UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS
SEGUNDO EXAMEN FINAL
ÁLGEBRA LINEAL (1220)
15 DE DICIEMBRE DE 2017

SEMESTRE 2018 - 1

Instrucciones: Leer cuidadosamente el enunciado de cada uno de los **6** reactivos de que consta el examen antes de comenzar a resolverlos. La duración del examen es de 2.0 horas.

1. Sea el conjunto $A=\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \middle|\, a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$ y la operación $\square$ definida por:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \square \begin{bmatrix} d & e \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ad & 3be \\ 3be & cf \end{bmatrix} \qquad \forall\, a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$$

Determina el elemento inverso de la matriz $J=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ con respecto a la operación $\square$.

16 puntos

2. Sean el espacio vectorial de los polinomios de grado menor o igual a dos con coeficientes reales y $B=\left\{x^2,\ x,\ 1\right\}$ una de sus bases, y sea $M_A^B=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ la matriz de transición de la base B a la base A.

Obtén:

a) Los vectores de la base $A=\left\{\bar{a}_1,\ \bar{a}_2,\ \bar{a}_3\right\}$.

b) Las coordenadas del vector $\bar{v}$ en la base B si $\left(\bar{v}\right)_A=\begin{bmatrix} 6 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

18 puntos

3. Sean el espacio vectorial $V=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ b & 0 \end{bmatrix} \middle| \; a,b\in\mathbb{R}\right\}$ sobre el campo de los reales y los operadores lineales $T:V\to V;\quad S:V\to V$ definidos por: $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a-b & b \\ b & 0 \end{bmatrix}$ y $S\left(\begin{bmatrix} x & y \\ y & 0 \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} x & y \\ y & 0 \end{bmatrix}$

Obtén si existe, la regla de correspondencia de $\left(S\circ T\right)^{-1}$.

16 puntos

4. Sean el espacio vectorial $P=\left\{ax+b \,\middle|\, a,b\in\mathbb{R}\right\}$ y la transformación lineal $T:P\to P$, si $T(x+2)=2(x+2)$ y $T\left(-x\right)=3(-x)$, determina:

a) El recorrido de T, $T(P)$, y su dimensión.
b) El espacio característico asociado al menor valor característico de T.

18 puntos

5. Obtén una base ortonormal a partir de la base $B=\left\{(1,3),\ (3,5)\right\}$ de $\mathbb{R}^2$ utilizando el producto interno usual en $\mathbb{R}^2$.

16 puntos

6. Sea el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ con el producto interno usual y el operador lineal $S:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, el cual está definido por: $S\left(x,y\right)=\left(4x+y,\ x+4y\right)$.

Obtén la descomposición espectral del operador S.

16 puntos