de aire. Se tiene una marca en el punto G, a 10 [cm] de la pared D. El observador ve toda la pared D, pero no ve nada del fondo. Si se agrega agua, cuyo índice de refracción es 4/3, hasta una altura L = 26.7 [cm] para que el observador vea la marca (punto G), determine, en el SI, el ángulo de transmisión en el líquido.



13. En un prisma, rodeado de aire ($n_{aire} = 1$), colocado como se muestra en la figura, se hizo incidir un rayo de luz monocromática en la cara A. Sabiendo que $c = 3\times10^8$ [m/s], determine en SI:

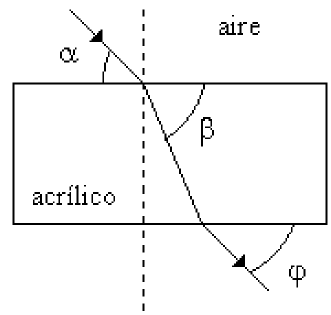
a) El índice de refracción del prisma si se sabe que la rapidez de propagación dentro del mismo es 187.5×10^6 [m/s]. Indique también su expresión dimensional.
b) El ángulo de transmisión que forma el rayo de luz dentro del prisma, es decir, el ángulo γ que se indica.



14. Un rayo de luz monocromática con longitud de onda $\lambda = 630$ [nm], proveniente del aire ($n_{aire} = 1.00029$), incide sobre una cara del prisma rectangular de acrílico que se muestra en la figura. Con base en esto y en la información, determine en el SI:

a) El índice de transmisión del acrílico.
b) El periodo de la luz en el acrílico, recuerde que la frecuencia de esta luz es constante. Además determine el ángulo φ que se muestra.

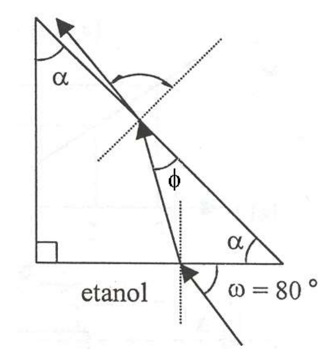
$\alpha = 30$ [°]; $\beta = 53$ [°]



15. Un rayo de luz azul de longitud de onda de 500 [Å] se hizo incidir sobre una cara de un prisma triangular de vidrio flint ($n = 1.7$) sumergido en etanol ($n = 1.36$), como se indica en la figura. Considerando que la frecuencia del rayo de luz se mantiene constante al transmitirse y que $c = 3 \times 10^8$ [m/s], determine:

a) La longitud de onda de la luz en el interior del prisma, en [nm].
b) El ángulo ϕ, en grados.

1 [Å] $= 10^{-10}$ [m]



Respuestas de los ejercicios propuestos

1. a) $n = 1.875$
   b) $f = 2.43 \times 10^{14}$ [Hz]
   c) $\theta_t = 15.466$ [°]
   d) $\phi = 30$ [°]

2. a) $\theta = 23.04$ [°]
   b) $v = 181.82 \times 10^{6}$ [m/s]

3. a) $\gamma = 9801.4$ [N/m^3]
   b) $\rho = 999.1233$ [kg/m^3]
   c) $V = 23\,983$ [ℓ]
   d) $n = 1.333$

4. a) sen θ_i [1] = 1.5103 [1] sen θ_t [1]
   b) $m = n_{mat} / n_{aire}$
   c) plexiglás
   d) 30 [°]

5. a) sen θ_i [1] = 1.5367 [1] sen θ_t [1] + 0.0029 [1]
   b) $n = 1.5267$
   c) $\theta_r = 60$ [°]
   d) $\theta_t = 29.83$ [°]

6. a) sen θ_i [1] = 1.1191 [1] sen θ_t [1] – 0.0024 [1]
   b) vidrio
   c) $\theta_r = 30$ [°]
   d) $v = 187.5 \times 10^{6}$ [m/s]

7. a) $\theta_t = 40.532$ [°]
   b) $v = 225.056 \times 10^{6}$ [m/s]

8. a) $\theta_t = 23.74$ [°]
   b) 205.479×10^{6} [m/s]
   c) 2.8664 [fs]
   d) 90 [°]

9. a) $\theta_t = 0.3653$ [rad]
   b) $\Delta t = 0.175$ [ns]

