UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE INGENIERÍA

DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

PRIMER EXAMEN FINAL

ÁLGEBRA LINEAL

SEMESTRE 2017 - 2 **2 DE JUNIO DE 2017**

TIPO D

Instrucciones: Leer cuidadosamente el enunciado de cada uno de los **6** reactivos de que consta el examen antes de comenzar a resolverlos. La duración del examen es de 2.0 horas.

1. Obtener $F = A \cap B$ y demostrar que F es un subespacio del espacio vectorial real de las matrices simétricas de 2x2, donde los subespacios A y B son:

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \middle| \; a - 2b + 2c; \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} 2a - 3b - c = 0; \; a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$$

2. Sea el conjunto $C = \{(1, -k, -1), (0, 1, 2), (1, k, 1)\}$.

a) Determinar el valor de $k \in \mathbb{R}$ que hace que el conjunto C sea linealmente dependiente.

b) Con $k = 1$, obtener una base del espacio generado por el conjunto C, $L(C)$.

3. Dado el espacio vectorial $P_1 = \{ax + b \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ y la transformación lineal $S : P_1 \to \mathbb{R}^2$ tal que:

$$S(x) = (2, 1) \quad \text{y} \quad S(1) = (1, 2)$$

Determinar:

a) La imagen del vector $\bar{v} = 1 + x$, $S(1 + x)$.

b) Una base del recorrido de S.

c) La dimensión del núcleo de S .

TIPO D

4. Sea el operador lineal $S:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $S(a,b,c)=\left(a,\ a+3b,\ a+3c\right)$.

Determinar:

a) Una matriz asociada a S.
b) Los valores característicos de S y el espacio característico asociado a cada uno de ellos.
c) Una matriz que diagonalice al operador S.

5. Sea $M=\left\{\left(x,y,z\right)\ \middle|\ -2x+y-z=0;\ x,y,z\in\mathbb{R}\right\}$ un subespacio de $\mathbb{R}^3$, y el producto interno usual en $\mathbb{R}^3$

Obtener al vector $\overline{w}\in M$ más próximo al vector $\overline{v}=\left(1,0,0\right)$.

6. Sea el espacio vectorial $\mathbb{C}^2$ definido sobre el campo de los números complejos, con el producto interno usual en $\mathbb{C}^2$ y el operador lineal $H:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ cuya regla de correspondencia es:

$$H(a,b)=\left(ia+\left(1+i\right)b,\ \left(-1+i\right)a+2ib\right)$$

Determinar si H es un operador normal.