UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
PRIMER EXAMEN FINAL
ÁLGEBRA LINEAL (1220)
5 DE DICIEMBRE DE 2017

SEMESTRE 2018 - 1

TIPO A

Instrucciones: Leer cuidadosamente el enunciado de cada uno de los **6** reactivos de que consta el examen antes de comenzar a resolverlos. La duración del examen es de 2.0 horas.

1. Sea el campo $(\mathbb{R}, *, \circ)$, donde las operaciones binarias están definidas de la siguiente manera:

$$a * b = a + b + 1 \qquad \forall a, b \in \mathbb{R}$$
$$a \circ b = a + b + ab$$

Obtén los valores de $x, y \in \mathbb{R}$ que satisfacen las ecuaciones:

$$x * (3 \circ y) = 3$$
$$x * 4 = 0$$

16 puntos.

2. Sean $A = \left\{ \alpha x e^{-x}, 3e^{-x} \right\}$ y $B = \left\{ xe^{-x} - \beta e^{-x},\ -4xe^{-x} - \beta e^{-x} \right\}$ dos bases de un espacio vectorial de funciones. Si la matriz de transición de la base A a la base B es $M_B^A = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$, determina los valores de $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$.

16 puntos.

3. Sea $P_1 = \left\{ a + bx \,\middle|\, a, b \in \mathbb{R} \right\}$ el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor o igual a uno. Considera la transformación lineal $T : P_1 \to P_1$ definida por $T(p(x)) = p(0) + p(1)x$

Obtén:

a) La matriz asociada a T con respecto a la base $B = \{ 1, x \}$.

b) La matriz asociada a T^{-1} con respecto a la base $B = \{ 1, x \}$.

c) La regla de correspondencia de T^{-1}.

18 puntos

4. Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y el operador $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, considera que la matriz asociada al operador T respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & -10 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

a) Determina los valores característicos del operador T.
b) Obtén una base de cada uno de los espacios característicos.
c) Determina si T es diagonalizable; en caso de serlo, obtén la matriz diagonal y una matriz diagonalizadora.

18 puntos.

5. Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ con el producto interno usual. Obtén la proyección del vector $\bar{u} = (1, -1, 2)$ sobre el subespacio $W = \{(x, y, -x-y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

16 puntos.

6. Sean el espacio vectorial $P_1 = \{a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ con el producto interno:

$$\langle a+bx,\ c+dx \rangle = ac + bd \qquad \forall\ a+bx,\ c+dx \ \in\ P_1$$

y el operador lineal $D: P_1 \to P_1$ definido por: $D(p(x)) = \dfrac{dp(x)}{dx}$

Determinar el adjunto del operador D.

16 puntos.