10. a) v [m/s] = 5.8753×10^{14} [s^{-1}] λ [m]
b) *m* = f; f = 5.8753×10^{14} [Hz]
c) $\lambda = 212.7551 \times 10^{-9}$ [m]
d) $\theta_r = \pi/5$ [rad] = 0.6283 [rad]

11. a) θ_r [rad] = 1.0143 [1] θ_t [rad]
b) $\theta_t = 0.429$ [rad]

12. $\theta_t = 0.559$ [rad]

13. a) $n_p = 1.6$ [1], [n_p] = [1]
b) $\gamma = 0.4134$ [rad]

14. a) $n_{ac} = 1.4394$ [1]
b) $\tau = 2.1$ [fs], $\varphi = 0.5236$ [rad] = α

15. a) $\lambda = 40$ [nm]
b) $\phi = 37.0147$ [°]

Sistemas de unidades

Ejercicios resueltos

1. La magnitud del campo magnético en el centro de una bobina circular de radio a colocada en el vacío, está dada por la expresión: $B = \frac{\mu_0 iN}{2a}$,en la cual μ_0 = permeabilidad magnética del vacío, a = radio de la bobina, N = número de espiras de la bobina, e i = corriente eléctrica en la bobina. Determine en el SI:

a) La expresión dimensional del campo magnético B, de la corriente eléctrica i y del número de espiras N.

b) La expresión dimensional de la permeabilidad magnética del vacío. Considere que el número 2 que aparece en la expresión es una constante adimensional.

Resolución:

a) Sabemos del tema VI de este curso que la magnitud de la fuerza de origen magnético está dada por: $F = Bi\ell \operatorname{sen}\alpha$; de donde $B = \frac{F}{i\ell \operatorname{sen}\alpha}$; por lo tanto la expresión dimensional del campo magnético es

$$\dim (B) = \dim \left(\frac{F}{i\ell \operatorname{sen}\alpha}\right) = \frac{LMT^{-2}}{IL(1)} = MT^{-2}I^{-1} ;$$

por otra parte, la corriente eléctrica es una dimensión en el SI, por lo que dim (i) = I ; finalmente, el número de espiras es una cantidad adimensional, por lo tanto: dim (N) = 1.

b) De la expresión proporcionada en este ejercicio: $B = \frac{\mu_0 iN}{2a}$; podemos despejar

$$\mu_0 = \frac{2aB}{iN} ,$$

por lo tanto su expresión dimensional es $(\mu_0) = \dim\left(\frac{2aB}{iN}\right) = \frac{(1)(L)(MT^{-2}I^{-1})}{(I)(1)}$, es decir dim (μ_0)= L M T^{-2} I^{-2}.

2. La fuerza de fricción viscosa (F) en cierto fluido entre dos placas se obtiene con la expresión matemática: $F = 12 \frac{A\ v}{y}$ [dina]; en la cual: A = área de cada placa en [cm^2], v = rapidez de escurrimiento en [cm/s], y = distancia entre placas en [cm]. Determine:

a) El sistema de unidades en que está la ecuación y la expresión dimensional del coeficiente $\mu = 12$ de dicha ecuación en el SI.

b) El valor del coeficiente μ en el SI.

c) La magnitud de la fuerza necesaria, en el SI, para mover una placa de 50 [cm^2] de área, con rapidez de 0.03 [m/s] si la distancia entre las placas es 5 [mm] y el fluido entre ellas es el mismo de los incisos anteriores.

Resolución:

a) Como $[F]_u$ = dina, $[y]_u$ = cm, $[A]_u$ = cm^2 y $[v]_u = \frac{cm}{s}$, se trata del sistema c.g.s. absoluto; la expresión dimensional del coeficiente μ es

$$\dim(\mu) = \dim(12) = \dim\left(\frac{F\,y}{A\,v}\right) \text{; es decir } \dim(\mu) = \frac{LMT^{-2}L}{L^2LT^{-1}} = ML^{-1}T^{-1}.$$

b) Las unidades del coeficiente, en el c.g.s. son:

$$[\mu]_{u\ cgs} = 12\frac{g}{cm\cdot s} = 12\ \frac{g\cdot cm\cdot s}{cm\cdot s\cdot cm\cdot s} = 12\frac{g\cdot cm\cdot s}{s^2\cdot cm^2} = 12\ \frac{dina\cdot s}{cm^2}$$

