ANTECEDENTES DE ELECTRICIDAD Y MAGNETISMO “VECTORES”.

Contenido

Objetivo: El objetivo de este documento es proporcionar al alumno algunos de los conocimientos necesarios e indispensables para la mejor comprensión de los temas correspondientes a las teorías de Electricidad y Magnetismo.

Introducción.

Los fenómenos electromagnéticos estudiados con mayor frecuencia se pueden resumir en las ecuaciones de Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_V$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

Donde $\vec{\nabla}$ = El operador diferencial del vector.

$\vec{D}$ = La densidad del flujo eléctrico.

$\vec{B}$ = La densidad del flujo magnético.

$\vec{E}$ = La densidad del campo eléctrico.

$\vec{H}$ = La densidad del campo magnético.

ρ_v = La densidad de la carga del volumen.

$\vec{J}$ = La densidad de la corriente.

ESCALARES Y VECTORES.

El análisis vectorial es la herramienta matemática más práctica para expresar y comprender los conceptos electromagnéticos.

Un escalar es una cantidad que sólo posee magnitud.

Cantidades como tiempo, masa, distancia, temperatura, entropía, potencial eléctrico y población son escalares.

Un vector es una cantidad que posee tanto magnitud como dirección.

Velocidad, fuerza, desplazamiento e intensidad de campo eléctrico son cantidades vectoriales. Los *tensores* son otro tipo de cantidades físicas, de las que escalares y vectores son casos especiales.

Para distinguir entre vectores y escalares, los primero suelen representarse con una letra rematada con una flecha. Como $\vec{A}$ y $\vec{B}$, o en negritas **A** y **B**, mientras que los escalares se representan con una letra mayúscula y en cursivas, como A,B y V.

La teoría electromagnética consiste, en esencia, en el estudio de ciertos campos particulares.

Un campo es una función que especifica una cantidad particular en cualquier parte de una región.

Si la cantidad es escalar o vectorial, se dice que el campo correspondiente es un campo escalar o vectorial, respectivamente. Ejemplos de campos escalares son la distribución de temperaturas en un edificio, la intensidad del sonido en un teatro, el potencial eléctrico en una región y el índice de refracción de un medio estratificado. La fuerza gravitacional sobre un cuerpo en el espacio y la velocidad de las gotas de lluvia en la atmósfera son, a su vez, ejemplos de campos vectoriales.

VECTOR UNITARIO.

Un vector **A** posee tanto magnitud como dirección. La magnitud de **A** es un escalar, el cual se escribe A o $|\vec{A}|$. Un vector unitario $\mathbf{a}_A$ a lo largo de **A** es un vector cuya magnitud equivale a la unidad (es decir, 1) y cuya dirección sigue la dirección de **A**, esto es,

$$a_A = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{\vec{A}}{A}$$

Si se tiene en cuenta que $|a_A| = 1$, A podría expresarse como

$$\vec{A} = A a_A$$

Lo que especifica completamente a **A** en términos de su magnitud A y su dirección $\mathbf{a}_A$.

Un vector **A** en coordenadas cartesianas o rectangulares puede representarse como

(A_x, A_y, A_z) o $A_x\mathbf{a_x} + A_y\mathbf{a_y} + A_z\mathbf{a_z}$

Donde A_x, A_y y A_z se llaman las componentes de **A** en las direcciones x, y *y* z respectivamente, y $\mathbf{a_x}$, $\mathbf{a_y}$ **,** $\mathbf{a_z}$ son vectores unitarios en las direcciones x, y *y* z, respectivamente.

La magnitud de un vector $\vec{A}$ está dada por

$$A = \sqrt{A^2{}_x + A^2{}_y + A^2{}_z}$$

Y el vector unitario a lo largo de **A** por

$$a_A = \frac{A_x a_x + A_y a_y + A_z a_z}{\sqrt{A^2{}_x + A^2{}_y + A^2{}_z}}$$

ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN DE VECTORES.

Dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ pueden sumarse para dar otro vector $\vec{C}$; esto es,

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

La adición de vectores se efectúa componente por componente. Así, si

$$\vec{A} = (A_x + A_y + A_z) \quad \text{y} \quad \vec{B} = (B_x + B_y + B_z),$$

$$\vec{C} = (A_x + B_x)a_x + (A_y + B_y)a_y + (A_z + B_z)a_z$$

La sustracción de vectores se realiza en forma similar

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$$

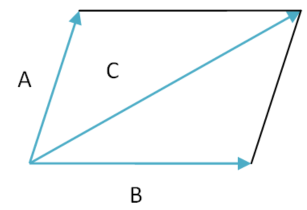
$$\vec{D} = (A_x - B_x)a_x + (A_y - B_y)a_y + (A_z - B_z)a_z$$

Gráficamente, la adición y sustracción de vectores se obtiene ya sea mediante la regla del paralelogramo o la regla del triángulo.

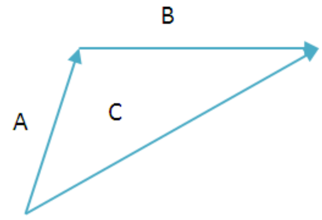
Elementos de electromagnetismo. Tercera edición.
Matthew N.O. Sadiku. Alfaomega

Adición de vectores

- Regla del paralelogramo.



- Regla del triangulo



Cuales quiera vectores dados $\vec{A}, \vec{B}\ y\ \vec{C}$ obedecen estas tres leyes algebraicas básicas:

LEY	ADICIÓN	MULTIPLICACIÓN
Conmutativa	$\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$	$\mathrm{k}\vec{\mathrm{A}}=\vec{\mathrm{A}}\mathrm{k}$
Asociativa	$\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}$	$k(l\vec{A})=(kl)\vec{A}$
Distributiva	$k(\vec{A}+\vec{B})=k\vec{A}+k\vec{B}$	

Donde k y l son escalares.

MULTIPLICACIÓN DE VECTORES.

Cuando dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ se multiplican, el resultado es un vector o un escalar; según cómo se multipliquen los vectores. Así hay dos tipos de multiplicaciones de vectores:

1.- Producto escalar (o producto punto): $\vec{A}\cdot\vec{B}$

2.- Producto vectorial (o producto cruz): $\vec{A}\times\vec{B}$

La multiplicación de tres vectores $\vec{A}, \vec{B}\ y\ \vec{C}$ puede resultar en:

3.- Triple producto escalar: $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$

4.- Triple producto vectorial: $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$

PRODUCTO PUNTO.

El producto punto de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, el cual se escribe $\vec{A}\cdot\vec{B}$ se define geométricamente como el producto de las magnitudes de $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y el coseno del ángulo entre ellos.

Así:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos(\theta_{AB})$$

Donde θ_{AB} es el ángulo menor entre $\vec{A}$ y $\vec{B}$. El resultado $\vec{A}\cdot\vec{B}$ se denomina producto escalar.

Si $\vec{A} = (A_x + A_y + A_z)\quad y\quad \vec{B} = (B_x + B_y + B_z)$, entonces

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Elementos de electromagnetismo. Tercera edición.
Matthew N.O. Sadiku. Alfaomega

lo cual se obtiene multiplicando $\vec{A}$ y $\vec{B}$ componente por componente. Se dice que dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ son ortogonales (o perpendiculares) entre sí, si $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$.

El producto puto obedece las siguientes leyes:

Ley conmutativa: $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$

Ley distributiva:
$$\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$
$$\vec{A} \cdot \vec{A} = \left|\vec{A}\right|^2 = A^2$$

Nótese también que:
$$a_x \cdot a_y = a_y \cdot a_z = a_z \cdot a_x = 0$$
$$a_x \cdot a_x = a_y \cdot a_y = a_z \cdot a_z = 1$$

PRODUCTO CRUZ.

