UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
PRIMER EXAMEN FINAL
ÁLGEBRA LINEAL (1220)
5 DE DICIEMBRE DE 2017

SEMESTRE 2018 - 1

TIPO D

Instrucciones: Leer cuidadosamente el enunciado de cada uno de los **6** reactivos de que consta el examen antes de comenzar a resolverlos. La duración del examen es de 2.0 horas.

1. Sea el sistema $(C,*)$, donde $C=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbb{R}\}$ y la operación binaria definida de la siguiente manera:

$$(a,b)\ *\ (c,d)=(ac,\ bd)$$

Determina si $(C,*)$ tiene estructura de grupo abeliano considerando que se cumple la propiedad de asociatividad.

16 puntos.

2. Determina si el conjunto $N=\left\{\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \middle| \ a,b,c\in\mathbb{R}\right\}$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial M_3 de las matrices cuadradas de orden tres sobre el campo de los reales, con las operaciones usuales de adición de vectores y multiplicación de un escalar por un vector.

16 puntos

3. Sea el espacio vectorial $P_2=\{ax^2+bx+c\mid a,b,c\in\mathbb{R}\}$ y el operador lineal $S:P_2\to P_2$ tal que: $S(x^2)=1;\quad S(x)=x^2;\quad S(1)=x$.

Determina si $S^{-1}(ax^2+bx+c)=S\circ S(ax^2+bx+c)$.

16 puntos

4. Sea el operador lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $T(a,b,c)=(a+2b,\ -2b+c,\ 3c)$.

Determina:

a) Los valores propios del operador T.

b) Los espacios propios asociados al operador T.

c) Si existe, la matriz diagonal asociada al operador T.

18 puntos

5. Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con el producto interno usual y sea $Q=\{(2x,\ x) \mid x\in\mathbb{R}\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

a) Expresa el vector $\bar{v}=(1,\ 2)\in\mathbb{R}^2$ como la suma única $\bar{m}+\bar{n}$, donde $\bar{m}\in Q$ y $\bar{n}\in Q^{\perp}$.

b) Obtén la mínima distancia entre el vector $\bar{v}$ y el subespacio Q.

18 puntos

6. Sea el espacio vectorial $C^2=\{(x,y) \mid x,y\in\mathbb{C}\}$ sobre $\mathbb{C}$ con el producto interno siguiente:

$[(x,y)|(w,z)]=x\overline{w}+y\overline{z} \quad \forall\ (x,y),\ (w,z)\in\ \mathbb{C}^2$ donde $\overline{w}$ y $\overline{z}$ son los conjugados de w y z respectivamente.

Determina si el operador lineal $H:\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}^2$ definido por $H(x,y)=(x+yi,\ 4y-xi) \quad \forall\ (x,y)\in\ \mathbb{C}^2$, es un operador hermitiano.

16 puntos