; por lo tanto, en el SI serían

$$[\mu]_{u\ SI} = 12\frac{g}{cm\cdot s}\left(\frac{1\ kg}{1000\ g}\right)\left(\frac{100\ cm}{1\ m}\right) = 1.2\left[\frac{kg}{m\cdot s}\right].$$

c) Sustituyendo las cantidades en el SI, tenemos

$$F\,[N] = 1.2\ \frac{kg}{m\cdot s}\ \frac{(50\times10^{-4}\,m^2)(0.03\frac{m}{s})}{5\times10^{-3}\,m} = 0.036\ [N].$$

3. La ecuación siguiente permite modelar el comportamiento termodinámico de un gas ideal:

$$P\,V = m\,R\,T$$

donde, P es la presión absoluta del gas, V su volumen, m su masa, T la temperatura absoluta del fluido y R la constante particular del gas. Si para un cierto gas de comportamiento ideal se sabe que su presión absoluta es 4 [bares], el volumen que ocupa es 5.2972 [ft^3], su masa es 2 [kg] y su temperatura empírica es 626.85 [°C], determine en el SI:

a) La expresión dimensional de la constante R.

b) El valor de la constante particular del gas en cuestión con sus unidades.

Resolución:

a) Primero despejamos la constante R de la ecuación de gas ideal:

$R = \frac{PV}{mT}$, sabemos que la expresión dimensional de las cantidades físicas involucradas son: para la presión $\dim(P) = ML^{-1}T^{-2}$; volumen $\dim(V) = L^{-3}$; masa $\dim(m) = M$; temperatura $\dim(T) = \Theta$;

por lo tanto la expresión dimensional de la constante es $\dim(\mathrm{R}) = \dfrac{\mathrm{M L^{-1} T^{-2}}\left(\mathrm{L^{-3}}\right)}{\mathrm{M}(\Theta)}$,

simplificando tenemos $\dim(\mathrm{R}) = \mathrm{L^{-2} T^{-2}} \Theta^{-1}$.

b) Para calcular el valor de la constante particular determinaremos primero las cantidades involucradas en el SI, es decir:

$$\mathrm{P} = 4[\mathrm{bar}] \cdot \left(\frac{10^5[\mathrm{Pa}]}{1\mathrm{bar}}\right) = 4 \times 10^5[\mathrm{Pa}],$$

$$\mathrm{V} = 5.2972\left[\mathrm{ft^3}\right] \cdot \left(\frac{0.3048^3\left[\mathrm{m^3}\right]}{1\mathrm{ft^3}}\right) = 0.150\left[\mathrm{m^3}\right] \text{ y}$$

$$\mathrm{T} = \left(626.85[°\mathrm{C}] + 273.15[°\mathrm{C}]\right)\left[\frac{\Delta \mathrm{K}}{\Delta °\mathrm{C}}\right] = 900[\mathrm{K}],$$

sustituyendo en la expresión donde está despejada la constante tenemos

$$\mathrm{R} = \frac{\left(4\mathrm{x}10^5[\mathrm{Pa}]\right) \cdot \left(0.15\left[\mathrm{m^3}\right]\right)}{\left(2[\mathrm{kg}]\right) \cdot \left(900[\mathrm{K}]\right)} = 33.3333\left[\frac{\mathrm{m^2}}{\mathrm{kg \cdot K}}\right] = 33.3333\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kg \cdot K}}\right].$$

4. La ecuación del calor transferido (Q) está dada por:

$$\mathrm{Q} = \mathrm{h\,A}\,(\mathrm{T_2} - \mathrm{T_1})$$

donde A = área de transferencia.
T = temperatura
h = coeficiente de transferencia de calor.

Determine, en el SI:

a) La expresión dimensional del coeficiente h.

b) El valor de h si Q = 225 [BTU], A = 5.3 [ft^2], $\mathrm{T_1}$ = 250 [°C] y $\mathrm{T_2}$ = 450 [°C].

Resolución:

a) De la ecuación podemos despejar el coeficiente, $\mathrm{h} = \dfrac{\mathrm{Q}}{\mathrm{A}\left(\mathrm{T_2} - \mathrm{T_1}\right)}$, entonces su expresión dimensional es

$$\dim(\mathrm{h}) = \frac{[\mathrm{Q}]}{[\mathrm{A}]\left[\left(\mathrm{T_2} - \mathrm{T_1}\right)\right]} = \frac{\mathrm{M\,L^2 T^{-2}}}{\mathrm{L^2}\Theta} \text{ ; simplificando tenemos } \dim(\mathrm{h}) = \mathrm{M T^{-2}}\Theta^{-1}.$$