El producto cruz de dos vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$, el cual se escribe $\vec{A} \times \vec{B}$, es una cantidad vectorial, cuya magnitud es el área del paralelogramo formado por $\vec{A}$ y $\vec{B}$ y cuya dirección equivale a la dirección de avance de un tornillo de rosca derecha cuando $\vec{A}$ se hace y gira hacia $\vec{B}$.

Así:

$$\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = \mathrm{ABsen}\theta_{\mathrm{AB}} \mathrm{a}_{\mathrm{n}}$$

Donde a_n , es un vector unitario normal al plano que contiene a $\vec{A}$ y $\vec{B}$. La dirección de a_n puede entenderse como la dirección del pulgar derecho cuando los dedos de la mano derecha giran de $\vec{A}$ y $\vec{B}$.

La multiplicación de vectores $\vec{\mathrm{A}} \times \vec{\mathrm{B}} = \mathrm{ABsen}\theta_{\mathrm{AB}} \mathrm{a}_{\mathrm{n}}$ se denomina producto cruz o producto vectorial a causa de que su resultado es un vector.

Si $\vec{A} = (A_x + A_y + A_z) \quad y \quad \vec{B} = (B_x + B_y + B_z)$, entonces

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=(A_yB_z-A_zB_y)a_x+(A_zB_x-A_xB_z)a_y+(A_xB_y-A_yB_x)a_z$$

El producto cruz obedece las siguientes propiedades.

No es conmutativo: $\vec{A}\times\vec{B}\neq\vec{B}\times\vec{A}$

Es anticonmutativo: $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

No es asociativo: $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\neq(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$

Es distributivo: $\vec{\mathrm{A}}\times(\vec{\mathrm{B}}+\vec{\mathrm{C}})\neq\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{B}}+\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{C}}$

$$\vec{\mathrm{A}}\times\vec{\mathrm{A}}=0$$

Nótese también que

$$a_x\times a_y=a_z$$
$$a_y\times a_z=a_x$$
$$a_z\times a_x=a_y$$

TRIPLE PRODUCTO ESCALAR.

Dados tres vectores $\vec{A}, \vec{B}\ y\ \vec{C}$, definimos el triple producto escalar como:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$$

Si $\vec{A} = (A_x + A_y + A_z), \vec{B} = (B_x + B_y + B_z)\ y\ \vec{C} = (C_x + C_y + C_z)$, entonces $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C})$ es el volumen de un paralelepípedo con $\vec{A}, \vec{B}\ y\ \vec{C}$ por aristas, el cual puede obtenerse fácilmente hallando el determinante de la matriz de 3x3 formada por $\vec{A}, \vec{B}\ y\ \vec{C}$, esto es:

$$\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Debido a que el resultado de esta multiplicación de vectores es un escalar, la ecuación $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$ se llama triple producto escalar.

TRIPLE PRODUCTO VECTORIAL.

Para los vectores $\vec{A}, \vec{B}\ y\ \vec{C}$ definimos el triple producto vectorial como:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}(\vec{A}\cdot\vec{C}) - \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

Cabe destacar que:

$$(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} \neq \vec{A}(\vec{B}\cdot\vec{C})$$
$$(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C} = \vec{C}(\vec{A}\cdot\vec{B})$$

EJERCICIOS.

Ejercicio 1.

Dados los vectores $\vec{A} = 3a_x + 4a_y + a_z$ y , $\vec{B} = 2a_y - 5a_z$ encuentre los ángulos entre $\vec{A}\, y\, \vec{B}$.

Solución:

El ángulo θ_{AB} puede hallarse mediante producto punto o producto cruz.

