UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
PRIMER EXAMEN FINAL
ÁLGEBRA LINEAL
CLAVE 1220
1 DE DICIEMBRE DE 2016

SEMESTRE 2017 - 1

TIPO D

Instrucciones: Leer cuidadosamente el enunciado de cada uno de los **6** reactivos de que consta el examen antes de comenzar a resolverlos. La duración máxima del examen es de 2.0 horas.

1. El sistema algebraico $(A,\circ)$ es un grupo abeliano, donde $A=\{\,0,1,2\,\}$ y $\circ$ es la operación binaria dada por:

$\circ$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

Determinar el valor de $y \in A$ que satisface la ecuación: $(y \circ 1)\circ 0 = (2\circ 1)\circ 2$

16 puntos

2. Determinar si el conjunto $H=\left\{\,\delta_1 e^{-x}+\delta_2 e^{x} \;\middle|\; \delta_1,\ \delta_2 \in \mathbb{R}\,\right\}$ es un espacio vectorial sobre el campo de los reales con las operaciones usuales de adición de funciones y multiplicación de un escalar por una función, considerando que se satisfacen los axiomas:

$\forall\, f, g, h \in G;\ \ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

a) $f+(g+h)=(f+g)+h$

b) $f+g=g+f$

c) $(\alpha\beta)f=\alpha(\beta f)$

d) $(1)f=f$

16 puntos

3. Sea la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -4 & k & -6 \end{bmatrix}$$

a) Determinar el valor de k para que la matriz B sea de rango igual a dos.
b) Con el valor obtenido en el inciso (a), obtener una base del espacio columna de la matriz B.
c) Determinar si el vector $(2, 2, -6)$ pertenece al espacio columna de la matriz B.

18 puntos

4. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz asociada al operador $S : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ referida a la base canónica de $\mathbb{R}^3$.

Determinar:
a) Los valores propios de S.
b) Los espacios propios de S.
c) Una matriz que diagonalice a A y escribir la matriz diagonal correspondiente.

18 puntos

5. Sean los vectores $\bar{a} = (-1, 0, 1)$ y $\bar{b} = (w_1, w_2, 0)$ del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el producto interno definido por:

$$\left(\bar{u} \,|\, \bar{v}\right) = \sum_{i=1}^{3} u_i v_i \qquad \forall\ \bar{u} = \left(u_1, u_2, u_3\right),\ \bar{v} = \left(v_1, v_2, v_3\right) \in \mathbb{R}^3$$

Obtener los valores de $w_1, w_2 \in \mathbb{R}$ tales que $\left\|\bar{b}\right\| = \sqrt{2}$ y el ángulo entre $\bar{a}$ y $\bar{b}$ sea de 120°.

16 puntos

6. Sea el operador lineal $S : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ tal que:

$$S(a, b) = (a - 2ib, 2ia + b); \quad \forall\ (a, b) \in \mathbb{C}^2$$

a) Obtener la regla de correspondencia del operador adjunto S.
b) Determinar si S es un operador normal.

16 puntos