b) Para determinar el valor de h, en el SI, calcularemos primero las cantidades físicas involucradas en la ecuación, en dicho sistema de unidades:

$$\mathrm{Q} = 225\,[\mathrm{BTU}] \cdot \left(\frac{1055\,[\mathrm{J}]}{1\,[\mathrm{BTU}]}\right) = 237\,375\,[\mathrm{J}],$$

$$\mathrm{A} = 5.3\,\left[\mathrm{ft^2}\right] \cdot \left(\frac{(0.3048\,[\mathrm{m}])^2}{1\left[\mathrm{ft^2}\right]}\right) = 0.4924\,\left[\mathrm{m^2}\right],$$

$$\mathrm{T_2} - \mathrm{T_1} = (450 - 250)[°\mathrm{C}] = 200[°\mathrm{C}]; \text{ es decir } \Delta\mathrm{T} = 200[°\mathrm{C}] = 200[\mathrm{K}],$$

$$h=\frac{237375[\mathrm{J}]}{\left(0.4924\left[\mathrm{m}^2\right]\right)\cdot\left(200[\mathrm{K}]\right)}=2410.3879\left[\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{K}}\right]\text{ o bien } h=2410.3879\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s}^2\cdot\mathrm{K}}\right].$$

5. En un movimiento de tiro parabólico, considerando despreciable la fricción del aire y que el punto de aterrizaje de la partícula está a la misma altura que el punto de lanzamiento, el alcance horizontal está dado por

$$R=\frac{v_0^2\operatorname{sen}2\varphi}{g}$$

donde v_0 = rapidez inicial de la partícula
g = aceleración gravitatoria del lugar
φ = ángulo de lanzamiento.

Determine en el SI:

a) La expresión dimensional de la cantidad física R.
b) El valor de φ si $g = 32.086$, $v_0 = 49.213$ y $R = 53.372$, sabiendo que estas últimas tres cantidades físicas están en el sistema inglés absoluto.

Resolución:

a) Para este inciso tenemos que

$$\dim(R)=\dim\left(\frac{v_o{}^2\cdot\operatorname{sen}2\varphi}{g}\right),\text{ es decir }\dim(R)=\frac{\left(LT^{-1}\right)^2(1)}{\left(LT^{-2}\right)}=\frac{L^2T^{-2}}{LT^{-2}}=L\,.$$

b) Primero calcularemos las cantidades físicas involucradas en la expresión, en el SI:

$$g=32.086\left[\frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s}^2}\right]\cdot\left(\frac{0.3048[\mathrm{m}]}{1[\mathrm{ft}]}\right)=9.7798\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right],$$

$$v_o=49.213\left[\frac{\mathrm{ft}}{\mathrm{s}}\right]\cdot\left(\frac{0.3048[\mathrm{m}]}{1[\mathrm{ft}]}\right)=15.0001\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right];$$

entonces el alcance horizontal, en el SI, es

$$R=53.372[\mathrm{ft}]\cdot\left(\frac{0.3048[\mathrm{m}]}{1[\mathrm{ft}]}\right)=16.2678[\mathrm{m}],$$

para encontrar el ángulo, despejaremos primero

$$\operatorname{sen}2\varphi=\frac{R\,g}{v_o{}^2}=\frac{\left(16.2678[\mathrm{m}]\right)\cdot\left(9.7798\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]\right)}{\left(15.0001\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]\right)^2}=0.707\ [1];$$ de donde el ángulo

solicitado es $\varphi=\frac{1}{2}\operatorname{ang\,sen}(0.707)$, esto es $\varphi=0.3926[\mathrm{rad}]$.

6. En termodinámica se utiliza con frecuencia una cantidad física denominada entalpia (o entalpía) H, la cual es una propiedad extensiva de las sustancias, que se define como:

$$\left.\begin{array}{l} H = U + P\,V, \text{ donde} \\ U = \text{energía interna.} \\ P = \text{presión absoluta} \\ V = \text{volumen.} \end{array}\right\} \text{ de la sustancia}$$

Determine en el SI:

a) La expresión dimensional de la entalpia, de la energía interna, de la presión y del volumen.

b) El valor de la entalpia si la energía interna es 23.88 [BTU], P = 0.94 [bar] y V = 28.3 [ft^3].