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = (3{,}4{,}1)\cdot(0.2.-5)$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = 0+8-5=3$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{3^2+4^2+1^2}$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{26}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{0^2+2^2+(-5)^2}$$

$$\left|\vec{B}\right| = \sqrt{29}$$

$$\cos\theta_{AB} = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|} = \frac{3}{\sqrt{(26)(29)}} = 0.1092$$

$$\underline{\theta_{AB} = \cos^{-1}(0.1092) = 83.73^\circ}$$

Alternativamente utilizando producto cruz:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=(-20-2)a_x+(0+15)a_y+(6-0)a_z=(-22,15,6)$$

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|=\sqrt{(-22)^2+15^2+6^2}=\sqrt{745}$$

$$sen\,\theta_{AB}=\frac{\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}=\frac{\sqrt{745}}{\sqrt{(26)(29)}}=0.994$$

$$\underline{\theta_{AB}=sen^{-1}(0.994)=83.73^\circ}$$

Ejercicio 2.

Tres cantidades vectoriales están dadas por:

$$\vec{P} = 2a_x - a_z$$
$$\vec{Q} = 2a_x - a_y + 2a_z$$
$$\vec{R} = 2a_x - 3a_y + a_z$$

Determine:

$$a) \quad (\vec{P}+\vec{Q})\times(\vec{P}-\vec{Q})$$
$$b) \quad \vec{Q}\cdot\vec{R}\times\vec{P}$$
$$c) \quad \vec{P}\cdot\vec{Q}\times\vec{R}$$
$$d) \quad \vec{P}\times(\vec{Q}\times\vec{R})$$

Solución:

a)

$$(\vec{P}+\vec{Q})\times(\vec{P}-\vec{Q}) = \vec{P}\times(\vec{P}-\vec{Q})+\vec{Q}\times(\vec{P}-\vec{Q})$$
$$(\vec{P}+\vec{Q})\times(\vec{P}-\vec{Q}) = \vec{P}\times\vec{P}-\vec{P}\times\vec{Q}+\vec{Q}\times\vec{P}-\vec{Q}\times\vec{Q}$$
$$(\vec{P}+\vec{Q})\times(\vec{P}-\vec{Q}) = 0+\vec{Q}\times\vec{P}+\vec{Q}\times\vec{P}-0$$
$$(\vec{P}+\vec{Q})\times(\vec{P}-\vec{Q}) = 2\vec{Q}\times\vec{P}$$
$$(\vec{P}+\vec{Q})\times(\vec{P}-\vec{Q}) = 2\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$
$$(\vec{P}+\vec{Q})\times(\vec{P}-\vec{Q}) = 2(1-0)a_x + 2(4+2)a_y + 2(0+2)a_z$$
$$\underline{(\vec{P}+\vec{Q})\times(\vec{P}-\vec{Q}) = 2a_x + 12a_y + 4a_z}$$

b) La única manera en la que $\vec{Q}\cdot\vec{R}\times\vec{P}$ tiene sentido es:

$$\vec{Q}\cdot(\vec{R}\times\vec{P}) = (2,-1,2)\cdot\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ 2 & -3 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\vec{Q}\cdot(\vec{R}\times\vec{P}) = (2,-1,2)\cdot(3,4,6) = 6-4+12$$

$$\underline{\vec{Q}\cdot(\vec{R}\times\vec{P}) = 14}$$

c) Con base en la ecuación $\vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})$.

$$\vec{P}\cdot\vec{Q}\times\vec{R} = \vec{Q}\cdot(\vec{R}\times\vec{P}) = 14$$

$$\vec{P}\cdot\vec{Q}\times\vec{R} = (2,0,-1)\cdot(5,2,-4) = 10+0+4$$

$$\underline{\vec{P}\cdot\vec{Q}\times\vec{R} = 14}$$

d)

$$\vec{P}\times(\vec{Q}\times\vec{R}) = \vec{Q}(\vec{P}\cdot\vec{R}) - \vec{R}(\vec{P}\cdot\vec{Q})$$

$$\vec{P}\times(\vec{Q}\times\vec{R}) = (2,-1,2)(4+0-1) - (2,-1,3)(4+0-2)$$

$$\underline{\vec{P}\times(\vec{Q}\times\vec{R}) = (2,3,4)}$$