Resolución:

a) De acuerdo con la expresión H = U + P V, podemos escribir que la expresión dimensional de la entalpia es
dim (H) = dim (U) = dim (P V), entonces
dim (H) = $M\,L^2\,T^{-2}$ = dim (U); por otra parte
dim (P) = $M\,L^{-1}\,T^{-2}$ y
dim (V) = L^3.

b) Para determinar el valor de la entalpia en el SI, primero determinaremos la energía interna, la presión y el volumen en dicho sistema de unidades

$$U = 23.88\ [\text{BTU}]\left(\frac{1055\ [\text{J}]}{1\ [\text{BTU}]}\right) = 25\ 193.4\ [\text{J}];$$

$$P = 0.94\ [\text{bar}]\left(\frac{10^5\ [\text{Pa}]}{1\ [\text{bar}]}\right) = 94\ 000\ [\text{Pa}];$$

$$V = 28.3\ [\text{ft}^3]\left(\frac{(0.3048\ [\text{Pa}])^3}{1\ [\text{ft}^3]}\right) = 0.8014\ [\text{m}^3], \text{ entonces}$$

$$H = (25\ 193.4[\text{J}]) + (94\ 000[\text{Pa}])\ (0.8014[\text{m}^3]) = 100\ 525\ [\text{J}].$$

Sistemas de unidades

Ejercicios propuestos

1. Realice las siguientes conversiones de unidades:

a) Una cantidad X es igual a Y/Z. Las unidades de Y son $m^3 \cdot s^7$ y las de Z son $m \cdot s^{10}$. ¿Qué unidades tiene X?
b) La cantidad U es igual a V·W. El valor de V es 8 $cm \cdot s^{-2}$ y el de W es 92.3 $cm^7 \cdot s$. Obténgase el valor de U en el sistema m.k.s.
d) La cantidad L es igual a $\sqrt{\dfrac{M}{N}}$. El valor de M es 27 $cm^2 \cdot s^{-3}$ y el de N es 3 $m^8 \cdot s$. Obténgase el valor de L en el sistema c.g.s.

2. La siguiente expresión, conocida como Ley de Coulomb, permite calcular la magnitud de las fuerzas eléctricas (F) entre dos cargas eléctricas puntuales (Q_1, Q_2) en términos de la distancia que las separa (r):

$F = k\,\dfrac{Q_1 Q_2}{r^2}$ (en el SI)

a) La expresión dimensional, en el SI, de la constante k es:
b) El valor de la carga Q_1, en el Sistema Internacional, si se sabe que la magnitud de la fuerza que experimenta es F = 38 750 [dinas], la distancia que separa a las cargas es r = 0.5 [ft], la constante $k = 9 \times 10^9$ $[(N \cdot m^2)/C^2]$ y que $Q_1 = Q_2$.

Factores de conversión:
1 [ft] = 0.3048 [m]
1 [in] = 2.54 [cm]
10^5 [dinas] = 1[N] = 0.2248 [ℓb_f]

3. En un fenómeno dinámico se observa que las variables: fuerza (F), densidad (ρ), rapidez (v) y área (A), se combinan para definir a la variable R según:

$$R = \frac{2F}{\rho v^2 A}$$

En el experimento se estableció que F=400 [ℓb_f], ρ=*90* [$\ell b_m/ft^3$], v=40 [mi/h] y A=125 [in^2]. Halle el valor de R cuando cada variable se expresa en el Sistema Internacional. Recuerde que:

1 [in] = 2.54 [cm]	1 [kg_m] = 2.2046 [ℓb_m]
1 [mi] = 1609 [m]	1 [kg_f] = 9.81 [N]
1 [ft] = 0.3048 [m]	1 [kg_f] = 2.2046 [ℓb_f]

4. En un fenómeno físico se observa que las variables: flujo de masa ($\dot{m}$), densidad del agua (ρ_a), diámetro del tubo (d) y rapidez (v) del fluido en dicho tubo, se relacionan para definir a la variable δ, de acuerdo con la expresión:

$$\delta = \frac{4\dot{m}}{\rho_a \pi d^2 v}$$

Si los valores de las variables correspondientes son: $\dot{m}$ = 733.9449 [UTM/h], ρ_a = 62.4269 [ℓb/ft^3], d = 0.5 [in], v = 28.0355 [mi/h] encuentre el valor de δ en las unidades del Sistema Internacional.

Factores de conversión:

1 geokilo = 1 UTM = 9.81 [kg]	1 ℓb = 0.4536 [kg]
1 ft = 0.3048 [m]	1 ft = 12 [in]
1 in = 2.54 [cm]	1 hora = 60 [min]
1 min = 60 [s]	1 mi = 1 609 [m]

5. La expresión relativista para la variación de energía cinética de una partícula, está dada por:

$$\Delta E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}} - m_0 c^2$$

donde m es la masa de la partícula, m_0 es su masa en reposo, v es su rapidez y c es la rapidez de la luz. Si esta expresión es dimensionalmente correcta, determine la expresión dimensional, en el SI, para la variación de energía (ΔE). Calcule, además, el valor de la masa de la partícula, m, si se sabe que: m_0 = 938 [MeV/c^2], $v = 0.6c$ y ΔE = 1400 [MeV].

Considere que 1 [eV] = 1.6×10^{-19} [J] y que c = 300 000 [km/s].

6. Una unidad de viscosidad (μ)en el sistema cgs absoluto es el poise [g/(cm·s)], nombre tomado de J. L. Poiseville, médico francés que llevó a cabo experimentos pioneros en 1840 sobre flujo de agua en conductos. La viscosidad del agua (dulce o salada) a 293 [K] o 20 [°C] es alrededor de 0.01 poises. A partir de ello:

a) Exprese el valor en el Sistema Internacional.
b) Exprese el valor en el Sistema Inglés Gravitatorio.
c) Deduzca la expresión dimensional de dicha unidad en el Sistema Internacional.

7. La ley de gravitación universal de Newton se puede expresar como:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

donde: F = magnitud de las fuerzas entre los dos cuerpos de masas m_1 y m_2.
r = distancia entre los dos cuerpos.
G = constante de gravitación = 6.672×10^{-11} [(N·m^2) / kg^2] en el SI.

a) Determine el valor de la constante gravitacional (G) en el sistema cgs absoluto.
b) Si la masa del cuerpo 1 es m_1 = 12 [slug], la masa del cuerpo 2 es m_2 = 0.24 [toneladas métricas] y la distancia entre los dos cuerpos es 44 [in], calcule la magnitud de la fuerza de atracción entre ellos en el SI.

Factores de conversión:

10^5 [dinas] = 1 [N] = 0.2248 [ℓb_f]	1 [ton métrica] = 1000 [kg]
1 [slug] = 14.59 [kg]	12 [in] = 1 [ft] = 0.3048 [m]

8. A finales del siglo pasado experimentos realizados con tuberías de agua de diámetro constante demostraron que la pérdida de carga primaria (H_p) era directamente proporcional al cuadrado de la velocidad media del fluido en la tubería y a la longitud de esta última e inversamente proporcional al diámetro de la misma. La fórmula fundamental que expresa lo anterior se conoce como ecuación de Darcy-Weisbach:

$$H_p = \lambda \frac{L}{D}\frac{v^2}{2g}$$

donde: H_p = pérdida de carga primaria.
λ= coeficiente de pérdida de carga primaria.
L = longitud de la tubería.
D = diámetro de la tubería.
v = velocidad media del fluido.
g = aceleración gravitatoria.

a) Si la pérdida de carga primaria se puede expresar en unidades de longitud, metro en el SI y la ecuación es dimensionalmente homogénea determine las dimensiones en el SI del coeficiente de pérdida de carga primaria λ.
b) Suponiendo que λ es un coeficiente adimensional calcule el valor de H_p en el Sistema Internacional si v = 7.1316 [km/h], g = 9.81 [m/s^2], λ = 0.0366, D = 11.811 [in] y L = 328.084 [yd].
c) Exprese el valor de la aceleración gravitatoria anterior en el sistema ingles absoluto.
d) Si el tubo es de sección transversal circular exprese su área transversal en el sistema cgs gravitatorio.

Factores de conversión:

1 [ft] = 0.3048 [m]	1 [ℓb] = 0.4536 [kg]
1 [yd] = 0.9144 [m]	1 [in] = 2.54 [cm]
1 [kg_f] = 9.81 [N]	1 [dina] = 10^{-5} [N]

9. En la mecánica de fluidos, la expresión siguiente se conoce como número de Weber (W):

$$W = \frac{\rho v^2 L}{\sigma}$$

donde: ρ = densidad del fluido.
v = velocidad del fluido.
L = longitud del tubo que conduce al fluido.
σ = tensión superficial (fuerza / longitud).

a) Determine la expresión dimensional, en el SI, del número W.
b) El valor de la tensión superficial, en el SI, si σ = 70 [dina/cm] en el sistema cgs absoluto.
c) La densidad del fluido, en el SI, si ρ = 61.803 [$\ell b/ft^3$] en el sistema FPS absoluto.

Factores de conversión:

10^5 [Pa] = 1 [bar]	1 [ft] = 0.3048 [m]
1 [BTU] = 1.05 [kJ]	1 [N] = 10^5 [dina]
1 [ℓb] = 0.4536 [kg]	1 [kg_f] = 9.81 [N]

10. En el sistema inglés (FPS) gravitatorio se tiene la expresión siguiente que relaciona la variable W (trabajo, en $\ell b_f \cdot ft$) con las variables P (presión manométrica, en psi = $\ell b_f / in^2$) y ℓ (distancia, en ft):

$W = 4\,P + 0.5\,\ell^2$; sean A = 4 y B = 0.5, determine:

a) Las unidades de cada una de las constantes A y B en el sistema inglés gravitatorio.
b) El valor de las constantes (coeficientes numéricos) en el SI.
c) La traducción de la expresión dada al SI y el valor de W, si P = 88 [kPa] y ℓ = 15 [cm].

Factores de conversión:

1 [ft] = 0.3048 [m]	1 [N] = 10^5 dina = 0.2248 [ℓb_f]
1 [in] = 2.54 [cm]	1 [ℓb_f] = 4.448 [N]
1 [slug] = 14.59 [kg]	1 [cal] = 4.186 [J]

11. La densidad de cierto líquido se puede calcular con la expresión

$$\rho = (A + B T) e^{C P}$$

en donde ρ es la densidad del líquido en [g/cm^3], T es su temperatura en [°C], P es la presión en [atm], A, B y C son constantes. Si la expresión es dimensionalmente homogénea determine las unidades de las constantes.

12. A menudo en ingeniería se encuentran parámetros adimensionales como el número de Reynolds (Re). Si la expresión siguiente es dimensionalmente homogénea, determine en el SI:

$$Re = \frac{\rho v d}{\mu} \qquad \text{donde: } Re = \frac{\text{densidad} \times \text{rapidez} \times \text{diámetro}}{\text{viscosidad}}$$

a) La expresión dimensional de la viscosidad (μ).
b) El valor de μ si v = 1799 [ft/s], d = 5 [mm] ρ = 0.0805 [ℓb/ft^3] y Re = 14 435 [1].

1 [ft] = 0.3048 [m]; 1 [ℓb] = 0.4536 [kg]

13. En un fluido encerrado en un cilindro pistón, su energía interna U medida en BTU (Bristish Thermal Unit) se obtiene en función de otras propiedades tales como su presión absoluta p [ℓb_f/ft^2] y su volumen V [ft^3], en el sistema inglés (FPS) gravitatorio, según la ecuación:

U = 32 + 0.004 p V, que es de la forma U = a + b p V. Obtenga:

a) La expresión dimensional, en el SI, de cada una de las variables U, p y V.
b) La conversión de las constantes a = 32 y b = 0.004 a sus valores y unidades en el SI.
c) La traducción de la ecuación al SI.

Factores de conversión:

1 [ft] = 0.3048 [m]
1 [in] = 2.54 [cm]
1[N] = 0.2248 [ℓb_f]
1 [ℓb] = 0.4536 [kg]
T[°C] = T[K] – 273
1 [kg_f] = 9.81 [N]
1 [BTU] = 1 055 [J]

14. La fuerza de fricción viscosa (F) en cierto fluido entre dos placas se obtiene con la expresión:

$F = 12\,\dfrac{Av}{y}$ [dina]; en la cual: A = área de cada placa en [cm^2], v = rapidez de escurrimiento en [cm/s], y = distancia entre placas en [cm]. Determine:

a) El sistema de unidades en que está la ecuación y la expresión dimensional del coeficiente $\mu = 12$ de dicha ecuación en el SI.
b) El valor del coeficiente μ en el SI.
c) La magnitud de la fuerza necesaria, en el SI, para mover una placa de 50 [cm^2] de área, con rapidez de 0.03 [m/s] si la distancia entre las placas es 5 [mm] y el fluido entre ellas es el mismo de los incisos anteriores.

15. La magnitud del campo magnético en el centro de una bobina circular de radio a colocada en el vacío, está dada por la expresión: $B = \dfrac{\mu_0 iN}{2a}$,en la cual μ_0 = permeabilidad magnética del vacío, a = radio de la bobina, N = número de espiras de la bobina, e i = corriente eléctrica en la bobina. Determine en el SI:

a) La expresión dimensional del campo magnético B, de la corriente eléctrica i y del número de espiras N.
b) La expresión dimensional de la permeabilidad magnética del vacío. Considere que el número 2 que aparece en la expresión es una constante adimensional.

Respuestas de los ejercicios propuestos

1. a) $[X]_u = [\ m^2 / s^3\ ]$
   b) $U = 7.384 \times 10^{-14}\ [\ m^8 / s\ ]$
   c) $L = 3 \times 10^{-8}\ [\ cm^{-3} \cdot s^{-2}\ ]$

2. a) $\dim(k) = M\ L^{3}\ T^{-4}\ I^{-2}$
   b) $Q = 1\ [\mu C]$

3. $R = 0.0959\ [1]$

4. $\delta = 1.26\ [1]$

5. $\dim(\Delta E) = M\ L^{2}\ T^{-2}$, $m = 3.3252 \times 10^{-27}\ [kg]$

6. a) $\mu = 10^{-3}\ [kg/(m \cdot s)]$
   b) $\mu = 2.0878 \times 10^{-5}\ [(\ell b_f \cdot s) / ft^2\ ]$
   c) $\dim(\mu) = M\ L^{-1}\ T^{-1}$

7. a) $G = 6.672 \times 10^{-8}\ [(dina \cdot cm^2)/g^2]$
   b) $F = 2.2446 \times 10^{-6}\ [N]$

8. a) $\dim(\lambda) = 1$
   b) $H_p = 7.3207\ [m]$
   c) $g = 32.185\ [ft/s^2]$
   d) $A = 706.8583\ [cm^2]$

9. a) $\dim(W) = 1$
   b) $\sigma = 0.07\ [N/m]$
   c) $\rho = 990\ [kg/m^3]$

10. a) $[A]_u = ft \cdot in^2$; $[B]_u = \ell b_f / ft$
    b) $A = 7.8658 \times 10^{-4}\ [m^3]$, $B = 7.2966\ [N/m]$
    c) $W\ [N \cdot m] = 7.8658 \times 10^{-4}\ [m^3]\ P\ [Pa] + 7.2966\ [N/m]\ \ell^2\ [m^2]$, $W = 69.3832$ [J]

11. $[A]_u = [g/cm^3]$, $[B]_u = [g/(cm^3 \cdot °C)]$, $[C]_u = [1/atm]$

12. a) $\dim(\mu) = L^{-1}\ M\ T^{-1}$
    b) $\mu = 0.00024492\ [kg/(m \cdot s)]$

13. a) $\dim(U) = M L^{2} T^{-2}$, $\dim(p) = M L^{-1} T^{-2}$, $\dim(V) = L^{3}$
    b) $a = 33\ 760$ [J], $b = 3.1124$ [J/(N·m)]
    c) U [J] = 33 760 [J] + 3.1124 [J/(N·m)] p [N/m^2] V [m^3]

14. a) Sistema c. g. s. absoluto, $\dim(\mu) = M L^{-1} T^{-1}$
    b) $\mu = 1.2$ [kg/(m·s)]
    c) $F = 0.036$ [N]

15. a) $\dim(B) = M T^{-2} I^{-1}$, $[i] = I$, $[N] = 1$
    b) $\dim(\mu_0) = L M T^{-2} I^{-2}$

Apéndice

Algunos factores de conversión útiles para este curso:

1 [bar] = 10^5 [Pa]
1 [cal] = 4.186 [J]
1 [ft] = 0.3048 [m]
1 [ℓb] = 0.4536 [kg]
1 [BTU] = 1 055 [J]
1 [N] = 0.2248 [ℓb_f]
1 [in] = 2.54 [cm]
1 [N] = 10^5 [dinas]
1 [rpm] = 1 [revolución/minuto]
1 [slug] = 0.4536 [kg]
1 [kg_f] = 9.81 [N]

$$T\,[K] = \left(T\,[°C] + 273.15\,[°C]\right)\left[\frac{1\Delta K}{1\Delta °C}\right]$$

Expresiones del método de la suma de los cuadrados mínimos o método de los mínimos cuadrados:

$$m = \frac{n\Sigma x_i y_i - (\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}$$

$$b = \frac{(\Sigma y_i)(\Sigma x_i^2) - (\Sigma x_i y_i)(\Sigma x_i)}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}$$